Formelsammlung Meßtechnik

absoluter Fehler	$F = \Delta x = x_a - x$	x_a : angezeigter Wert
relativer Fehler	$F_r = \frac{\Delta x}{x} = \frac{x_a - x}{x}$	x : wahrer Wert
prozentualer Fehler	$\frac{F_r}{\%} = 100 \cdot \frac{x_a - x}{x}$	x_m : Meßbereich Endwert
relativer Anzeigefehler	$F_{ar} = \frac{x_a - x}{x_m}$	
Korrektion	K = -F	

arithmetischer Mittelwert	$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ n:Anzahl Meßwerte x_i:Einzelmeßwert
Standardabweichung	$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$ relative Standardabweichung $s_r = \frac{s}{\bar{x}}$
Mittelwert von y	$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$
Standardabweichung von y	$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot s_i \right)^2}$
relative Standardabweichung für Potenzprodukt	$s_r = \frac{s_y}{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(a_i \cdot \frac{s_i}{x_i} \right)^2}$

absoluter Fehler allgemein: $\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i$	absoluter Fehler speziell für Linearkombination: $\Delta y = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \Delta x_i$
relativer Fehler: $\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i}$	relativer Größtfehler Potenzprodukt: $\left\|\frac{\Delta y}{y}\right\|_{max} = \sum_{i=1}^{n} \left\|a_i \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i}\right\|$
absoluter Größtfehler allgemein: $\|\Delta y\|_{max} = \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right\| \cdot \|\Delta x_i\|$	absoluter Größtfehler Linearkombination: $\|\Delta y\|_{max} = \sum_{i=1}^{n} \|a_i \cdot \Delta x_i\|$

Ausgleichsrechnung

Steigung
$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

Achsenabschnitt
$$y_0 = \frac{1}{n} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \right\}$$

Korrelationskoeffizient
$$r = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left\{ n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right\} \cdot \left\{ n \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2 \right\}}}$$

Verstärkung/Dämpfung in Neper	$a_{Np} = \ln \cdot (U_2 / U_1) Np$
Leistungsverstärkung	$a_P = 10 \cdot \lg(P_2 / P_1) dB$ $a_P = 10 \cdot \lg(U_2^2 \cdot R_1 / (U_1^2 \cdot R_2)) dB$ $a_P = 20 \cdot \lg(U_2 / U_1) dB - 10 \cdot \lg(R_2 / R_1) dB$
Spannungsverstärkung	$a_U = 20 \cdot \lg(U_2 / U_1) dB$
Stromverstärkung	$a_I = 20 \cdot \lg(I_2 / I_1) dB$

Umrechnung	in	Spannung	Strom	Leistung
Verhältnis	dB	$a_U = 20 \cdot \lg(U_2 / U_1)$	$a_I = 20 \cdot \lg(I_2 / I_1)$	$a_P = 10 \cdot \lg(P_2 / P_1)$
Verhältnis	Np	$a_U = \ln(U_2 / U_1)$	$a_I := \ln(U_2 / U_1)$	$a_P = 0{,}5 \cdot \ln(P_2 / P_1)$
dB	Verhältni	$U_2 / U_1 = 10^{(aU/20)}$	$I_2 / I_1 = 10^{(aI/20)}$	$P_2 / P_1 = 10^{(aP/10)}$
Np	Verhältni	$U_2 / U_1 = e^{2aU}$	$I_2 / I_1 = e^{2aI}$	$P_2 / P_1 = e^{2aP}$

	allgemein	Sinus	Rechteck	Dreieck
Effektivwert	$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$	$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{x} = 0{,}707 \cdot \hat{x}$	$X = \hat{x}$	$X = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \hat{x} = 0{,}577 \cdot \hat{x}$
arithm. Mittelwert	$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$	$\bar{x} = 0$	$\bar{x} = 0$	$\bar{x} = 0$
Gleichrichtwert	$\overline{\|x\|} = \frac{1}{T} \int_0^T \|x(t)\| dt$	$\overline{\|x\|} = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{x} = 0{,}637 \cdot \hat{x}$	$\overline{\|x\|} = \hat{x}$	$\overline{\|x\|} = \frac{1}{2} \cdot \hat{x}$

		Mittelwert	Effektivwert
Mischgrößen	$x(t) = \bar{x} + x_\sim(t)$	$\overline{x(t)} = \bar{x}$ $\overline{x_\sim(t)} = 0$	$X = \sqrt{\bar{x}^2 + X_\sim^2}$
Fourier-Zerlegung	$x(t) = \bar{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \cdot \sin(n\omega t + \varphi_n)$	$\overline{x(t)} = \bar{x}$	$X = \sqrt{\bar{x}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^2}$

Drehspulmeßwerk
arith. Mittelwert

Betrag der Kraft $F = N \cdot l \cdot B \cdot i$

elektr. Antriebsmoment
$M_e = 2 \cdot r \cdot N \cdot l \cdot B \cdot i = A \cdot N \cdot B \cdot i$

Rauschgrößen

arithmetischer Mittelwert	Quadratmittelwert	Effektivwert	Beziehung
$\bar{x} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt$	$\overline{x^2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt$	$X = x_{eff} = \sqrt{\overline{x^2}}$	$\overline{x^2} = 2 + {}^{-2}$

Streuung	Standardabweichung
$s^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (x(t) - \bar{x})^2 dt$	$s \quad \sqrt{s}$

Klirrfaktor
$$k = \frac{\sqrt{\sum_{=}^{\infty} X_n}}{\sqrt{\sum_{n}^{\infty} n}}$$

Beziehung	Schwingungsgehalt
$k^2 + g^2 = 1$	$g = \frac{X_1}{}$

Kenngrößen

Scheitelfaktor	Formfaktor	für
$x = \frac{\hat{x}}{x_{eff}}$	$F = \frac{x_{eff}}{\| \|}$	$= \sqrt{2}; \quad = 1,$

Grundschwingungsgehalt $= \frac{x_{\sim eff}}{x_{eff}} \quad \frac{\sim}{X}$

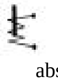
Drehmoment Rückstellfeder	$M_m = \alpha \cdot D$ α = Ausschlagwinkel D = Federkonstante
Gleichgewicht⇒ Zeigerstillstand wenn $M_e = M_m$	
$\alpha = \frac{A \cdot N \cdot B}{D} i = k \cdot i; \alpha \sim i$	Stromempfindlichkei $s_i = \frac{d\alpha}{di} = k = \frac{A \cdot N \cdot B}{D}$

Momentengleichgewicht:
Beschleunigungsmoment + Dämpfungsmoment ++ Richtungsmoment = elektrisches Antriebsmoment

$$J \cdot \ddot{\alpha} + d \cdot \dot{\alpha} + D \cdot \alpha = M_e(t) \Rightarrow \frac{J}{D} \ddot{\alpha} + \frac{d}{D} \dot{\alpha} + \alpha = \frac{M_e}{D}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}; J = \frac{d}{2 \cdot \sqrt{J \cdot D}} \Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{\alpha} + \frac{2J}{\omega_0} \dot{\alpha} + \alpha = \frac{A \cdot N \cdot B \cdot i}{D} = k \cdot i$$

Dreheiseninstrument
wahrer Effektivwert



Ausschlag $\alpha = c \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt; \alpha \sim I_{eff}^2$

abstoßende Kraft $F \sim i^2$

Elektrodynamisches Meßwerk
wahrer Effektivwert

δ Luftspaltweite
Feldspule, N1
Windungen

Antriebsmoment für Drehspule
$$M_e = A \cdot N_2 \cdot i_2 \cdot B = \frac{A \cdot m_0 \cdot N_1 \cdot N_2}{d} \cdot i_1 \cdot i_2$$
$$\alpha = \frac{m_0 \cdot A \cdot N_1 \cdot N_2}{d \cdot D} \cdot i_1 \cdot i_2 = k \cdot i_1 \cdot i_2$$

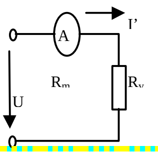
Pegelgleichung
$p_r = 10 \cdot dB \cdot \lg \frac{P_x}{P_1}$ ‖ $p_r = 20 \cdot dB \cdot \lg \frac{U_x}{U_1}$ absoluter Pegel: P_1=1mW U_1=1V,1mV,0,775V

Temperatureinfluß $R(T) = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (T - T_0))$

Strommessung:

ohne Meßgerät: $I = \frac{U}{R_V}$

mit Meßgerät: $J' = I \cdot \frac{R_V}{R_m + R_V}$



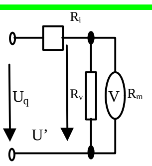
relativer Fehler $\frac{\Delta I}{I} = \frac{-R_m / R_V}{1 + R_m / R_V}$

Amperemeter $R_m \to 0$

Spannungsmessung:

ohne Meßgerät: $\frac{U}{U_q} = \frac{R_V}{R_i + R_V}$

mit Meßgerät: $\frac{U'}{U_q} = \frac{R_V R_m}{R_i R_V + R_i R_m + R_V R_m}$

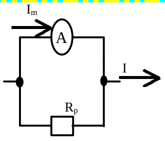


Voltmeter $R_m \to \infty$

relativer Fehler $\frac{\Delta U}{U} = \frac{U' - U}{U} = \frac{-R_i R_V}{R_i R_V + R_i R_m + R_V R_m}$

Meßbereichserweiterung

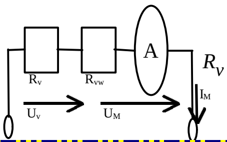
:Strom Meßbereich:



$R_p = R_m \cdot \frac{I_m}{I - I_m} = \frac{R_m}{(I / I_m) - 1}$

$R_p = (R_{vw} + R_m) \cdot \frac{1}{(I / I_m) - 1}$

Spannungs Meßbereich:



$R_V = \frac{U}{I_m} - R_A$ $R_A = (R_{vw} + R_m)$

Gleichspannungskompensation

$U_x = U_R = \frac{R}{R_0} \cdot U_0$

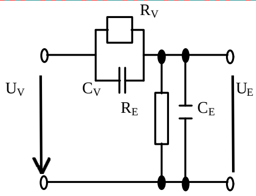
Kompensation mit Hilfstrom $U_x = J_a \cdot R_g$

Eingangsspannungsteiler

Frequenzunabhängigkeit, wenn

$R_V C_V = R_E C_E \Rightarrow$

$\frac{U_V}{U_E} = 1 + \frac{R_V}{R_E}$



Oszilloskop

Elektronengeschwindigkeit $v_z = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_Z}{m_0}}$

Beschl. in y-Richt. $a_y = \frac{U_y \cdot e}{b \cdot m_0}$

$v_y = a_y \cdot t$

$m_0 = 9{,}108 \cdot 10^{-31}$ kg
$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As

Flugzeit durch Ablenkplatten $t = \frac{l}{v_z}$

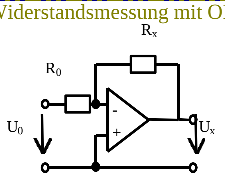
Ablenkung in y-Richtung am Leuchtschirm $y_a = \frac{l \cdot s}{2 \cdot b \cdot U_Z} U_y$

Flugzeit bei f_g $t = \frac{l}{v_z} = \frac{T}{4} = \frac{1}{4 f_g}$

Magnetisierungsschleife

$B = \frac{R_2 \cdot C}{N_2 \cdot A} \cdot u_y$

Widerstandsmessung mit OP-Verstärker



$R_x = -\frac{U_x}{U_0} \cdot R_0$

Widerstandsbrücken im Ausschlagverfahren

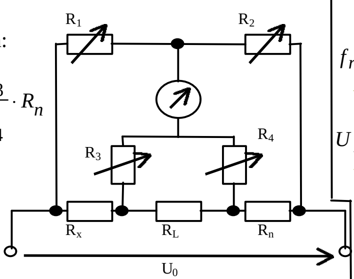
R1 = variabel
R2 = R3 = R4 = R

$U_B = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{R_1 / R - 1}{R_1 / R + 1}$

Thomsen-Meßbrücke

bei Abgleich:

$R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_n = \frac{R_3}{R_4} \cdot R_n$



Viertelbrücke in Dreileiterschalt.

$U_B = U_0 \frac{\Delta R_N}{4 \cdot R + 2 \cdot \Delta R_N + 4 \cdot \Delta R_S}$

$f_r = -\frac{\Delta R_S}{R}$

bei Halbbrücke

$U_B = U_0 \frac{\Delta R_N}{2 \cdot (R + \Delta R_S)}$ $f_r = -\frac{\Delta R_S}{R}$

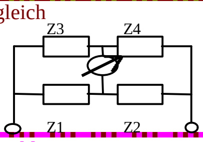
Viertelbrücke in Zweileiterschalt.

$f_r = \frac{\Delta R_S}{\Delta R_N}$

f_r = relativer Fehler
R_N = Nutzeffekt
R_S = Störeffekt

Brücke im Abgleich

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$



Betragabgleich $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$

Phasenabgleich $j_1 - j_2 = j_3 - j_4$

Brücke im Ausschlag

$U_B = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}$

bei Viertelbrücke $U_B = \frac{U_0}{4} \cdot \frac{\Delta x}{x_0}$

Induktive Aufnehmer

$L = N^2 \cdot \Lambda_m = N^2 \cdot \frac{m_0 \cdot A}{2 \cdot s}$

Empfindlichkeit

$E = \frac{dL}{ds} = -\frac{N^2 \cdot m_0 \cdot A}{2 \cdot s^2} = -\frac{L}{s}$

Messung ΔL mit Viertelbrücke

$U_B = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{\Delta s}{2 \cdot s_0 + \Delta s}$

Empfindlichkeit

$E = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} = \frac{Wirkung}{Ursache}$

System mit 1 Energiespeicher, PT 1

DGL: $a_1 \dot{x}_a(t) + a_0 x_a(t) = e_0 x_e(t)$ $\frac{e_0}{a_0} = k = E$

$T \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = k \cdot x_e(t)$ $T = \frac{a_1}{a_0}$

$x_a(t) = k \cdot x_{e0}(1 - e^{-t/T})$

R-C-Glied $R \cdot C \cdot \dot{u}_a + u_a = u_e$

$a_0 = e_0 = 1$ k=1 T = RC

$u_a(t) = U_{e0} \cdot \left(1 - e^{-t/T}\right)$

U_{e0} = Höhe des Eingangsspannungssprungs

System mit 2 Energiespeicher, PT2

DGL: $a_2 \ddot{x}_a(t) + a_1 \dot{x}_a(t) + a_0 x_a(t) = e_0 x_e(t)$

$\frac{a_2}{a_0} = T_2^2 = \frac{1}{w_0^2}$ $\frac{a_1}{a_0} = T_1 = \frac{2J}{w_0}$

ω₀ = Eigenkreisfrequenz d unged. Systems   ϑ = Dämpfungsfaktor

$T_1 = 2 \cdot J \cdot T_2$

Lösung 1: ϑ < 1 (Schwingfall)

$x_a(t) = k \cdot x_{e0} \cdot \left\{1 - \frac{e^{-J w_0 t}}{\sqrt{1 - J^2}} \sin\left(\sqrt{1 - J^2}\, w_0 t + a\right)\right\}$ $a = \arccos J$

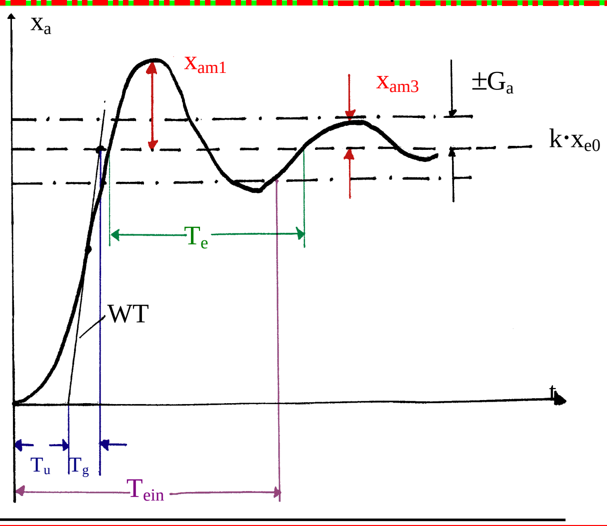
Lösung 2: ϑ = 1 (aperiodischer

$x_a(t) = k \cdot x_{e0} \cdot \left\{1 - e^{-w_0 t}(1 + w_0 t)\right\}$

Lösung 3: ϑ > 1 („Kriechfall“)

$x_a(t) = k \cdot x_{e0} \cdot \left(1 - \frac{T_1'}{T_1' - T_2'} \cdot e^{-t/T_1'} + \frac{T_2'}{T_1' + T_2'} \cdot e^{-1/T_2'}\right)$

$T_1' + T_2' = 2 \cdot ϑ \cdot T_2$
$T_1' \cdot T_2' = T_2^2 = 1/\omega_0^2$



Dämpfungsfaktor ϑ

$J^2 = \frac{\Lambda^2}{4p^2 + \Lambda^2}$

$\Lambda = \ln \frac{x_{am1}}{x_{am3}} = \frac{2p \cdot J}{\sqrt{1 - J^2}}$

$J^2 = \frac{(\ln ü)^2}{p^2 + (\ln ü)^2}$

$ü = \frac{x_{am1}}{k \cdot x_{e0}} = e^{-\frac{p \cdot J}{\sqrt{1 - J^2}}}$

Kennkreisfrequenz

$w_0 = \frac{2p \cdot f_e}{\sqrt{1 - J^2}}$ $f_e = \frac{1}{T_e}$

T_e = Periodendauer der gedämpften Schwingung aus dem Übergangsverlauf

Λ = logarithmisches Dekrement

xam = Überschwingweite

Frequenzgang

$$\underline{G}(jw) = \frac{\hat{x}_a \cdot e^{jj}}{\hat{x}_e}$$

Anstiegszeit t_a

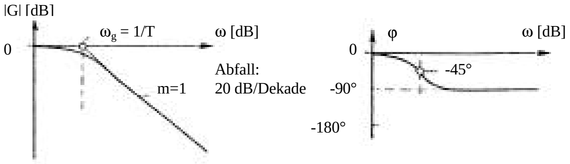
$$t_a = \frac{0{,}35}{B}$$

PT1:

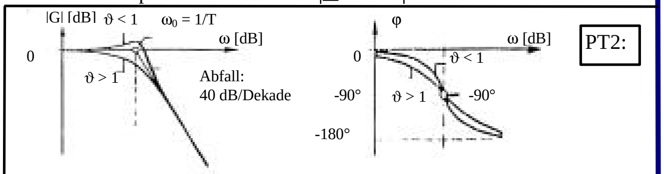
$$\underline{G}(jw) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + jwRC} \qquad \left|\underline{G}(jw)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (wRC)^2}} \qquad j(w) = -\arctan wRC$$

Definitin der Grenzfrequenz beim Tiefpaß

$$\frac{\left|\underline{G}(jw)\right|}{\left|\underline{G}(w=0)\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



PT2:



Von der DGL zum

$$\frac{\underline{G}(jw)}{e_0} = \frac{1}{a_0 + a_1 jw + a_2 (jw)^2}$$

PT1:

$$RC \cdot \dot{u}_a + u_a = u_e$$

$$\underline{G}(jw) = \frac{1}{1 + RCjw}$$

PT2:

$$LC \cdot \ddot{u}_a + RC \cdot \dot{u}_a + u_a = u_e$$

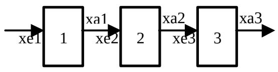
$$\underline{G}(jw) = \frac{1}{1 + RCjw + LC(jw)^2}$$

Drehspulinstrument:

$$\frac{1}{w_0{}^2} \cdot \ddot{a} + \frac{2J}{w_0} \cdot \dot{a} + a = \frac{A \cdot N \cdot B \cdot i}{D} = k \cdot i$$

$$\frac{\underline{G}(jw)}{k} = \frac{1}{1 + j2 \cdot J \cdot \frac{w}{w_0} + \left(j\frac{w}{w_0}\right)^2}$$

Kettenstruktur



$$x_{a3} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot x_{e1}$$

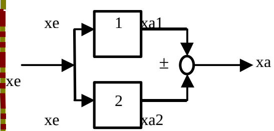
$$E_{ges} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n$$

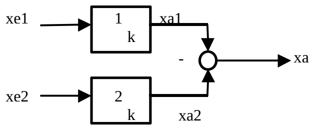
$$\underline{G}(jw) = \underline{G}_1(jw) \cdot \underline{G}_2(jw) \cdot \underline{G}_3(jw)$$

bedeutet: Multiplikation der Beträge
Addition der Phasenwinkel

beim Bode-Diagramm:
Addition der dB-Werte
Addition der Phasenwerte

Parrallelstruktur





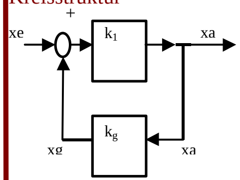
$$x_a = (k_1 \pm k_2) \cdot x_e$$

$$x_{a1} = k \cdot x_{e1} \qquad x_a = k \cdot x_{e1} - k \cdot x_{e2}$$

$$x_{a2} = k \cdot x_{e2} \qquad x_a = k \cdot \left(x_{e1} - x_{e2}\right)$$

$$\underline{G}(jw) = \underline{G}_1(jw) + \underline{G}_2(jw)$$

Kreisstruktur



$$x_g = k_g \cdot x_a$$

$$x_a = k_1 \cdot (x_e \pm x_g)$$

$$E = \frac{k_1}{1 + k_1 \cdot k_g}$$

bei Gegenkopplung: falls $k_1 \to \infty$

$$x_a = \frac{k_1}{1 + k_1 \cdot k_g} \cdot x_e \qquad E = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + k_g} \Rightarrow E \approx \frac{1}{k_g}$$

$$\underline{G}(jw) = \frac{\underline{G}_1(jw)}{1 + \underline{G}_1(jw)\underline{G}_g(jw)}$$

Resultierende Grenzfrequenz bei Kettenschaltung von Systemen

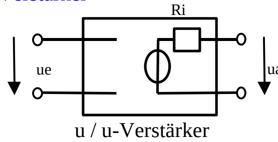
$$\frac{1}{f_g{}^2} = \frac{1}{f_{g1}{}^2} + \frac{1}{f_{g2}{}^2} + \ldots + \frac{1}{f_{gn}{}^2}$$

bei n gleichen Tiefpäßen $f_g = \frac{f_{gi}}{\sqrt{n}}$

Resultierende Anstiegszeit

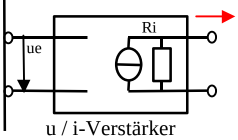
$$t_a{}^2 = t_{a1}{}^2 + t_{a2}{}^2 + \ldots + t_{an}{}^2$$

Verstärker



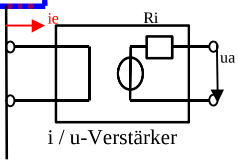
Übertragungs-faktor
[k] = 1

$$k_u = \frac{u_a}{u_e}$$



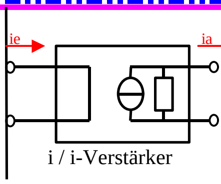
Übertragungs-leitwert
[k] = S

$$k_G = \frac{i_a}{u_e}$$



Übertragungs-widerstand
[k] = Ω

$$k_R = \frac{u_a}{i_e}$$



Übertragungs-faktor
[k] = 1

$$k_i = \frac{i_a}{i_e}$$

Operations-Verstärker

u_a = Ausgangsspannung am OP
u_p = Spannung am + Eingang
u_n = Spannung am - Eingang
u_D = Differenzeingangsspannung
u_{os} = Offsetspannung
k' = interne Verstärkung des OP
k'_{gl} = Gleichtaktverstärkung

$$u_a = k'(u_p - u_n) \qquad u_D = u_p - u_n$$

$$u_a = k' \cdot (u_D \pm u_{os}) \pm k'_{gl} \cdot u_{gl}$$

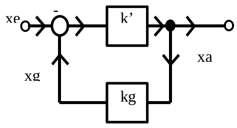
$$u_D = \frac{u_a}{k'} \pm \frac{k'_{gl}}{k'} \cdot u_{gl} \pm u_{os}$$

Gleichtaktunterdrück-ung

$$\frac{k'}{k'_{gl}}$$

Gegengekoppelte OP`s

k_g = Gegenkopplungsfaktor



Verstärkungsfaktor

$$k = \frac{x_a}{x_e} = \frac{k'}{1 + k' \cdot k_g}$$

infolge der Gegen-kopplung wird k < 1

Frequenzgang des unbeschalteten Verstärkers PT1

k_0' = Verstärkung bei f=0 f_T = Transitfrequenz, Verstärkung = 1

$$k' = \frac{k_0'}{1 + j\frac{f}{f_g'}}$$

Frequenzgang gegengekop-pelter Verstärker

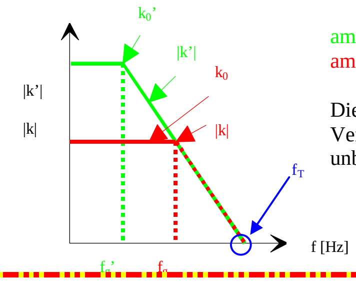
$$k \approx \frac{\frac{1}{k_g}}{1 + j\frac{f}{k_0' \cdot k_g \cdot f_g'}}$$

Grenzfrequenz gegengek. V.

$$f_g = k_0' \cdot k_g \cdot f_g'$$

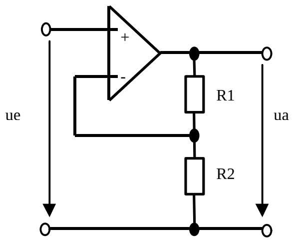
Verstärkungsbandbreiteprodukt

$$f_g \cdot k_0 = f_g' \cdot k_0' = f_T$$



amplitudengang unbeschalteter Verstärker
amplitudengang beschalteter Verstärker

Die Grenzfrequenz f_g des rückgekoppelten Verstärkers ist höher, als die des unbeschalteten Verstärkers

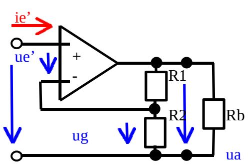


$$\lim_{k' \to \infty} k = \lim_{k' \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{k'} + k_g} = \frac{1}{k_g}$$

$$k_g = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

gegengekoppelter u / u - Verstärker es liegt Spannungs Serienkopplung vor

$$u_g = u_a \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad k_u = \frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{1}{k'} + \frac{R_i'}{k' \cdot R_b}}$$



idealer OP k' → ∞

$$\lim_{k' \to \infty} k_u = 1 + \frac{R_1}{R_2} = \frac{u_a}{u_e}$$

Eingangswiderstand R_e

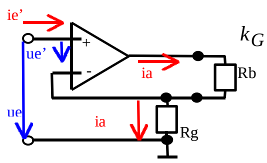
$$R_e \approx \frac{k'}{k_u} R_e' \quad \text{für } k' \to \infty \Rightarrow \lim_{k' \to \infty} R_e \to \infty$$

Ausgangswiderstand R_i

$$R_i = \frac{R_i'}{1 + \frac{k'}{k_u}} \quad \text{für } k' \to \infty \Rightarrow \lim_{k' \to \infty} R_i \to 0$$

idealer OP:
u_e' = 0
i_e' = 0

gegengekoppelter u / i - Verstärker es liegt Strom Serienkopplung vor



$$k_G = \frac{i_a}{u_e} = \frac{1}{R_g + \frac{1}{k'}(R_i' + R_b + R_g)}$$

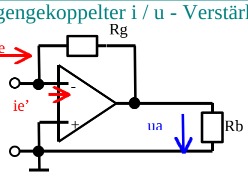
$$\lim_{k'\to\infty} R_e \to \infty \quad \Bigg\| \quad \lim_{k'\to\infty} R_i \to \infty$$

idealer OP k' → ∞

$$\lim_{k'\to\infty} k_G = \frac{1}{R_g}$$

$$i_a = \frac{u_e}{R_g}$$

gegengekoppelter i / u - Verstärker es liegt Spannungs Parallelkopplung vor



$$k_R = \frac{u_a}{i_e} = \frac{-\left(R_g - \frac{R_i'}{k'}\right)}{1 + \frac{R_i'}{k' \cdot R_b}}$$

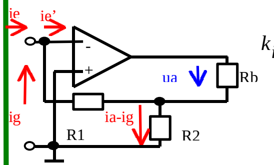
idealer OP k' → ∞

$$\lim_{k'\to\infty} k_R = -Rg$$

$$u_a = -i_e \cdot R_g$$

$$\lim_{k'\to\infty} R_e = 0 \quad \Bigg\| \quad \lim_{k'\to\infty} R_i = 0$$

gegengekoppelter i / i - Verstärker es liegt Strom Parallelkopplung vor



$$k_i = \frac{i_a}{i_e} = \frac{-(R_1 + R_2)}{R_2 + \frac{R_b}{k'} + \frac{R_i'}{k'}}$$

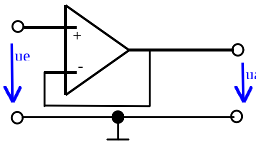
idealer OP k' → ∞

$$\lim_{k'\to\infty} k_i = -\frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

$$\lim_{k'\to\infty} R_e = 0 \quad \Bigg\| \quad \lim_{k'\to\infty} R_i \to \infty$$

Spannungsfolger / Impedanzwandler

Anwendung: Spannungsverstärkung



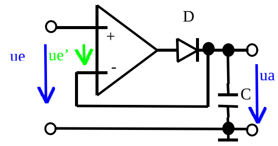
$u_a = u_e$

$R_e \to \infty$

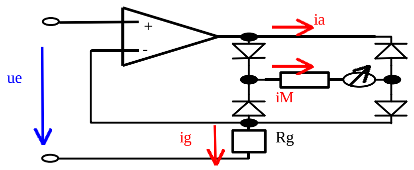
$R_i \to 0$

Gleichrichterschaltung

$$u_a = u_e = \hat{u}_e$$



Effektivwertmessung bei Wechselgrößen

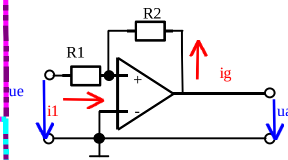


$$i_a = i_g = \frac{u_e}{R_g}$$

$$i_M = \overline{|i_a|} = \frac{2}{p} \cdot \hat{i}_a = \frac{2}{p} \cdot \frac{\hat{u}_e}{R_g}$$

Inverter

Anwendung: Strom Verstärker



$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Sonderfall $R_1 = R_2$

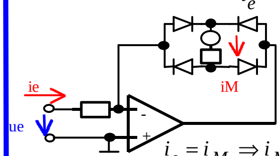
$$\Rightarrow R_e = \frac{u_e}{i_1} = R_1$$

$\to u_a = -u_e$

$R_i = 0$

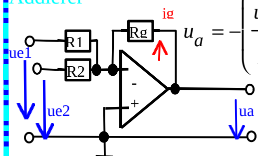
Präzisionsgleichrichter

$$i_e = \frac{u_e}{R}$$



$$i_e = i_M \Rightarrow i_M \sim u_e$$

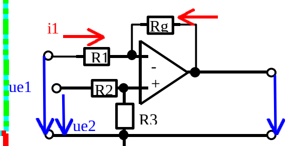
Addierer



$$u_a = -\left(\frac{u_{e1}}{R_1} + \frac{u_{e2}}{R_2}\right) \cdot R_g$$

bei $R_1 = R_2 = R_g = R$ $\quad u_a = -(u_{e1} + u_{e2})$

Subtrahierer



$$u_a = -\frac{R_1 + R_g}{R_1}\left(\frac{R_g}{R_1 + R_g} u_{e1} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} u_{e2}\right)$$

bei $R_1=R_2=R_3=R_g=R$

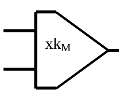
$u_a = -(u_{e1} - u_{e2})$

häufig $R_1=R_2$; $R_3=R_g$:

$$u_a = -\frac{R_g}{R_1}(u_{e1} - u_{e2})$$

Multiplizierer

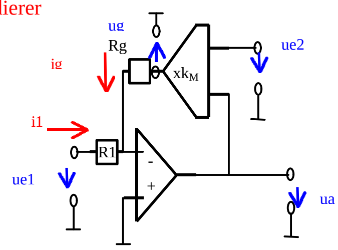
$$u_a = -k_M \cdot u_{e1} \cdot u_{e2}$$



bei $u_{e1} = u_{e2} = u_e \to$

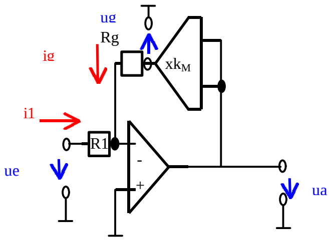
$u_a = k_M u_e^2$

Dividierer



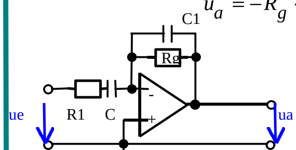
$$u_a = -\frac{R_g}{k_M \cdot R_1} \cdot \frac{u_{e1}}{u_{e2}}$$

Radizierer



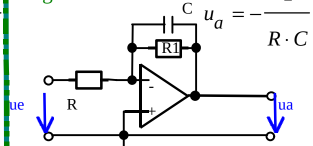
$$u_a = -\sqrt{\frac{R_g}{k_M \cdot R_1} \cdot u_e}$$

Differenzierer



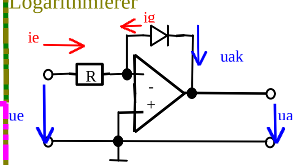
$$u_a = -R_g \cdot C \cdot \frac{du_c}{dt}$$

Integrierer



$$u_a = -\frac{1}{R \cdot C} \int u_e \cdot dt$$

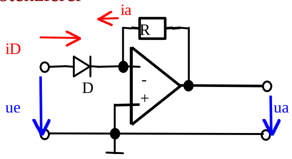
Logarithmierer



$$u_a = 0{,}026V \cdot \ln\frac{i_e}{I_S}$$

I_s = Sperrsättigungsstrom

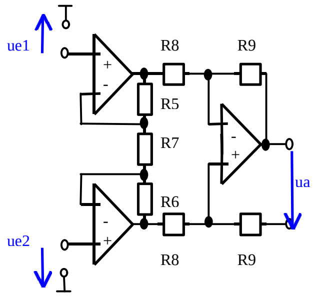
Potenzierer



$$u_a = -I_s \cdot R \cdot e^{U_e/U_T}$$

U_T = Temperaturspannung $u_T = 0{,}026V$

Subtrahierer mit dem Elektrometerverstärker



$$u_a = -\frac{R_9}{R_8} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot R_5}{R_7}\right) \cdot (u_{e1} - u_{e2})$$

zufällige Meßfehler

Grundgesamtheit n → ∞

Standardabweichung

$$s = +\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_w)^2}$$

Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Standardabweichung

$$s = +\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Erwartungswert
1. Ordnung

$$x_w = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_w)^2$$

bei Stichprobe n < ∞

Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Wahrscheinlichkeit

$$P(E) = \frac{e}{n}$$

P(E) = Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E
e = Anzahl der für E günstigen Fälle
n = Anzahl der möglichen , wahrscheinlichen Fälle
P(E) = 1 sicheres Ereignis
P(E) = 0 unsicheres Ereignis

Häufigkeitsverteilung

$$h(x_k, \Delta x_k) = \frac{\Delta n_k}{n_k}$$

Δn_k = Zahl der Werte in der Klasse
n = Gesamtzahl
x_k = Klassenmitte
Δx_k = Klassenweite

Anzahl der Klassen q

$$q = \sqrt{n}$$

$$\Delta x_k < \tfrac{1}{3} \cdot s$$

Häufigkeitsdichte

$$h'(x_k, \Delta x_k) = \frac{\Delta n_k}{n \cdot \Delta x_k}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung für n → ∞

$$\Delta P(x_k, \Delta x_k) = \lim_{n\to\infty} h(x_k, \Delta x_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta n_k}{n}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte für n → ∞

$$p(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \frac{\Delta n}{n \cdot \Delta x}$$

Summenhäufigkeit für n < ∞

$$H(x_k) = \sum_{n=1}^{k} k(x_n, \Delta x_n) = \sum_{n=1}^{k} \frac{\Delta n_n}{n}$$

Verteilungsfunktion für n → ∞

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x')dx'$$

Integral über gesamten Merkmalsbereich

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1}$$

Für Intervallbetrachtung

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

Normalverteilung (Gaußverteilung)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2p} \cdot s} \cdot e^{-\frac{(x-x_w)^2}{2 \cdot s^2}}$$

x_w = Mittelwert bei n → ∞

σ = Standardabweichung bei n → ∞

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2p} \cdot S} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2 \cdot S^2}}$$

Wahrscheinlichkeitspapier

Mittelwert bei 50% s zw. 16% und 50 %

S = Standardabweichung bei n < ∞

$\bar{x}$ = Mittelwert bei n < ∞

Wahrscheinlichkeit

bei Histogramm

$$w(G_{v1} \le x_i \le G_{v2}) = \sum_{G_{v1}}^{G_{v2}} \Delta P(x_k, \Delta x_k)$$

G_{v1}, G_{v2} = Vertrauensgrenz

bei stetiger Verteilung

$$P(G_{v1}, G_{v2}) = \int_{G_{v1}}^{G_{v2}} p(x)dx = P(G_{v2}) - P(G_{v1})$$

Normierung der Normalverteilung

$$u = \frac{x - \bar{x}}{S} \qquad p(u) = p(x) \cdot S = \frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Gauß´sches Fehlerintegral

$$P(u) = \int_{-\infty}^{u} p(u')du' = \frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{u'^2}{2}} du'$$

Vertrauensgrenzen bei der

bei Normierung mit :

$$w(G_{v1} \le x_i \le G_{v2}) = \frac{1}{\sqrt{2p} \cdot S} \cdot \int_{G_{v1}}^{G_{v2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^2}} dx \qquad u = \frac{x-\bar{x}}{S}$$

G_{v1} → -∞

G_{v2} = u

$$\Rightarrow P(u) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}u'^2} du'$$

nicht geschlossen integrierbar, deshalb tabelliert

$\boxed{P(-u) = 1 - P(u)}$

Vertrauensbereich für Mittelwerte

$$(\bar{x} - v) \le x_w \le (\bar{x} + v)$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{N}} \cdot S$$

N bzw n = Zahl der Meßwerte

c ist tabelliert

S = Standardabweichung

Kenngrößen aus der Verteilungsdichte

arithmetischer Mittelwert

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)dx$$

Quadratmittelwert

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x)dx$$

Streuung, Varianz

$$s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 \cdot p(x)dx$$

Effektivwert

$$X = \sqrt{\overline{x^2}}$$

Standardabweichung, Effektivwert des Wechselanteils

$$s = \sqrt{s^2}$$

Es gilt:

$$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Stochastische Signale

arithmetischer Mittelwert (Erwartungswert 1. Ordnung)

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

Quadratmittelwert (Erwartungswert 2. Ordnung)

$$\overline{x^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (x(t))^2 dt$$

Effektivwert (quadratischer Mittelwert)

$$x_{eff} = X = \sqrt{\overline{x^2}}$$

Varianz, Streuung

$$s^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (x(t) - \bar{x})^2 dt$$

Varianz, Streuung

$$s = \sqrt{s^2}$$

Es gilt:

$$\overline{x^2} = \bar{x}^2 + s^2$$

Amplitudenhäufigkeitsdichte

$$p(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ T\to\infty}} \frac{1}{\Delta x \cdot T} \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i$$

Es gilt:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1}$$

Autokorrelationsfunktion (AKF)

$$R_{xx}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \cdot x(t-t)dt$$

Eigenschaften:

1) $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$

2) $R_{xx}(\tau=0) \ge R_{xx}(\tau)$

für τ = 0 ⇒ $R_{xx}(0) = \overline{x^2}$

für τ → ∞ ⇒ $R_{xx}(\tau) = \overline{x(t)}^2$

3) ist x(t) ein stationäres stochastisches Signal, so strebt $R_{xx}(\tau)$ für unbegrenzt wachsendes τ den Wert $\bar{x}^2$ zu

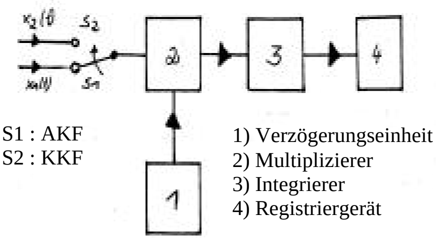
4) für jedes zeitlich begrenztes Signal verchwindet $R_{xx}(\tau)$, d.h. Endwert → 0

5) ist x(t) ein periodisches Signal, so ist auch $R_{xx}(\tau)$ periodisch

Kreuzkorrelationsfunktion (KKF)

$$R_{x1x2}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_1(t-t) \cdot x_2(t)dt$$

Blockschaltbild für die Messung der AKF und KKF

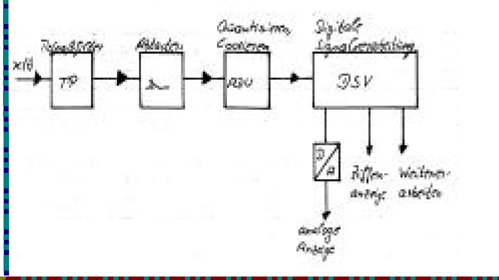


S1 : AKF

S2 : KKF

1) Verzögerungseinheit τ
2) Multiplizierer
3) Integrierer
4) Registriergerät

Blockschaltbild für die Digitalisierung



Abtasttheorem von Shanon $f_s > 2 \cdot f_{max}$

Richtwert in der Praxis $f_s \approx (5-20) \cdot f_{max}$

Quantisierungsfehler

$Q \equiv U_q \equiv U_{LSB}$ = Breite der Quantisierungsstufe

uM= Meßbereichsendwert

$$F_Q = \pm\frac{1}{2}U_q = \pm\frac{1}{2}Q$$

Quantisierungsrauschen

$$U_r = \frac{U_q}{\sqrt{12}} \qquad U_q = \frac{u_M}{2^n - 1}$$

Signal-Rausch-Abstand $S = n \cdot 6dB + 1{,}76dB$

Effektivwert bei sinusförmiger Vollaussteuerung bei n-Bit-Umsetzer

$$U_{sin} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^n \cdot U_q$$

Umsetzzeit bei U_e = sinusförmig

$$t_u < \frac{U_q}{\frac{du_e}{dt}} \qquad u_e = \hat{U}_e \cdot \sin(w \cdot t) \Rightarrow t_u < \frac{1}{2^n \cdot p \cdot f}$$

$$f_{max} < \frac{1}{2^n \cdot p \cdot t_u}$$

⇒ maximale Frequenz bei gegebenem t_u

Auflösung

$$Auflösung = \frac{1}{2^n}$$

$$Auflösung = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Spannungsdynamik

$$D = 20 \cdot \lg 2^n \cdot dB = n \cdot 6{,}02dB$$

Unipolare Umsetzer

$$D = 20 \cdot \lg 2^{n-1} \cdot dB = (n-1) \cdot 6{,}02dB$$

Bipolare Umsetzer

Sägezahnumsetzer

$$u_x = k_p \cdot \frac{x}{f_Q} = \frac{U_0}{R \cdot C} \cdot \frac{x}{f_Q}$$

f_Q = Impulsfrequenz

x = Anzahl der Impulse im Intervall Δt

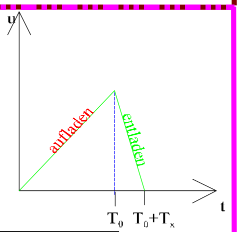
Zweirampenverfahre

Ladevorgang Entladevorgang

$$\frac{1}{RC} \int_{0}^{T_0} u_x dt = \frac{1}{RC} \int_{T_0}^{T_0+T_x} U_0 dt$$

$$u_x \cdot T_0 = U_0 \cdot T_x$$

$$u_x = \frac{U_0}{T_0} T_x$$



$$f_Q = \frac{U_0}{T_0 \cdot u}$$

u = Auflösung

bei Störspannung eliminieren durch

T_0 = feste Zeit

T_x wird durch Abzählen von Impulsen bestimmt

Bestimmung der Spannungswerte

a) Parallelumsetzer: 1) Berechnung U_q

2) Berechnung der Stufen $N = \frac{U}{U_q} \Rightarrow U_{mess} = N \cdot U_q$

b) inkrementaler Stufenumsetzer
1) Berechnung Uq
2) Berechnung N
3) Berechnung der maximalen Anzahl an Stufen in der Meßzeit

$$N_{max} = \frac{t}{T}$$

4) Vergleich von N und N_{max}:

$N > N_{max} \Rightarrow U_{mess} = N_{max} \cdot U_q$

$N < N_{max} \Rightarrow U_{mess} = N \cdot U_q$

c) inkrementaler Nachlaufumsetzer
1) Berechnung Uq
2) Berechnung N
3) Berechnung der maximalen Anzahl an Stufen in der Meßzeit

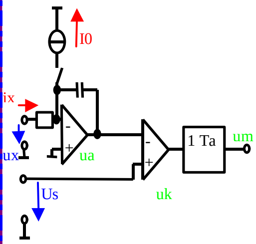
$$N_{max} = \frac{t}{T}$$

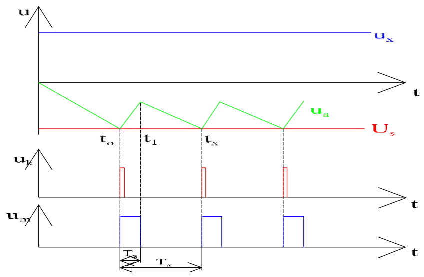
4) Berechnung der Stufen für die vorhergehende Spannung N_{vorher}
5) $N_{eff} = N - N_{vorher}$
6) Vergleich von N_{eff} und N_{max}:

$N_{eff} > N_{max} \Rightarrow U_{mess} = (N_{max} + N_{vorher}) \cdot U_q$

$N_{eff} < N_{max} \Rightarrow U_{mess} = (N_{eff} + N_{vorher}) \cdot U_q$

Ladungsbilanzumsetzer





von t_0 bis t_1 ist S geschlossen, Kondensator führt den Strom (i_x-I_0)

$$u_a(t_1) = U_s - \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_1}(i_x - I_0)dt = U_s + \frac{1}{C}(I_0 - \overline{i_x})(t_1 - t_0) \qquad \overline{i_x} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} i_x dt$$

nach $T_a = (t_1 - t_0)$ S geöffnet, C führt i_x

$$\boxed{u_a(t_0) = u_a(t_x) = U_s}$$

$$u_a(t_x) = U_s = u_a(t_1) - \frac{1}{C}\int_{t_1}^{t_x} i_x dt = u_a(t_1) - \frac{1}{C}\overline{i_x}(t_x - t_1)$$

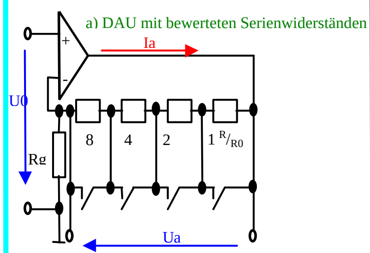
$$U_s = U_s + \frac{1}{C}(I_0 - \overline{i_x})(t_1 - t_0) - \frac{1}{C}\overline{i_x}(t_x - t_1) \qquad (t_x - t_0) = T_x = \frac{I_0 \cdot T_a}{\overline{i_x}}$$

$$\Rightarrow (I_0 - \overline{i_x})(t_1 - t_0) = \overline{i_x}(t_x - t_1) \qquad \text{mit } \overline{i_x} = \frac{u_x}{R} \quad \Rightarrow f_x = \frac{u_x}{R \cdot I_0 \cdot T_a}$$

abgeführte Ladung = zugeführte Ladung

Digital-Analog-Umsetzer DAU

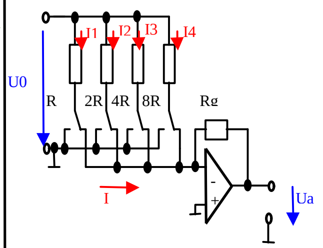
a) DAU mit bewerteten Serienwiderständen



$$I_a = U_0 \cdot k_g = \frac{U_0}{R_g} \qquad U_a = I_a \cdot \sum_i a_i \cdot R_i$$

S offen $\Rightarrow a_i = 1$
S geschlossen $\Rightarrow a_i = 0$

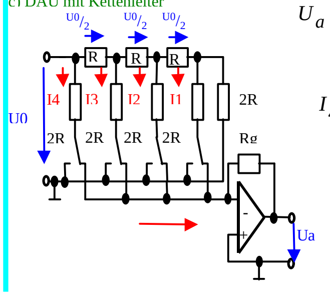
b) DAU mit bewerteten Parallelwiderständen



$$U_a = -R_g \cdot \sum_i a_i \cdot \frac{U_0}{R_i}$$

S zu OP-Eing $\Rightarrow a_i = 1$
S zu Masse $\Rightarrow a_i = 0$

c) DAU mit Kettenleiter



$$U_a = -R_g \sum_i a_i \cdot I_i$$

S zu OP-Eing $\Rightarrow a_i = 1$
S zu Masse $\Rightarrow a_i = 0$

$$I_4 = \frac{U_0}{2R} \qquad I_3 = \frac{U_0}{4R} \qquad I_2 = \frac{U_0}{8R} \qquad I_1 = \frac{U_0}{16R}$$

Wenn R_g = R, Z = Binärzahl durch Schalterstellung definiert, Z_{max} = maximal darstellbare Binärzahl

$$\Rightarrow U_a = -U_0 \cdot \frac{Z}{(Z_{max} + 1)}$$

Messung von Frequenz und Periodendauer

T_m = Meßzeit
n_Z = Anzahl der Impulse

Frequenz	Periodendauer	Zeitmessung
$f_x = \frac{n_Z}{T_m}$	$T_x = \frac{n_Z}{f_0}$	$T_x = \frac{n_Z}{f_0}$

bei fx < f0 ist Periodendauer-messung günstiger, erfordert

Widerstandstemperaturfühler

Empfindlichkeit $E = a \cdot R_0$

Dehnungsmeßstreifen DMS

mit $m = \frac{\Delta D / D}{\Delta l / l} \qquad e = \frac{\Delta l}{l}$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{r} \cdot \Delta r + \frac{1}{l} \cdot \Delta l - \frac{2}{D} \cdot \Delta D \qquad \frac{\Delta R / R}{\Delta l / l} = K = 1 + 2m + \frac{\Delta r / r}{\Delta l / l}$$

bei Metall-DMS

$\frac{\Delta r}{r} = 0$ K=1+2µ µ liegt zwischen 0,2 und 0,5 $\frac{\Delta R}{R_{max}} = K \cdot e = 2 \cdot e$

zu Ladungsbilanzumsetzer

wird auch als Dual Slope bezeichnet

N = registrierte Impulse im Zähler

$N_1 = F_Q \cdot T_0$
$N_2 = F_Q \cdot T_x$

Vorteile gegenüber Sägezahnumsetzer:
- zeitlicher Mittelwert
- unabhängig von R und C

$$U_x = U_{ref} \cdot \frac{T_x}{T_0} = U_{ref} \cdot \frac{N_2}{N_1}$$