

Rahmenskript zur Vorlesung

# ***Regelungstechnik***

Prof. Dr. Karl

NT 5 / ME 5 / FG 7

**2. verbesserte und erweiterte Version Juni 1999**

\*\*\* Unter Mitarbeit von Christian Beer \*\*\*

**3. verbesserte und erweiterte Version September 2001**

\*\*\* Unter Mitarbeit von Oliver Albert \*\*\*

# **Vorwort**

## **Literatur**

### **1. Einführung**

- 1.1. Die Grundbegriffe Steuerung und Regelung am Beispiel einer Radarspiegelpositionierung
  - 1.1.1. Lösung des Ausgangsproblems mit Hilfe einer Steuerung
  - 1.1.2. Lösung des Ausgangsproblems durch Regelung
  - 1.1.3. Wirkplan / Signalflußplan
  - 1.1.4. Sonderformen
    - 1.1.4.1. Kaskadenregelung
    - 1.1.4.2. Mehrpunktregelung
    - 1.1.4.3. Störgrößenaufschaltung
    - 1.1.4.4. Digitalregelung
  - 1.1.5. Eine Zwischenbemerkung zum „Minus im Regelkreis“
- 1.2. Die Grundbegriffe der Regelungstechnik im Allgemeinen
  - 1.2.1. Das Steuern
  - 1.2.2. Das Regeln
- 1.3. Bisherige Betrachtungen: Was will die Regelungstechnik?
- 1.4. Aufgaben zum 1. Kapitel
- 1.5. Lösung der Aufgaben zum 1. Kapitel

### **2. Mathematische Modellbildung, Strukturbilder, Zustandsvariable**

- 2.1. Betrachtungen zur Regelstrecke (Einführungsbeispiel)
- 2.2. Zum Begriff: Zustandsvariable (state variable)
- 2.3. Mathematische Modellierung des Gesamtsystems:  
Regelstrecke + Regeleinrichtung
- 2.4. Bearbeitung von mathematischen Modellen durch Simulation
  - 2.4.1. Das EULER'sche Polygonzugverfahren
  - 2.4.2. Professionelle Simulationssprachen
- 2.5. Weitere Modellverfeinerungen
  - 2.5.1. Berücksichtigung des Getriebes
  - 2.5.2. Berücksichtigung der Wellenelastizität
- 2.6. Simulationsergebnisse für das Einführungsbeispiels auf der Grundlage des „einfachsten Modells“.
- 2.7. Erste Folgerungen und Verbesserungsvorschläge für den betrachteten Regelkreis anhand der Simulationsergebnisse
  - 2.7.1. Erste Folgerungen
  - 2.7.2. Verbesserungsvorschläge

- 2.8. Reglereinstellung (-parametrierung) nach ZIEGLER und NICHOLS
- 2.9. Reglereinstellung nach CHIEN-HRONES und RESWICK
  - 2.9.1 Nichtschwingungsfähiges Übergangsverhalten der Regelstrecke, wobei die Sprungantwort in einen festen Endwert mündet.
  - 2.9.2 Übergangsverhalten der Regelstrecke, das sich bei Stellgrößensprüngen einem rampenähnlichen Verlauf angleicht („Strecke ohne Ausgleich“)
- 2.10. Parametrierung von PID-Algorithmen nach Takahashi
- 2.11. Aufgaben zum 2. Kapitel
- 2.12. Lösung der Aufgaben zum 2. Kapitel

### **3. Systemtheoretische Aspekte**

- 3.1. Regeln für die Laplace-Transformation
- 3.2. Übertragungsfunktionen, Gewichtsfunktionen, Übergangsfunktion
- 3.3. Anmerkungen zu Übertragungsfunktionen / Gewichtsfunktionen
  - 3.3.1. Grundlagen
  - 3.3.2. Beispiele für Partialbruchentwicklungen, graphische Residuenbestimmungen und für den Einfluß von „langsamen“ und „schnellen“ Polen
- 3.4. Bestimmung der Übertragungsfunktion  $G(s)$  aus dem Strukturbild
  - 3.4.1 Anwendung auf das Einführungsbeispiel
  - 3.4.2 Nochmalige Berechnung von  $G_w(s)$  unter Verwendung von praktisch gebräuchlichen Kenngrößen
  - 3.4.3 Schlußbemerkungen
- 3.5. Anmerkungen zum Steuerungsproblem
- 3.6. Zur schaltungstechnischen Realisierung von Übertragungsfunktionen (bzw. von Frequenzgängen = Systemfktn.)
- 3.7. Weitere Beispiele
- 3.8. Das Wurzelortsverfahren
  - 3.8.1 Die K-Normalform
  - 3.8.2 Die Ausgangsgleichungen für das Wurzelortsverfahren
  - 3.8.3 Wichtige Konstruktionsregeln für das Zeichnen der WOK's
  - 3.8.4 Rechenbeispiele zur Reglersynthese mit dem Wurzelortsverfahren
  - 3.8.5 Vorgabe von Dominanzgebieten
- 3.9 Aufgaben zum 3. Kapitel
- 3.10 Lösung der Aufgaben zum 3. Kapitel

## 4. Zeitdiskrete Regelungen (Digitalregelungen)

- 4.1. Aufgabenstellung
- 4.2. Beispiele für zeitdiskrete Systeme und deren mathematische Beschreibung
  - 4.2.1 Schaltwerke und Algorithmen
  - 4.2.2 Analoge Regelstrecken die mit AD und DA-Wandlern beaufschlagt sind und so zu zeitdiskreten Systemen werden.
  - 4.2.3 Weitere zeitdiskrete Systeme die ein ursprünglich analoges Filter bzw. einen ursprünglich analogen Regler nachbilden.
  - 4.2.4 Was bleibt uns im nichtlinearen Fall ?
- 4.3. Definition und Eigenschaften der z-Transformation von Folgen
- 4.4. Anwendung der z-Transformation von Folgen auf lineare, zeitdiskrete Systeme
  - 4.4.1 Bezugnahme auf 4.2.1: Schaltwerke und Algorithmen
  - 4.4.2 Bezugnahme auf 4.2.2: Analoge Regelstrecken die mit AD und DA-Wandlern beaufschlagt sind und so zu zeitdiskreten Systemen werden.
  - 4.4.3 Bezugnahme auf 4.2.3: Angabe der z-Übertragungsfunktion von weiteren zeitdiskreten Systemen die ein ursprüngliches analoges Filter ... nachbilden.
- 4.5. Anwendung der z-Transformation von Folgen speziell auf zeitdiskrete Regelungssysteme
  - 4.5.1 Beispiel
  - 4.5.2 Weitere Korrespondenzen
- 4.6. Systemtheoretische Ergänzungen zum Thema: Zeitdiskrete Regelstrecken
- 4.7. Zur Stabilität von zeitdiskreten Systemen
  - 4.7.1 Grundlagen
  - 4.7.2 Zusammenhang: Polstellenverteilung i.d. komplexen z-Ebene  $\Leftrightarrow$  Sprungantwort
- 4.8. Zur Synthese von Regelsystemen mit dem WOK-Verfahren.
  - 4.8.1 Beispiel
- 4.9. Genauigkeitsfragen I: Der Einfluß der endlichen Abtastzeit.
  - 4.9.1 Bezugnahme auf das Rechenbeispiel von 4.2.3
  - 4.9.2 Rechenaufgabe
- 4.10. Genauigkeitsfragen II: Endliche Abtastzeiten /Mantissenlängen
  - 4.10.1 Die Abbildungseigenschaft der (komplexen) e-Funktion
  - 4.10.2 Beispiele hierzu



- 4.11. Die Deltatransformation von Folgen und verwandte Transformationen
- 4.12. Aufgaben zum 4. Kapitel
- 4.13. Lösung der Aufgaben zum 4. Kapitel

## **5. Frequenzgangdarstellung; BODE-Diagramm**

- 5.1. Herleitung des BODE-Diagramms anhand eines Beispiels
- 5.2. Skizzieren der Ortskurve des Frequenzgangs mit Unterstützung des BODE-Diagramms
- 5.3. Kürzen von Polstellen durch Nullstellen
- 5.4. Weitere Anmerkungen zum Rechnen mit „dB“
- 5.5. Nochmals: Entwurf eines Notchfilters
- 5.6. Anlagen

## **6. Reglerentwurf;**

### **Betrachtungen am geschlossenen Regelkreis**

- 6.1. Regelungen mit einem und zwei Freiheitsgraden
- 6.2. Regelfehler und die Stabilität von Regelkreisen
  - 6.2.1 Regelfehler
  - 6.2.2 Die Stabilität in Regelkreisen
- 6.3. Zusammenstellung wichtiger Regelkreisglieder
  - 6.3.1. Das P-Glied
  - 6.3.2. Das I-Glied
  - 6.3.3. Das D-Glied
  - 6.3.4. Das Totzeitglied
  - 6.3.5. Das PI-Glied (der PI-Regler)
  - 6.3.6. Das PD-Glied (der PD-Regler)
  - 6.3.7. Das PID-Glied (der PID-Regler)
  - 6.3.8. Das PID-T1-Glied (der PID-T1-Regler)
  - 6.3.9. Das PT1-Glied (Verzögerungsglied 1. Ordnung)
  - 6.3.10. Das PT2-Glied (Verzögerungsglied 2. Ordnung)
    - 6.3.10.1 Das nichtschwingungsfähige PT2-Glied
    - 6.3.10.2 Das schwingungsfähige PT2-Glied
  - 6.3.11. Das schwingungsfähige PT2-Glied, dargestellt durch I-Glied und PT1-Glied
- 6.4. Formulierung der allgemeinen Forderungen an einen Regelkreis durch Frequenzgänge
- 6.5. Reglereinstellung nach dem Betragsoptimum
- 6.6. Das Symmetrische Optimum

## **7. Reglersynthese mittels FKL-Verfahren**

7.1 Der Grundgedanke dieses Syntheseverfahrens

7.2 Der Einsatz von Lead- und Lag-Kompensatoren.

7.2.1 Lokale Phasenhebung mit dem LEAD-Glied: ( $=$  PD- $T_1$ -Glied)

7.2.2 Bertagskorrektur durch LAG-Glied

## **8. Ein Verfahren zur algebraischen Formulierung von Frequenzkennlinienmethoden**

8.1 Vorbemerkungen

8.2 Einführung

8.3 Ableitung der algebraischen Formulierung einer Frequenzkennliniendarstellung

8.4 Die Synthese von robusten Kompensatoren

8.5 Ein Beispiel

8.6 Ausblick

## **Vorwort**

*„Die einzige Person, die ich jemals durch meine Arbeiten zu erfreuen suchte, bin ich selber.“  
Cecil Scott Forester*

Das vorliegende Skript entstand im Laufe mehrerer Semester in denen ich an der FH-Nürnberg die Vorlesung „Regelungstechnik“ für Studenten der Studienschwerpunkte NT, ME und DT sowie FT gehalten habe. Für die erstgenannten Studienschwerpunkte standen 4 SWS, für den Studienschwerpunkt FT standen 6 SWS zur Verfügung.

Das Skript geht also über den Inhalt der Vorlesung für die ersten drei SSP hinaus. Der Stoff ist nicht zu fachspezifisch ausgelegt. Der Schwerpunkt liegt vielmehr auf den Grundlagen. Aus Zeitgründen konnten die Zustandsraummethoden nur gestreift werden. Das 7. Kapitel liegt in der vorliegenden Form rudimentär vor; hier müssen sich die Teilnehmer meiner Vorlesung noch auf einen ausführlichen Tafelvortrag gefaßt machen.

In der vorliegenden Form ist das Skript mit Word 97 geschrieben.

Sicher enthält das vorliegende Skript noch Fehler. Deshalb wende ich mich an alle Leser - insbesondere an meine Studenten - mit der Bitte, mich darauf aufmerksam zu machen. Dieses Skript ist noch nicht endgültig abgeschlossen. Es gilt vielmehr das, was Georg Christoph Lichtenberg einmal sagte:

*„Letzte Hand an sein Werk legen heißt: Es verbrennen.“*

## **Literatur**

Es gibt eine unüberschaubar große Menge an regelungstechnischer Literatur. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit wird empfohlen:

- [1] Lutz, Wendt: „Taschenbuch der Regelungstechnik“ Verlag Harry Deutsch
  - [2] Föllinger, O.: „Regelungstechnik“ Hüthig Verlag
  - [3] Landgraf, Schneider: „Elemente der Regelungstechnik“ Springer Verlag
  - [4] Unbehauen, H.: „Regelungstechnik. Band I-III“ Vieweg Verlag Braunschwg.
  - [5] Jörgl, H.P.: „Repetitorium Regelungstechnik, Band 1“ Oldenbourg Verlag
  - [6] D’Azzo, Houpis: „Feedback Control Systems. Analysis and Design“ McGraw  
Hill Book Company
  - [6] Horowitz, I.: „Synthesis of Feedback Systems“ Academic Press
- Das letztgenannte Buch von Horowitz ist ein zeitloser Hit.  
Aber sehr schwer zu lesen.
- [7] Störig, H.J.: „Kleine Weltgeschichte der Philosophie“ Bde. I und II  
Fischer Bücherei

# 1. Einführung

„So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endet mit Ideen“ I. Kant, Kritik der reinen Vernunft, Elementarlehre T.2. Abt.2

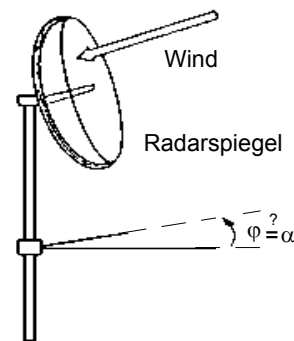
## 1.1 Die Grundbegriffe Steuerung und Regelung

### am Beispiel einer Radarspiegelpositionierung

Die nachfolgenden Grundbegriffe sind in der DIN 19226 (DIN 19225) Regelungs- und Steuerungstechnik definiert.

#### Ausgangsproblem:

Ein „Radarspiegelwinkel“  $\varphi = \varphi(t)$  soll möglichst unverzüglich einem „Sollwinkel“  $\alpha = \alpha(t)$  - dieser werde an einem Handrad beliebig verändert - folgen.  
Und zwar möglichst unabhängig vom störenden Windmoment  $m_W(t)$ .



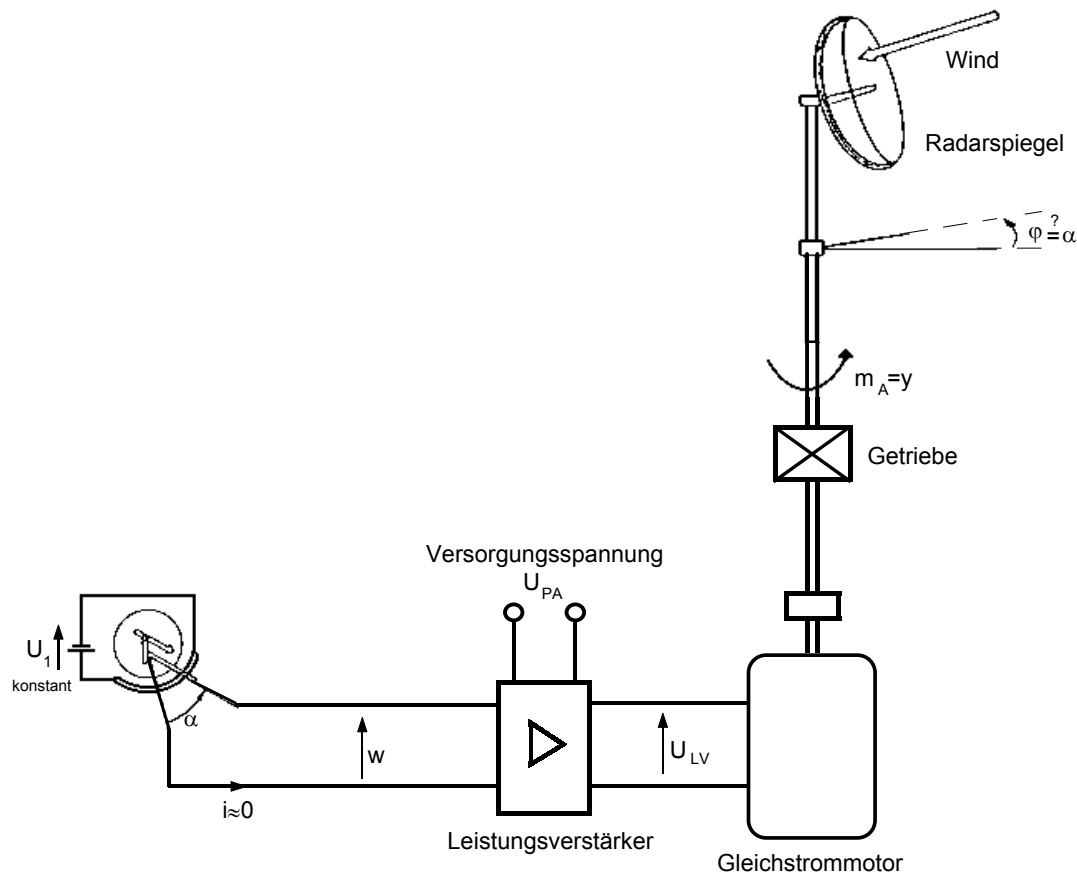
**Bild 1.1:** Ausgangsproblem:  
Der Radarspiegel soll dem Winkel  $\alpha$  möglichst unverzüglich folgen

Das Ausgangsproblem beinhaltet das *Folgeproblem* (später sprechen wir dann von einer Folgeregelung) und das *Festwertproblem* (später sprechen wir von Festwertregelung).

Beim Folgeproblem besteht die Hauptaufgabe darin, den „Istwinkel“  $\varphi(t)$  dem „Sollwinkel“  $\alpha(t)$  nachzuführen. Dabei sollte möglichst  $\varphi(t) = \alpha(t)$  gelten. Beim Festwertproblem liegt der „Sollwinkel“  $\alpha(t)$  fest vor (er wird höchstens in größeren Zeitabständen verändert) und die Hauptaufgabe besteht darin, den Einfluß der Störungen zu unterdrücken.

### 1.1.1 Lösung des Ausgangsproblems mit Hilfe einer Steuerung

Der Lösungsgedanke erklärt sich durch die gerätetechnische Darstellung im Bild 1.2



**Bild 1.2:** Gerätetechnische Darstellung zur „Lösung“ mit Hilfe der Steuerung

$\alpha$  = Sollwert (setpoint);  $\varphi$  = Istwert - bei uns Abk.: „ $v$ “ (nach DIN „ $x$ “, international „ $y$ “)

$\alpha \mapsto w$ ; hier  $w(t) = \alpha(t) \cdot \left( \frac{U_1}{\alpha_m} \right)$  (falls das Potentiometer unbelastet ist)

$w$  = Führungsgröße - bei DIN mit „ $w$ “ abgekürzt (reference variable, international „ $r$ “)

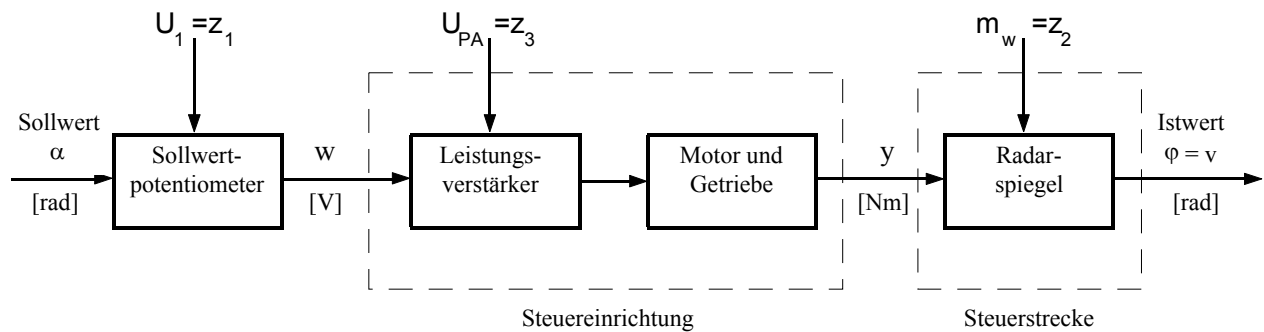
Man nennt die gerätetechnische Anordnung Leistungsverstärker - Gleichstrommotor - Getriebe auch *Stelleinrichtung*. Die Ausgangsgröße der Stelleinrichtung ist

$m_A$  = die *Stellgröße* - bei DIN mit „ $y$ “ abgekürzt (manipulated variable, international „ $u$ “).

Den Radarspiegel repräsentiert durch seine träge Masse, nennt man die *Steuerstrecke* (plant).

Das Windmoment  $m_W$  = *Störgröße* - bei DIN mit „ $z$ “ abgekürzt (disturbance, international „ $d$ “).

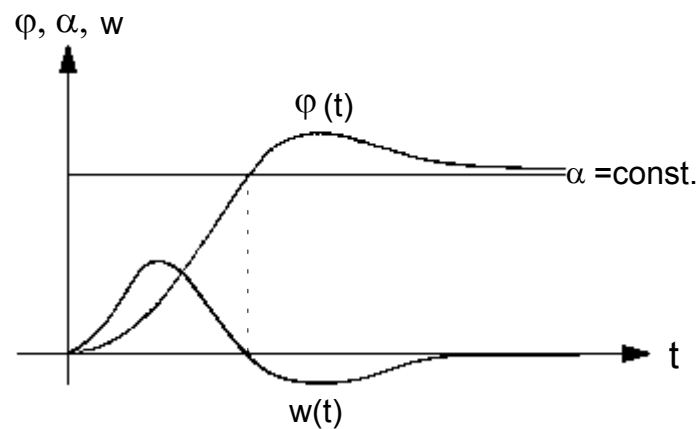
Der wirkungsmäßige Zusammenhang wird durch den *Wirkplan* (Signalflußplan) dargestellt.



**Bild 1.3:** Wirkplan zu Bild 1.2. Neben der bereits erwähnten Störgröße  $m_w = z_2$  sind noch weitere Störgrößen eingezeichnet.

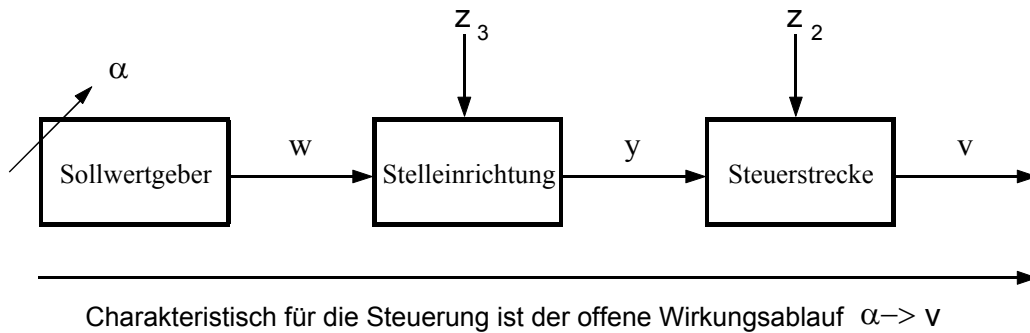
Korrektur der gesamten Anordnung:

Die Betrachtung der Bilder 1.2 bzw. 1.3 lehrt, daß eine solchermaßen realisierte „Lösung“ noch nicht funktioniert. Ein einmal eingestellter Sollwinkel  $\alpha$  wird in eine konstante Führungsgröße  $w$  abgebildet und der Antriebsmotor läuft nach Anfahren mit konstanter Drehzahl. Der Radarspiegelwinkel „dreht durch“. Damit nach hinreichend langer Zeit ( $m_w=0$ ) immer gilt  $\varphi = \alpha$  muß  $w(t)$  wesentlich „komplizierter“ aussehen. Man vergleiche Bild 1.4.



**Bild 1.4:** Verlauf von  $w(t)$ ,  $\varphi(t)$  und  $\alpha$  bei einer Steuerung  $w(t)$  ist aus einem Sollwertgeber abgeleitet in den man  $\alpha$  eingibt.

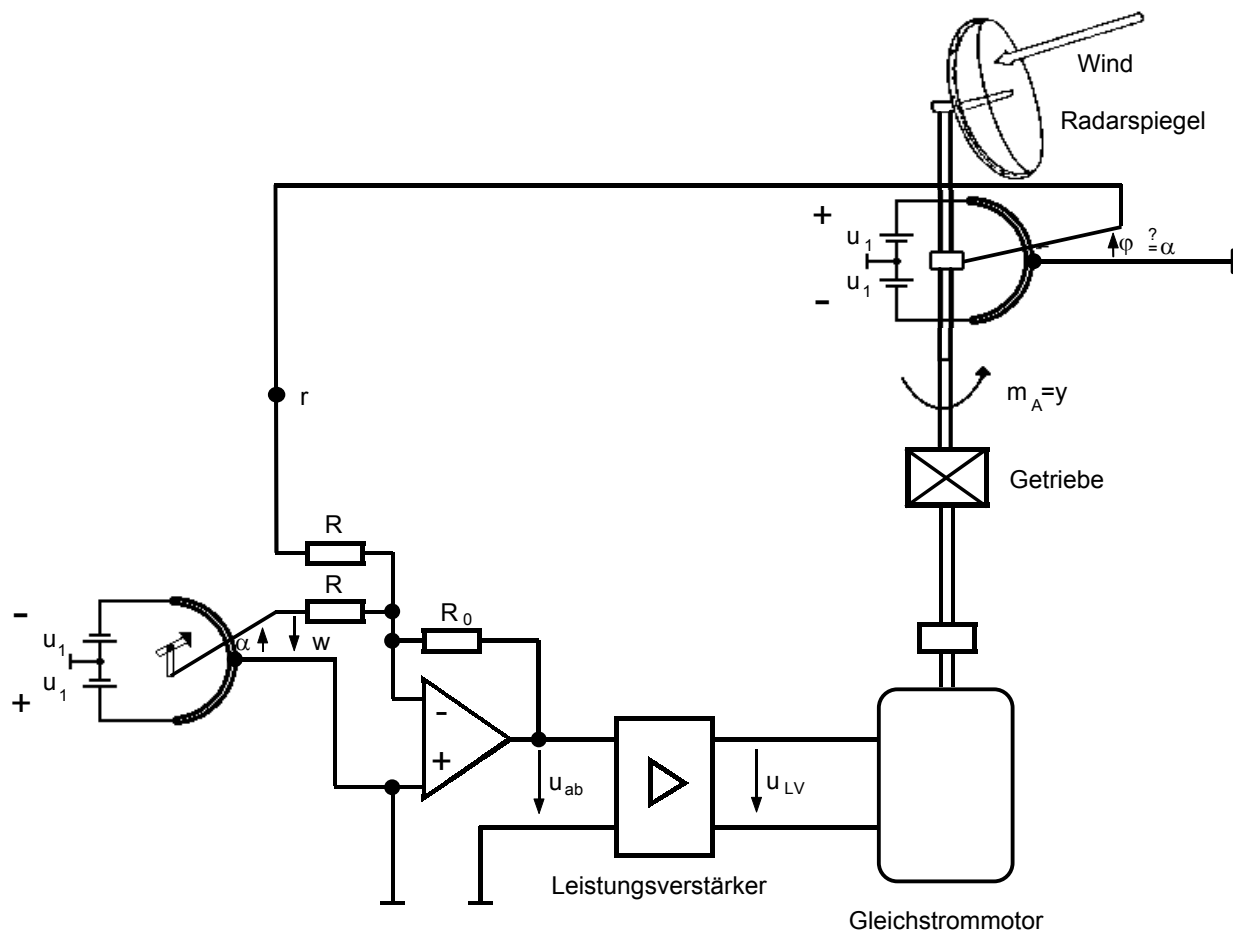
Der Wirkplan ist damit wie folgt abzuändern:



**Bild 1.5:** Abgeänderter Wirkplan zu Bild 1.3. Der Sollwertgeber generiert aus einem eingegebenen  $\alpha = \text{const.}$  einen Sollwertverlauf ähnlich wie Bild 1.4

### 1.1.2 Lösung des Ausgangsproblems durch Regelung

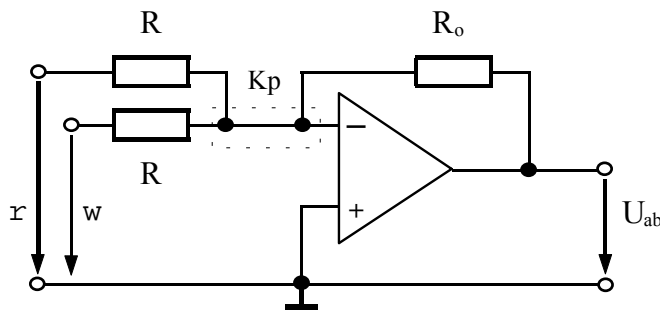
Auch hier erklärt sich der Lösungsgedanke durch die gerätetechnische Darstellung im Bild 1.6



**Bild 1.6:** Gerätetechnische Darstellung zur Lösung durch Regelung



Ein Bestandteil dieser Lösung ist der Operationsverstärker:



Im Knotenpunkt „Kp“ gilt  
(unter idealisierenden Annahmen):

$$\frac{r}{R} + \frac{w}{R} + \frac{u_{ab}}{R_0} = 0$$

$$u_{ab} = -\frac{R_0}{R} \cdot (r + w)$$

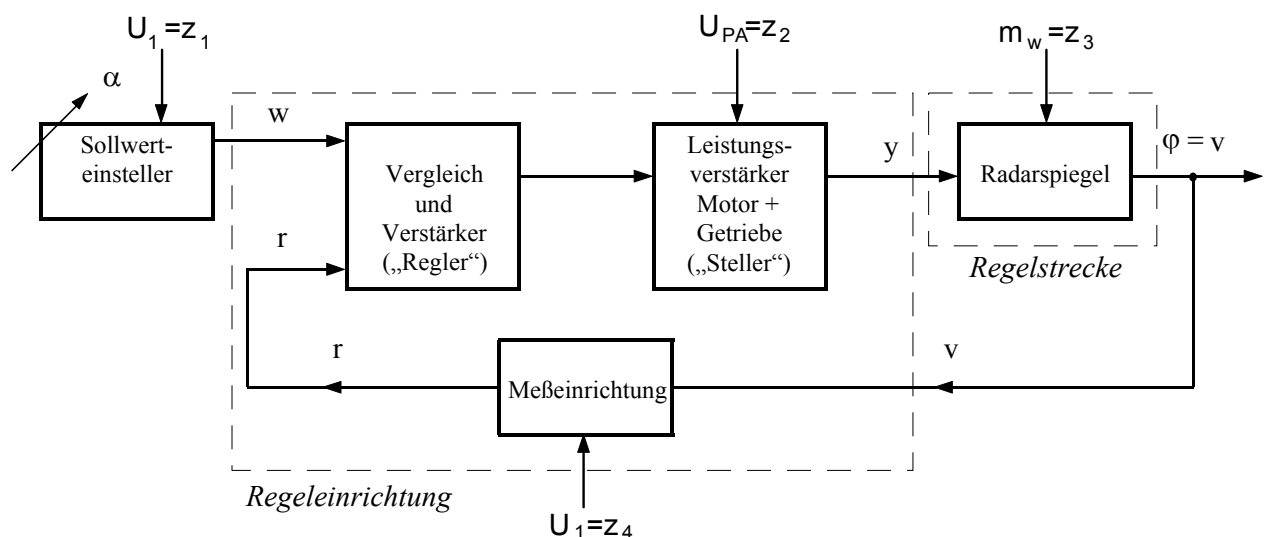
Mit  $r = U_1 \cdot \frac{\varphi}{\varphi_m} = \left(\frac{U_1}{\alpha_m}\right) \cdot \varphi$ ;  $w = -U_1 \cdot \frac{\alpha}{\alpha_m} = -\left(\frac{U_1}{\alpha_m}\right) \cdot \alpha \Rightarrow u_{ab} = \left(\frac{R_0 \cdot U_1}{R \cdot \alpha_m}\right) \cdot (\alpha - \varphi)$

Am Ausgang des Operationsverstärkers finden wir eine Spannung  $u_{ab}$ , die der *Differenz aus Sollwert und Istwert* proportional ist



Tatsächlich ist auch der OP für ( sich alleine ) schon ein Regelsystem. Infolge der oben erwähnten „idealisierenden Annahmen“ merkt man dies bei der Herleitung der Formel  $u_{ab} = f(\alpha, \varphi)$  gar nicht und der Rechengang ist insgesamt recht einfach. Wir werden in Kapitel 7 auch auf das „Innenleben“ des OP's eingehen und die Beziehung  $u_{ab} = f(\alpha, \varphi)$  für den realen OP verfeinern.

### 1.1.3 Wirkplan / Signalflußplan zu Abschnitt 1.1.2



$v$  = Regelgröße;  $r$  = gemessene Regelgröße  
die anderen Bezeichnungen wie bei 1.1.1.

**Bild 1.7:** Wirkplan zu Bild 1.6

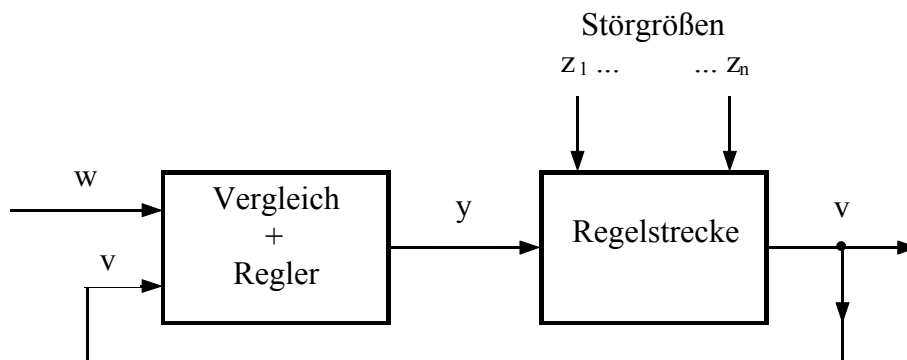
Im Sinne des hier vorgestellten Einführungsbeispiels definiert auch DIN 19226 den Begriff „regeln“.

**Das Regeln, die Regelung, ist ein Vorgang, bei dem eine Größe, die zu regelnde Größe (*Regelgröße*), fortlaufend erfaßt, mit einer anderen Größe, der *Führungsgröße*, verglichen und im Sinne einer Angleichung der Führungsgröße beeinflusst wird.**

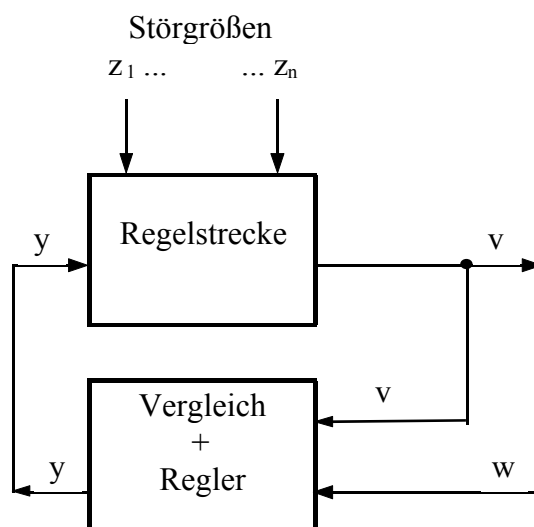
**Kennzeichen für das Regeln ist der geschlossene Wirkungsablauf, bei dem die Regelgröße im Wirkungsweg des Regelkreises fortlaufend sich selbst beeinflusst.**

### Vereinfachte Strukturen von Wirkplänen:

*Darstellung 1:*



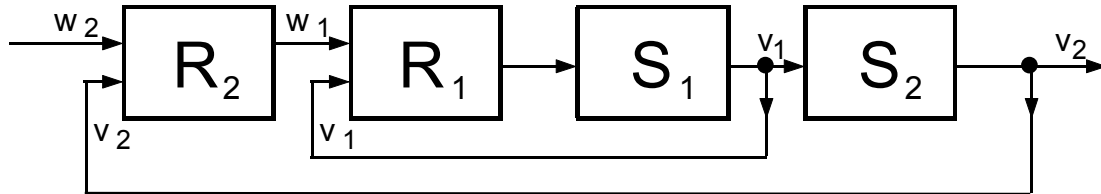
*Darstellung 2:*



### 1.1.4 Sonderformen einer Regelung

#### 1.1.4.1 Kaskadenregelung

Hier bildet die Ausgangsgröße eines Reglers die Führungsgröße eines oder mehrerer unterlagerter Regelkreise. (R bezeichnet die Regler, S die Strecken)



**Bild 1.8:** Kaskadenregelung

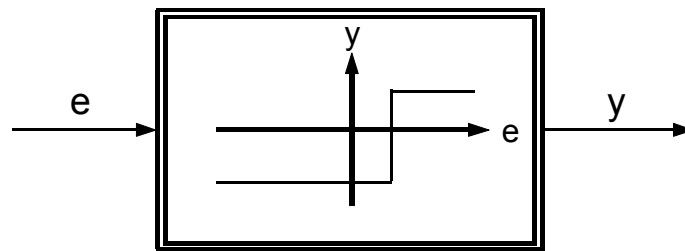
#### 1.1.4.2 Mehrpunktregelung

Hier kann die Stellgröße nur endlich viele verschiedene Werte annehmen.

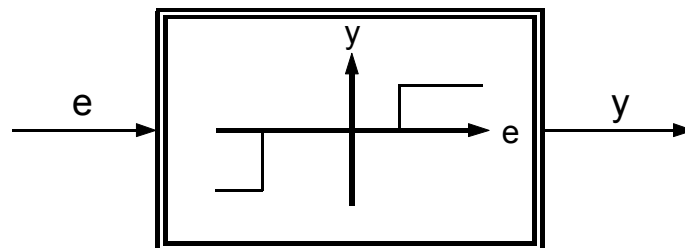
Z.B. „Zweipunktregler“, „Dreipunktregler“, usw.

Diese Regler werden durch ihre Kennlinien charakterisiert.

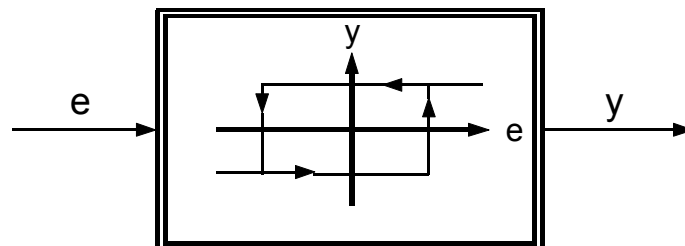
Hierzu einige Beispiele:



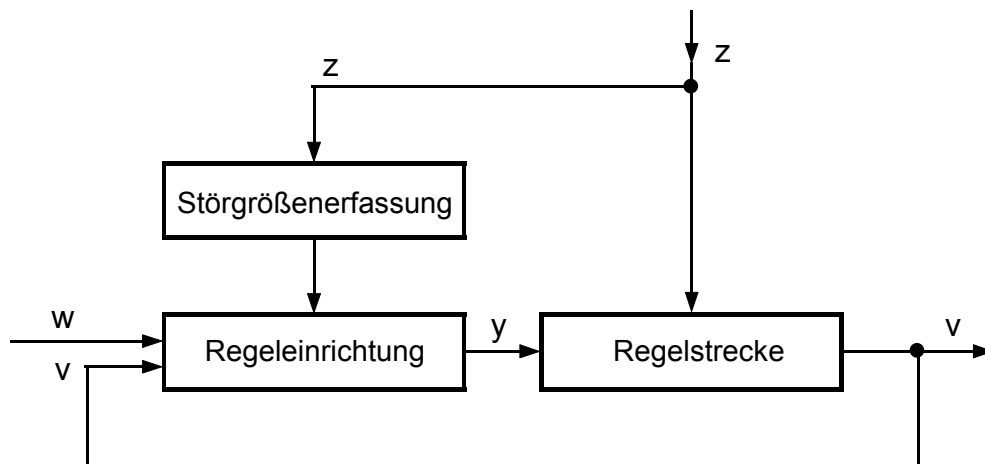
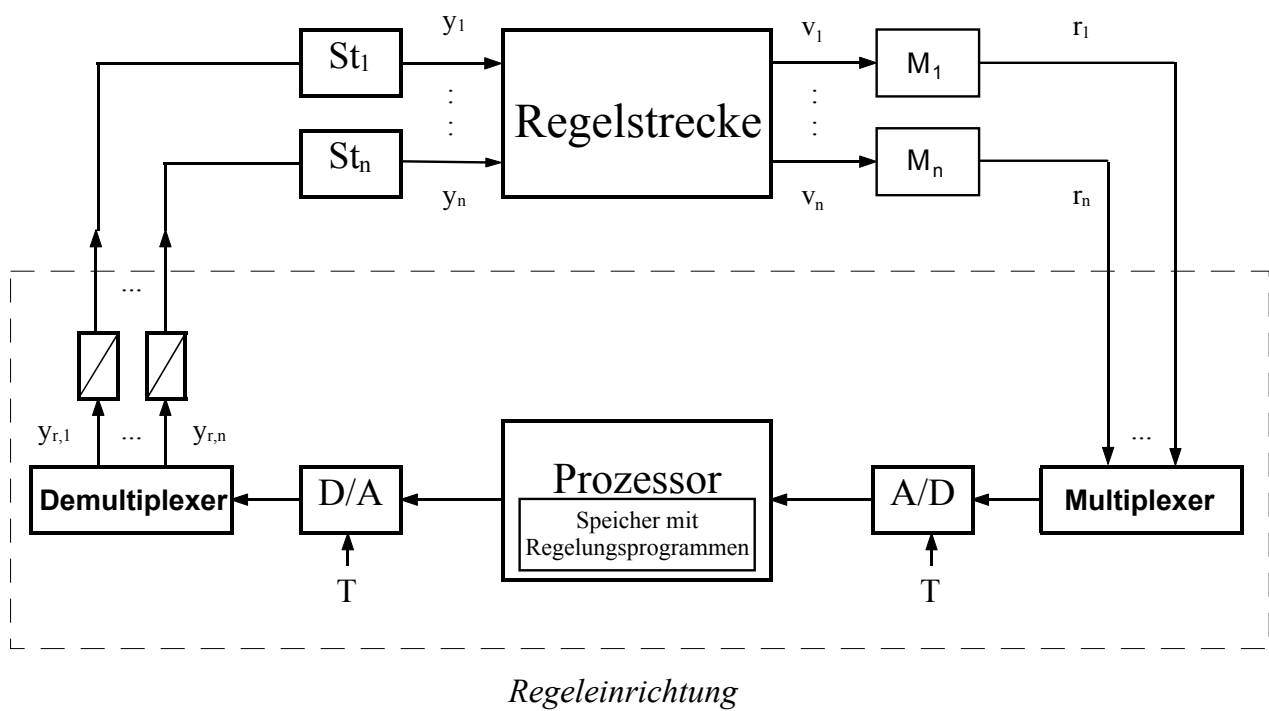
**Bild 1.9a:** Zweipunktregler



**Bild 1.9b:** Dreipunktregler



**Bild 1.9c:** Zweipunktregler mit Hysterese

**1.1.4.3 Störgrößenaufschaltung****Bild 1.10:** Störgrößenaufschaltung**1.1.4.4 Digitalregelung****Bild 1.11:** Wirkplan zu einer Digitalregelung

### 1.1.5 Eine Zwischenbemerkung zum „Minus im Regelkreis“

Die bisherigen Darstellungen hatten schon gezeigt, daß eine eindeutige Unterteilung eines Regelkreises in Regelstrecke und Regeleinrichtung nicht möglich ist. So zeigt z.B. Bild 1.7 nur eine mögliche Einteilung eines Regelkreises in Regeleinrichtung und Regelstrecke. Es wäre selbstverständlich zulässig, Motor und Getriebe zur Regelstrecke zu rechnen. In diesem Fall wäre der Ausgang des Leistungsverstärkers „ $u_{ab}$ “ die Stellgröße.

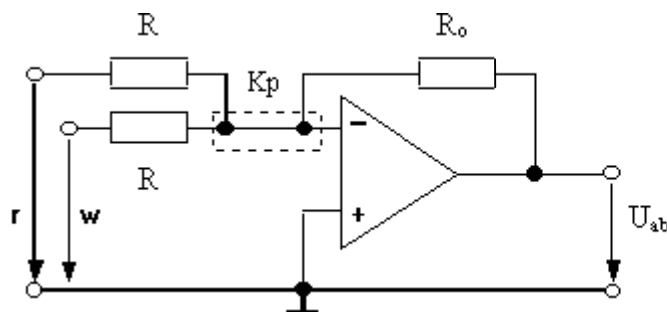
**Ein Element muß die Regeleinrichtung in jedem Falle besitzen: den Vergleich.**

In 1.1.2 findet der Vergleich von Führungsgröße und ( gemessener ) Regelgröße am Operationsverstärker statt.

Es gibt noch viele andere Realisierungen des Vergleichs von Führungsgröße und Regelgröße. Nicht immer muß der Vergleich durch eine elektrische Schaltung realisiert sein (vgl. Übungsaufgaben); trotzdem wollen wir aber darauf das Hauptaugenmerk richten.

Wir beginnen noch einmal mit der bereits bekannten Schaltung

#### U/U - Verstärker mit internem Stromvergleich



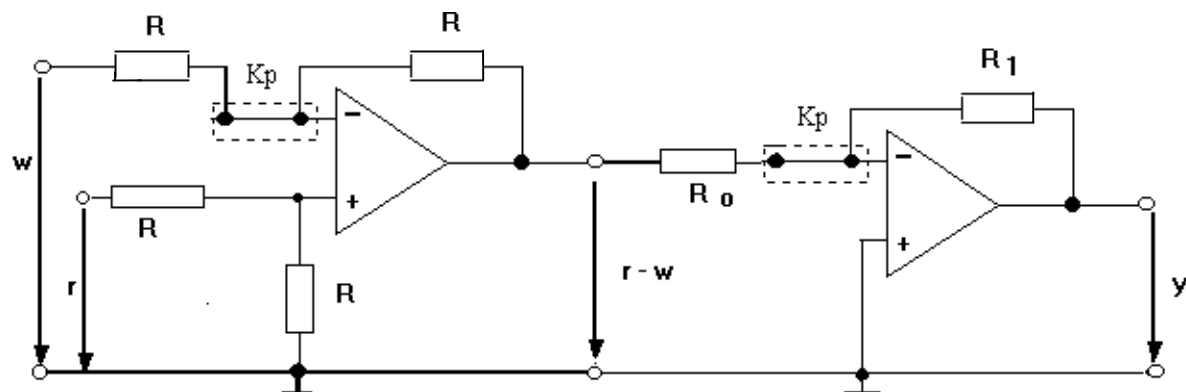
Hierfür erhielten wir

$$U_{ab} = - R_o/R ( r + w )$$

Die Differenzbildung kommt zustande indem man die Polarität von "w" vorher umkehrt. [ vgl. Bild 1.7 ]

Eine weitere wichtige OP-Realisierung ist der

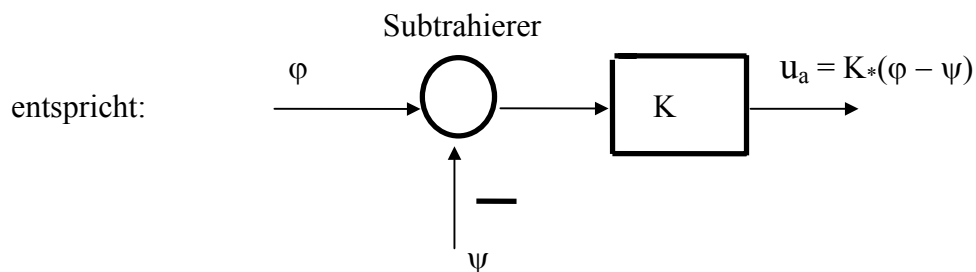
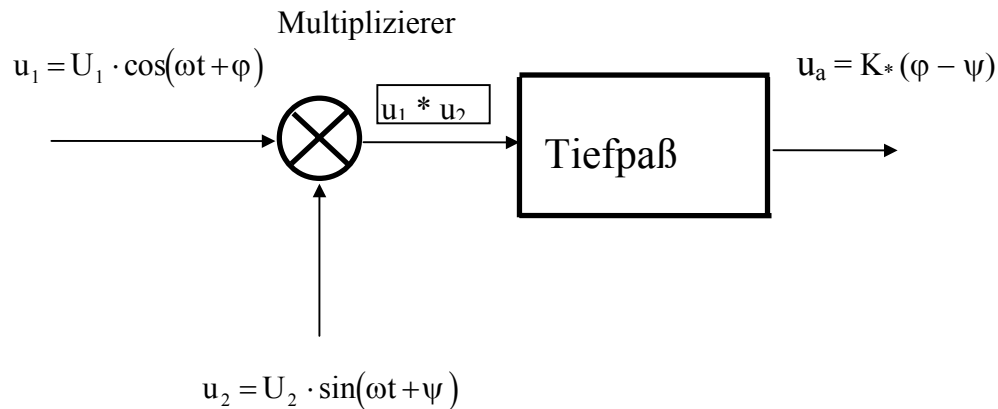
#### U/U - Verstärker mit nachgeschaltetem P-Glied



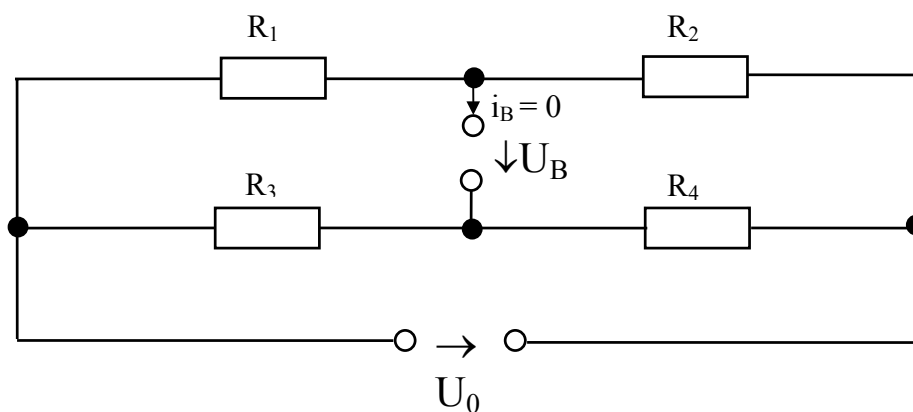
$$\text{Hier gilt } y = R_1/R_o ( w - r )$$

Es ist dem Verfasser dieses Skriptes klar, daß man den zweiten OP nicht unbedingt braucht: Hätte man die Anschlußklemmen für die Signale „w“ und „r“ vertauscht, dann erhielte man bereits am Ausgang des ersten OP's „ $w-r$ “.

Statt eines Spannungsvergleiches muß manchmal ein Phasenvergleich durchgeführt werden. Die **Bildung einer Phasendifferenz** geschieht zum Beispiel in einem PLL; man erkennt hier nicht sofort die Differenzbildung:



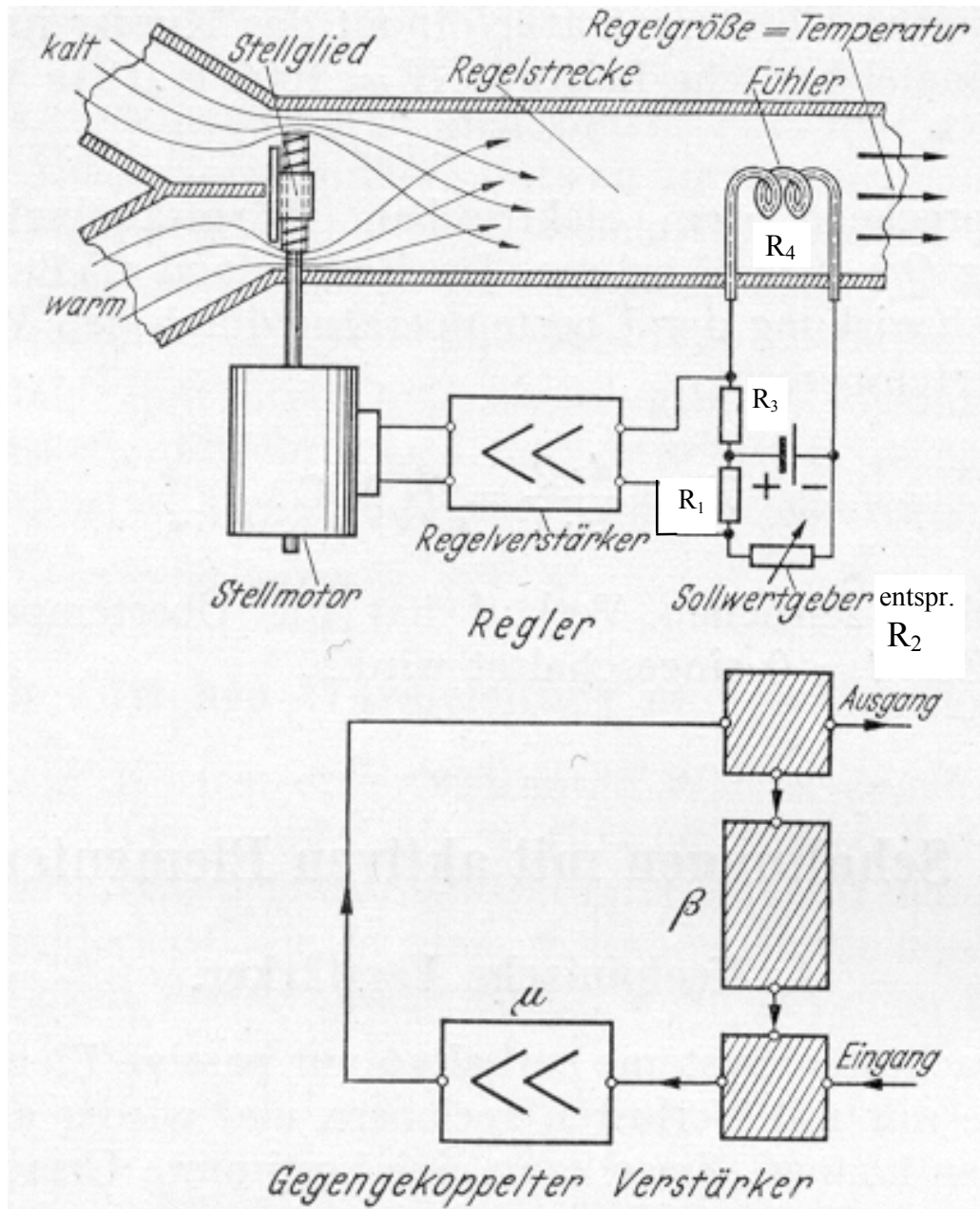
Schließlich soll noch die **Wheatstonesche Brücke** besprochen werden. Diese wird in der Praxis gerne zur elektrischen Messung einer nichtelektrischen Größe verwendet. (Vgl. Regelungstechnisches Labor: Versuch Nummer 501 und Versuch Nummer 505).



Bekanntlich gilt für die Brückenspannung  $U_B$  ( falls  $i_B = 0$  ):

$$U_B = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \cdot U_0$$

Darüber hinaus wird diese Brückenschaltung häufig in der Regelungstechnik zur Bildung des Soll-Istwertvergleichs verwendet. Dies soll auch das nachstehend Bild verdeutlichen. Es ist dem Buch von J. Peters: „Einschwingvorgänge, Gegenkopplung, Stabilität“ (Springer-Verlag 1954) entnommen. Das Bild 1.1.12 zeigt die gerätetechnische Darstellung für die Regelung einer Lufttemperatur durch Veränderung des Mischungsverhältnis von warmer und kalter Zuluft.



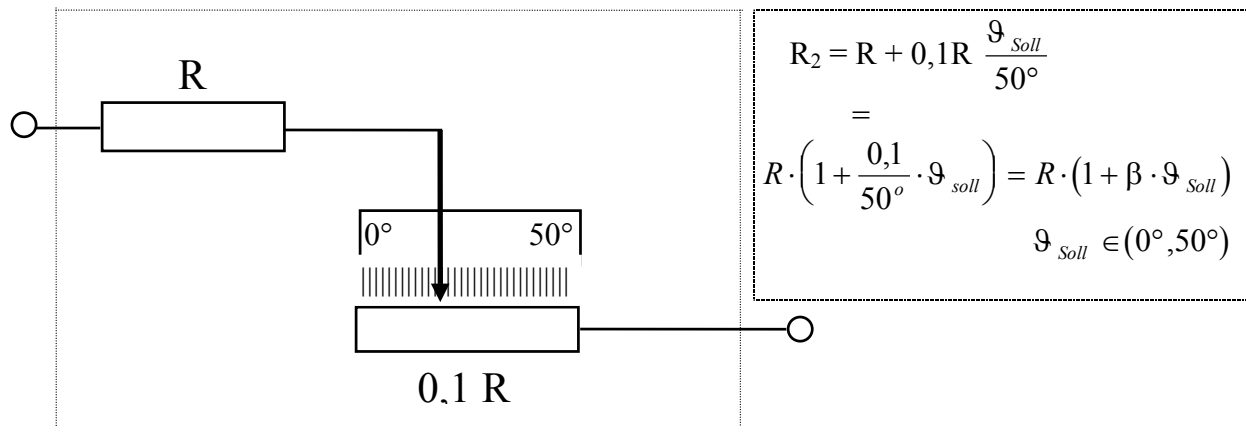
**Bild 1.1.12:** Gerätetechnische Darstellung für die Regelung einer Lufttemperatur

$R_4$ , der „Fühler“, habe folgende Abhängigkeit von der Isttemperatur (dem Istwert)  $\vartheta_i$ :

$$R_4(\vartheta_i) = R \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta_i).$$

$\alpha$  sei ein Temperaturkoeffizient  $\left( \alpha = \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{1}{\Delta \vartheta} \quad \text{z.B. für Kupfer} = 39 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}} \right).$

$R_2$  sei der Sollwertgeber und z.B. folgendermaßen aufgebaut:



Seien  $R_1=R_3=R$ :      Somit gilt:  $\frac{U_B}{U_0} = \dots = \frac{\beta \cdot \vartheta_{Soll} - \alpha \cdot \vartheta_{ist}}{4 + 2\beta \cdot \vartheta_{Soll} + 2\alpha \cdot \vartheta_{ist} + \alpha\beta \cdot \vartheta_{ist} \cdot \vartheta_{Soll}}$

Für Temperaturen von ca.  $10^\circ$  bis  $50^\circ$  kann man hierfür näherungsweise ansetzen:

$$U_B \approx (\beta \cdot \vartheta_{Soll} - \alpha \cdot \vartheta_{Ist}) \cdot \frac{U_0}{4}$$



Betrachten Sie nunmehr noch einmal das Bild 1.6  
(Gerätetechnische Darstellung zur Lösung durch Regelung) und  
versuchen Sie, den Soll-Istwertvergleich ohne  
Operationsverstärker, aber dafür mit einer Wheatstoneschen  
Brücke zu realisieren.

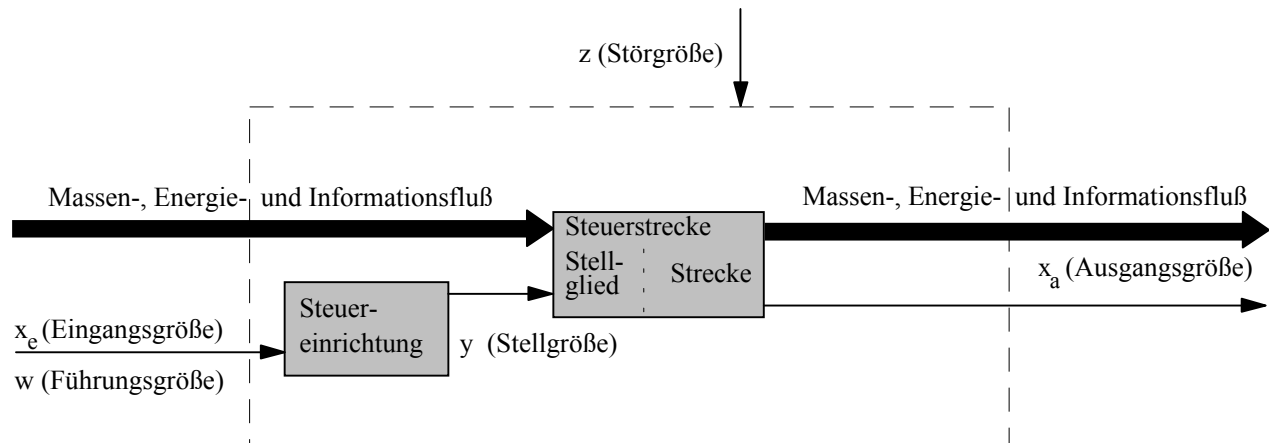


## 1.2 Die Grundbegriffe der Regelungstechnik im Allgemeinen

### 1.2.1 Das Steuern

Das Steuern, die Steuerung, ist der Vorgang in einem System, bei dem eine oder mehrere Größen als Eingangsgrößen andere Größen als Ausgangsgrößen aufgrund der dem System eigentümlichen Gesetzmäßigkeiten beeinflussen.

Kennzeichen für das Steuern ist der offene Wirkungsweg oder ein geschlossener Wirkungsweg, bei dem die durch die Eingangsgrößen beeinflussten Ausgangsgrößen nicht fortlaufend und nicht wieder über dieselben Eingangsgrößen auf sich selbst wirken.



**Bild 1.13:** Ausführliche wirkungsmäßige Betrachtung einer Steuerung

#### Begriffe und Benennungen der Steuerungstechnik:

Die *Strecke* ist der Teil der Steuerstrecke, der die Ausgangsgröße  $x_a$  aufbaut, erzeugt bzw. abgibt.

Die *Strecke* (Steuerstrecke, Regelstrecke) ist derjenige Teil des Wirkungsweges, welcher den aufgabengemäß zu beeinflussenden Bereich des Systems darstellt.

Das *Stellglied* ist der Teil der Steuerstrecke, der unmittelbar in den Wirkungsablauf eingreift (Energie-, Massen und Informationsfluß). Der Ort des Eingriffs heißt *Stellort*.

Die *Stellgröße*  $y$  ist die Größe, die das *Stellglied* steuert. Sie ist die Ausgangsgröße der Steuereinrichtung.

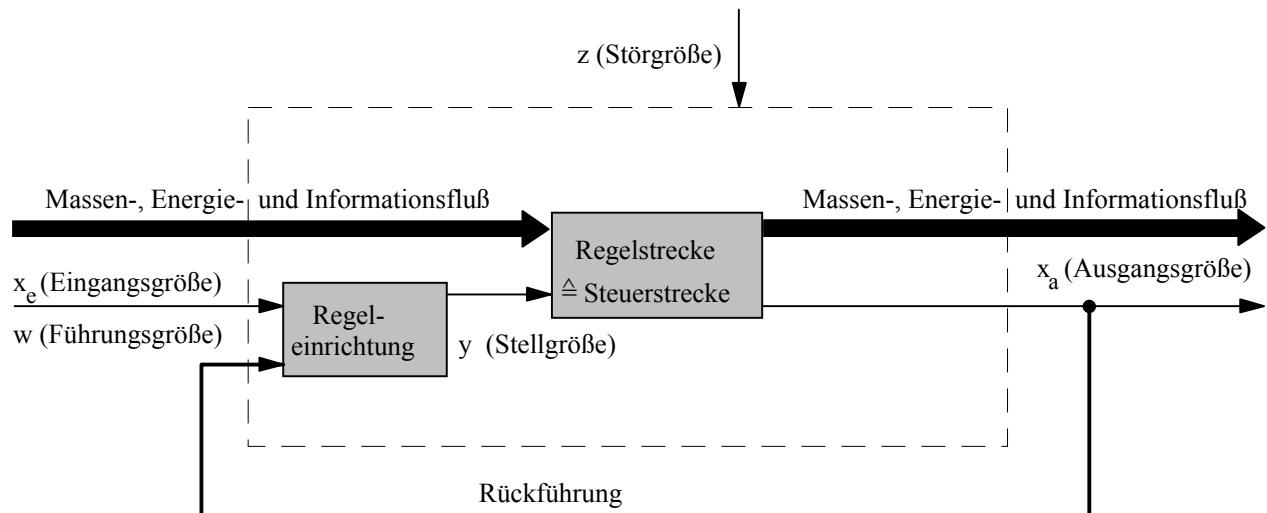
Die *Steuereinrichtung* erzeugt die Stellgröße  $y$ . Sie ist dabei als Teil des Wirkungsweges anzusehen, der die aufgabengemäße Beeinflussung der Steuerstrecke über das Stellglied bewirkt. Sie wird von der Eingangsgröße  $x_e$  beeinflusst. Die Eingangsgröße  $x_e$  wird auch als Führungsgröße  $w$  bezeichnet.

Die *Störgröße*  $z$  steht stellvertretend für alle Einflüsse, die von außen auf die Steuerung einwirken können.

*Steuerkette* heißt die Gesamtheit aus Steuereinrichtung, Stellglied und Strecke.

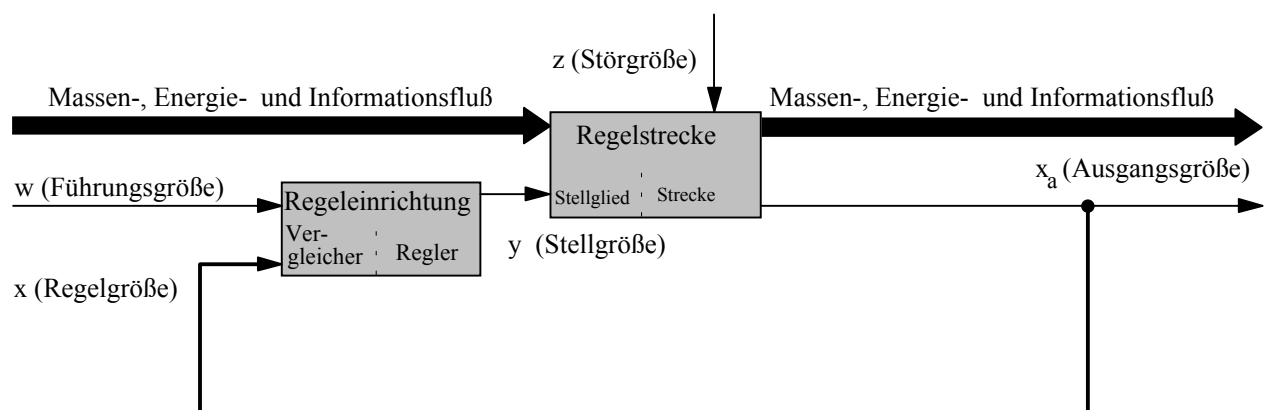
### 1.2.2 Das Regeln

Das Regeln ist ein Vorgang, bei dem eine Größe, die zu regelnde Größe, fortlaufend erfaßt, mit einer anderen Größe, der Führungsgröße, verglichen und abhängig vom Ergebnis dieses Vergleichs im Sinne einer Angleichung an die Führungsgröße beeinflusst wird. Der sich dabei ergebende Wirkungsablauf findet in einem geschlossenen Kreis, dem Regelkreis, statt.



**Bild 1.14:** Blockschaltbild des Regelkreises

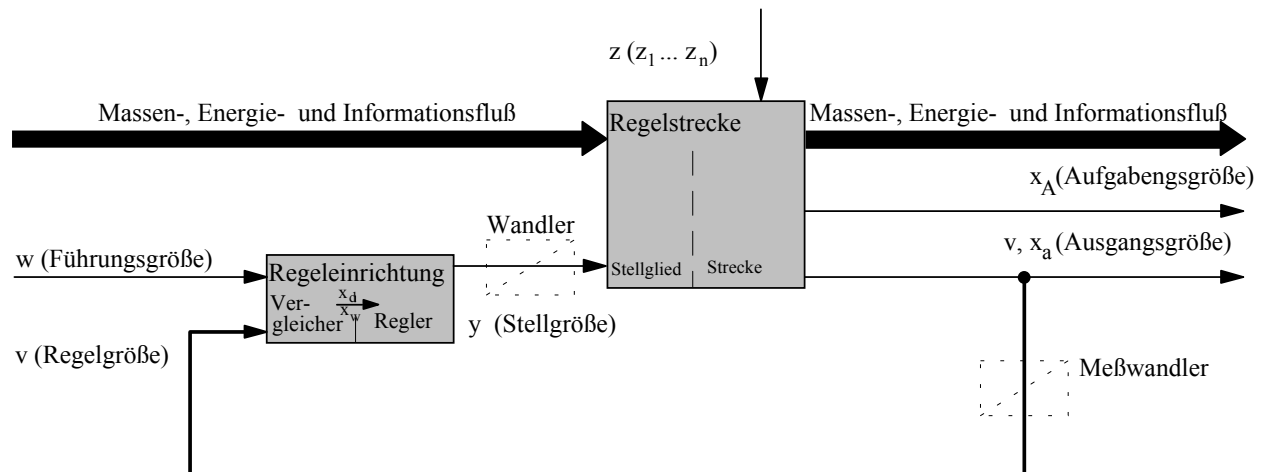
Der Aufbau des Blockschaltbildes hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem einer Steuerung. Mit der Aufschaltung der Ausgangsgröße  $x_a$  auf die Regeleinrichtung (Rückführung) ist der Wirkungsablauf im Gegensatz zur Steuerung jedoch geschlossen. Dies ist das wesentliche Unterscheidungsmerkmal zwischen Regelung und Steuerung.



**Bild 1.15:** Erweitertes Blockschaltbild der Regelung

Die Begriffe Sollwert, Istwert werden entsprechend auf die Regelung übertragen. Der Wert der Ausgangsgröße  $x_a$  wird also fortlaufend erfaßt und in geeigneter Form dem Vergleich in der Regeleinrichtung zugeführt. Wird nach dem Vergleich mit der Führungsgröße  $w$  festgestellt, daß keine Differenz zwischen den beiden Größen vorliegt, so bleibt die Stellgröße  $y$  unverändert. Der über die Führungsgröße  $w$  bestimmte Zustand der Strecke bleibt erhalten. Damit liegt eine Regelung vor.

### Größen und Bereiche im Regelkreis:



**Bild 1.16:** Regelkreis

### Die wichtigsten Begriffe des Regelns:

#### Aufgabengröße:

Die Aufgabengröße  $x_A$  ist die Größe, die sich aus der Aufgabenstellung für die Regelung ergibt.

#### Aufgabenbereich $X_{Ah}$ :

Der Aufgabenbereich  $X_{Ah}$  ist der Bereich, in dem die Aufgabengröße  $x_A$  noch liegen darf, damit die richtige Funktion der Regelung gegeben ist.

#### Regelgröße $v$ (auch Istwert genannt)

Die Regelgröße  $v$  ist die Größe, die zur aufgabengemäßen Ausführung der Regelung meßtechnisch erfaßt wird.

#### Regelbereich $X_h$ :

Der Regelbereich  $X_h$  ist der Bereich, in dem die Regelgröße eingestellt werden kann und bei definiertem Störungseinfluß noch ausgegelt wird.

#### Führungsgröße $w$ (auch Sollwert genannt):

Die Führungsgröße  $w$  wird dem Regelkreis von außen zugeführt und von ihm selbst nicht beeinflusst.

*Führungsbereich  $W_h$ :*

Der Führungsbereich  $W_h$  ist der Bereich, in dem die Führungsgröße  $w$  eingestellt werden kann und die Regelung aufgabengemäß folgt.

*Störgrößen  $z_1 \dots z_n$ :*

Die Störgrößen  $z$  wirken von außen auf den Regelkreis störend ein. Ihre Einwirkung ist nicht auf die Regelstrecke begrenzt, sondern eine Einwirkung ist auch auf die Regelrichtung möglich.

*Störbereich  $Z_h$ :*

Der Störbereich  $Z_h$  ist der Bereich, in dem eine Störung noch ausgeregelt werden kann, also die Regelung aufgabengemäß arbeitet.

*Regeldifferenz  $x_d$ , Regelfehler  $e$ :*

Die Regeldifferenz  $x_d$ , der Regelfehler  $e$ , ist die Differenz zwischen Führungsgröße  $w$  und Regelgröße  $v$ .

$$e = x_d = w - v \text{ bzw. } e = x_d = w - x$$

Die Regeldifferenz  $x_d$  wird innerhalb der Regeleinrichtung durch den Vergleich der beiden Eingangsgrößen  $w$  und  $x$  gebildet. Mit Hilfe von  $x_d$  läßt sich im Signalfußplan die Wirkungsumkehr im geschlossenen Regelkreis verdeutlichen.

*Regelabweichung  $x_w$ :*

Die Regelabweichung  $x_w$  ist die Differenz zwischen Regelgröße  $x$  und Führungsgröße  $w$ .

$$x_w = x - w$$

Es gilt also  $x_w = -x_d$ . Die Regelabweichung wird vorzugsweise zur Anzeige benutzt, da hiermit leicht erkennbar ist, ob die Regelgröße  $x$

größer ( $v > w \rightarrow x_w$  positiv) oder  
kleiner ( $v < w \rightarrow x_w$  negativ)

als die Führungsgröße  $w$  ist.

*Stellgröße  $y$ :*

Die Ausgangsgröße der Regeleinrichtung ist die Stellgröße  $y$ , die der Regler aufgabengemäß aus seiner Eingangsgröße  $x_d$  bildet.

*Stellbereich  $Y_h$ :*

Der Stellbereich  $Y_h$  ist der Bereich, in dem die Stellgröße  $y$  geändert werden kann.

*Stellgeschwindigkeit  $v_y$ :*

Die Stellgeschwindigkeit  $v_y$  ist die Geschwindigkeit, mit der die Stellgröße  $y$  geändert wird.

*Stellzeit  $T_y$ :*

Die Stellzeit  $T_y$  ist die Zeit, in der die Stellgröße  $y$  den Stellbereich  $Y_h$  bei maximaler Stellgeschwindigkeit  $v_y$  durchläuft.

### 1.3 Bisherige Betrachtungen: Was will die Regelungstechnik?

„Regieren heißt regeln“ *Kung Fu-Dse ( 551-479 v. Chr.)*

- **Gutes Folgeverhalten**  
(Ausgangssignal soll möglichst unverzögert dem Eingangssignal folgen)  
ideal:  $v(t)=w(t)$  für alle  $t$
- **Gute Störunterdrückung**  
ideal:  $v(t)$  unabhängig von  $z(t)$  für alle  $t$
- **Nebenbedingungen:**
  - a) Stabilität
  - b) Realisierbarkeit
  - c) Stellgrößenaufwand
  - d) Störgrößenaufwand
  - e) Unempfindlichkeit gegenüber inneren Störungen („Robustheit“)



Versuchen Sie, von den Übungsaufgaben zum 1. Kapitel wenigstens die Nummern 1 und 2 zu bearbeiten.

Wenn sie auf Schwierigkeiten stoßen, bedenken Sie folgendes:

*„... daß es in der Welt keine unerkennbaren Dinge gibt, wohl aber Dinge, die noch nicht erkannt sind; auch diese werden durch die Kräfte der Wissenschaft und der Praxis aufgedeckt und erkannt werden.“*  
*J. Stalin*

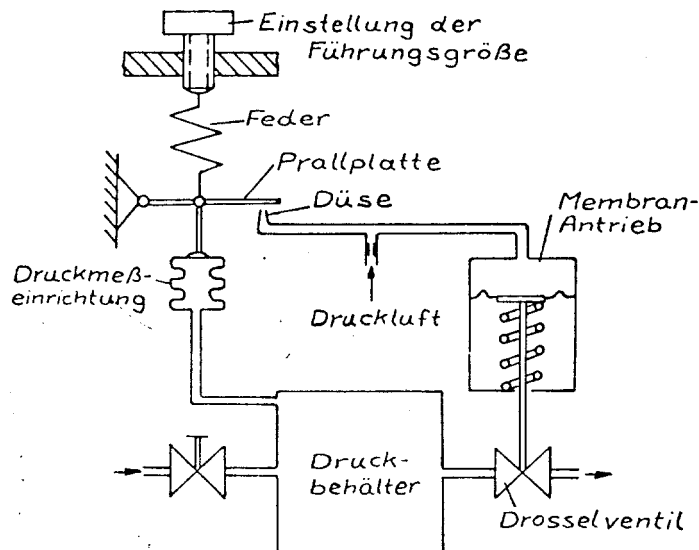
„ Auf gute Zusammenarbeit“, sagte Dr. Karl.

*Hera Lind (Das Weibernetz)*

## 1.4 Aufgaben zum 1. Kapitel

„Seid aber Täter des Worts und nicht nur Hörer allein damit ihr euch nicht selbst betrügt.“  
(Jac. 2,22)

**1. Aufgabe:** Gegeben sei die nachstehende gerätetechnische Darstellung eines Regelkreises. Sie zeigt die Regelung eines Behälterdrucks (aus DIN 19226, Regelungs- und Steuerungstechnik).



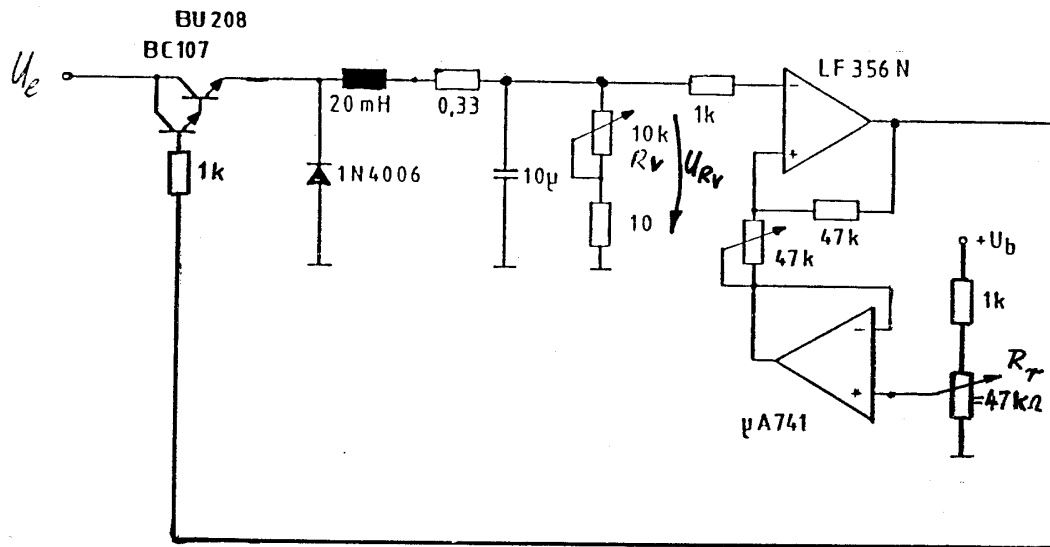
Erklärung: Zur Regelung des Druckes im Behälter wird die von der Druckmeßeinrichtung hervorgebrachte Kraft mit der einer vorgespannten Feder verglichen. Über den Abstand zwischen Düse und Prallplatte ändert sich der Druck im Membranantrieb und beeinflusst über das Drosselventil den Behälterdruck im Sinne einer Angleichung an den durch die Führungsgröße vorgegebenen Wert.

1.1 Entwerfen Sie für diesen Regelkreis einen ausführlichen Wirkplan (Signalfußplan) entsprechend dem Einführungsbeispiel aus der Vorlesung. Dabei sollen die Eingangs- und Ausgangsgrößen physikalische Größen (wie z.B. Druck, Weg, Kraft, Drehzahl,...) sein. Bezeichnen Sie die Einzelblöcke und die zugehörigen Eingangs- und Ausgangsgrößen.

1.2 Geben Sie Regelgröße, die Stellgröße, die Führungsgröße und die möglichen Störgrößen an und unterteilen Sie den Wirkplan in Regelstrecke und Regeleinrichtung.

1.3 Sind Sie davon überzeugt, daß die von Ihnen vorgeschlagenen Lösungen der Teile 1.1 und 1.2 eindeutig sind? Oder können sie sich vorstellen, daß auch andere Lösungen möglich wären?

**2. Aufgabe:** Gegeben sei die nachstehende gerätetechnische Darstellung eines Regelkreises. Sie zeigt die Spannungsregelung mit einem sogenannten freischwingenden Schaltnetzteil. (Ein getaktetes Schaltnetzteil ist Gegenstand einer Aufgabe im Regelungstechnischen Labor).



Erklärung: Zur Regelung der Spannung an einem Verbraucher (ausgedrückt durch den veränderlichen Widerstand  $R_V$ ) wird diese Verbraucherspannung gegen einen Sollwert (eingestellt an  $R_r$ ) verglichen. In Abhängigkeit vom Ergebnis des Vergleichs schaltet der Schmitt-Trigger häufiger oder weniger häufig durch. Damit liegt auch die Schaltfrequenz am Leistungstransistor fest. Der arithmetische Mittelwert der „getakteten“ Spannung wird entsprechend erniedrigt. Die Oberschwingungen in der getakteten Spannung werden durch die Tiefpaßeigenschaft der LRC-Kombination weitestgehend herausgefiltert.

2.1 Erklären Sie die Funktion der „Freilaufdiode“ 1N4006.

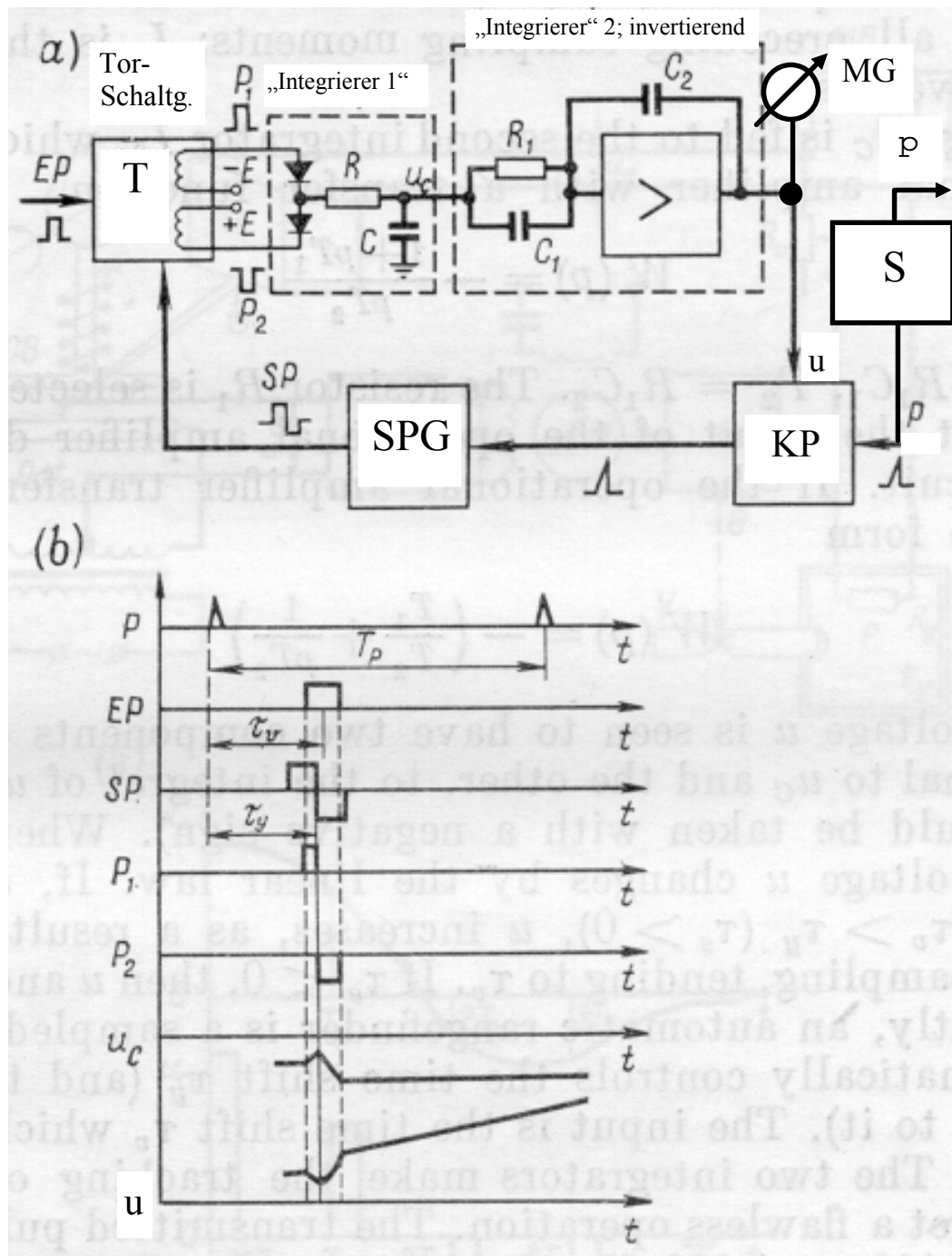
2.2 Entwerfen Sie für diesen Regelkreis einen ausführlichen Wirkplan (Signalfußplan) entsprechend dem Einführungsbeispiel aus der Vorlesung. Dabei sollen die Eingangs- und Ausgangsgrößen physikalische Größen (wie z.B. Spannung Frequenz,...) sein. Bezeichnen Sie die Einzelblöcke und die zugehörigen Eingangs- und Ausgangsgrößen.

2.3 Geben Sie Regelgröße, die Stellgröße, die Führungsgröße und die möglichen Störgrößen an und unterteilen Sie den Wirkplan in Regelstrecke und Regeleinrichtung.

2.4 Sind Sie davon überzeugt, daß die von Ihnen vorgeschlagenen Lösungen der Teile 2.2 und 2.3 eindeutig sind? Oder können sie sich vorstellen, daß auch andere Lösungen möglich wären?

### 3. Aufgabe: Gegeben sei die nachstehende gerätetechnische Darstellung eines Regelkreises.

Sie zeigt einen automatischen Abstandsmesser wie er bei Radarmessungen angewandt werden kann. Es handelt sich hierbei um ein Meßgerät das nach dem „Kompensationsprinzip“ funktioniert und damit selber ein Regelsystem ist.



Erklärung: Der Sender „S“ sendet einen Radarimpuls „p“ aus. Ein elektrisches Abbild von „p“ wird gleichzeitig auf einen Komparator „KP“ gegeben. Der Komparator hat einen zweiten Eingang für die ( zunächst als konstant angenommene, bzw. zeitlich nur langsam veränderliche ) Spannung „u“. In Abhängigkeit von der Größe von „u“ wird der Impuls „p“ verzögert auf den Ausgang weitergegeben. Eine Schaltung die so etwas ermöglicht, kennen



Sie schon: vgl. Praktikum Meßtechnik ( Aufgabe 504; dort Bild 2 ). Der verzögerte Impuls startet den Strobe-Puls-Generator „SPG“. Dieser liefert zwei aufeinanderfolgende Impulse unterschiedlicher Polarität - „SP“ genannt. „SP“ und der vom Ziel rückreflektierte Echoimpuls „EP“ wirken auf die Torschaltung „T“. Betrachten wir nun auch noch das Impulsdigramm (b): Offenbar langt die Mitte des Echoimpulses „EP“ um die Zeit  $\tau_v$  später als der abgesandte Radarimpuls an.  $\tau_v$  ist also ein Maß für die Entfernung zum Ziel. Wäre die Mitte von „SP“ ebenfalls um  $\tau_v$  später als der Impuls „p“ eingetroffen, dann ergäben sich zwei aufeinanderfolgende, gleich große Impulse P1 und P2 von gegensätzlicher Polarität. Angenommen, der erste Integrierer wäre zu Beginn unserer Betrachtungen auf „0“ entladen gewesen, so würde er sich nunmehr auf- und sodann wieder auf „0“ entladen. Wenn der Auf- und Entladevorgang des ersten Integrierers hinreichend schnell ist, so ändert sich der Ausgang „u“ des 2. Integrierers nicht.

Nun kommt aber die Mitte des Strobepulses „SP“ um die Zeit  $\tau_v$  später als „p“ an. Es ergibt sich eine Impulsform für P1 und P2 wie im Impulsdigramm (b) dargestellt. In diesem Fall wird Integrierer 1 etwas aufgeladen und dann stärker umgeladen. Nachdem P2 verflossen ist, bleibt der Ausgang des 1. Integrierers auf einen konstanten negativen Wert. Der Ausgang „u“ des invertierenden 2. Integrierers läuft daraufhin als „positive Rampe“ hoch. Der Komparator verzögert nun den Puls „p“ und letztlich auch den Strobepuls „SP“ noch mehr. Erst wenn die Pulsdauer von „P1“ und „P2“ gleich lang sind, bleibt „u“ auf einem konstanten Wert liegen. Der Spannungsmesser „MG“ zeigt sodann einen konstanten Wert an, der dem Abstand zum Ziel entspricht.

3.1 Entwerfen Sie für diesen Regelkreis einen ausführlichen Wirkplan (Signalfußplan) entsprechend dem Einführungsbeispiel aus der Vorlesung. Dabei sollen die Eingangs- und Ausgangsgrößen physikalische Größen (wie z.B. Spannung, Zeit,...) sein. Bezeichnen Sie die Einzelblöcke und die zugehörigen Eingangs- und Ausgangsgrößen.

3.2 Geben Sie Regelgröße, die Stellgröße, die Führungsgröße und die möglichen Störgrößen an und unterteilen Sie den Wirkplan in Regelstrecke und Regeleinrichtung.

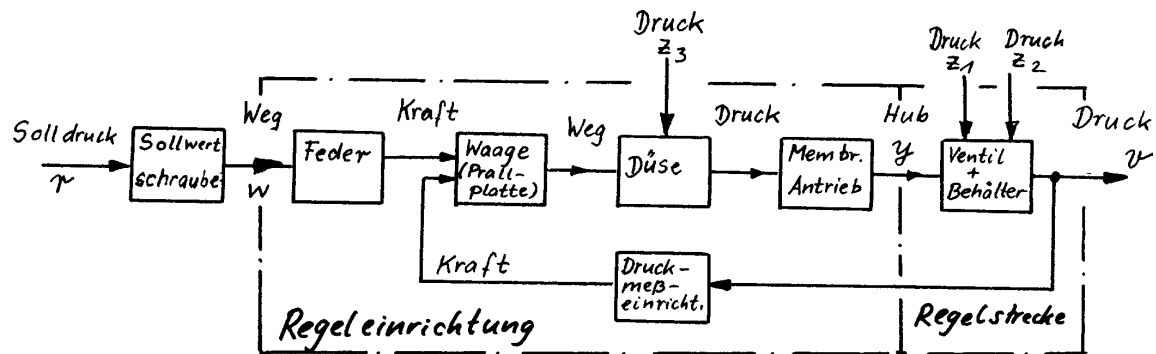
3.3 Sind Sie davon überzeugt, daß die von Ihnen vorgeschlagenen Lösungen der Teile 3.1 und 3.2 eindeutig sind? Oder können sie sich vorstellen, daß auch andere Lösungen möglich wären?

## 1.5 Lösung der Aufgaben zum 1. Kapitel

„Beständig gab es zu tun“, Max Schmeling

### 1. Aufgabe:

#### 1.1 Wirkplan



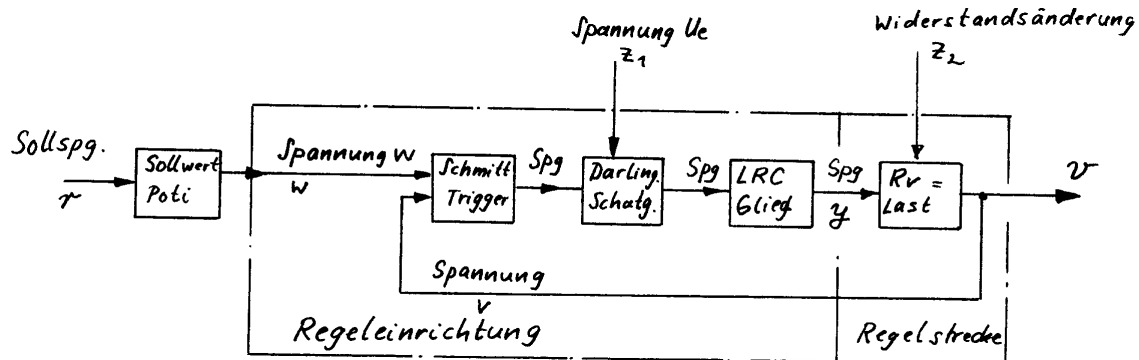
- 1.2 Regelgröße  $\nu$  = Druck im Behälter  
 Stellgröße  $y$  = Hub des Drosselventils  
 Störgröße  $z_1$  = Druck in der Zuleitung  
 Störgröße  $z_2$  = Druck in der Ableitung  
 Störgröße  $z_3$  = Druck der Druckluft

- 1.3 Die vorgeschlagenen Lösungen in 1.1 und 1.2 sind nicht eindeutig. So könnte man z.B. den Druck der Düse als Stellgröße verwenden. Dann würde sich auch die Einteilung in Regel-einrichtung und Regel-strecke ändern.

## 2. Aufgabe:

2.1 Anmerkungen zur Wirkungsweise - insbesondere zur Freilaufdiode: Am Potentiometer  $R_r$  wird eine „Sollwertspannung“ eingestellt. Diese wirkt über einen Impedanzwandler (Op vom Typ  $\mu a 741$ ) auf den einen Eingang des Schmitt - Triggers (OP LF 356 N). Man beachte: der Impedanzwandler hat sonst keine andere Funktion als  $R_r$  lastunabhängig zu machen. Auf den anderen Eingang des Schmitt - Triggers wirkt die Spannung  $u_{RV}$ . In Abhängigkeit vom Vergleich schaltet der Schmitt - Trigger auf den positiven oder negativen Maximalwert seiner Ausgangsgröße durch. Diese positive oder negative Maximalspannung schaltet ihrerseits die Darlingtonschaltung durch, oder sie sperrt diese Schaltung. Die mehr oder weniger konstante Spannung  $U_e$  wird demnach auf den LRC-Kreis mit parallel liegender Last geschaltet oder auch nicht. Die Diode hat die Funktion einer „Freilaufdiode“: Wenn  $U_e$  vom LRC-Glied abgeschaltet wird, versucht die Induktivität den Spulenstrom aufrechtzuerhalten und erzeugt dazu eine sehr große Induktionsspannung an (Darlington-)Schalter. Diese würde sofort zur Zerstörung der Schalttransistors führen. Da nun aber die Freilaufdiode vorhanden ist, fließt dieser über „C“ bzw. „ $R_v$ “ und die Diode durch die Spule. Wenn der Schalttransistor leitend ist, dann sperrt die Freilaufdiode natürlich.

### 2.2 Wirkplan:

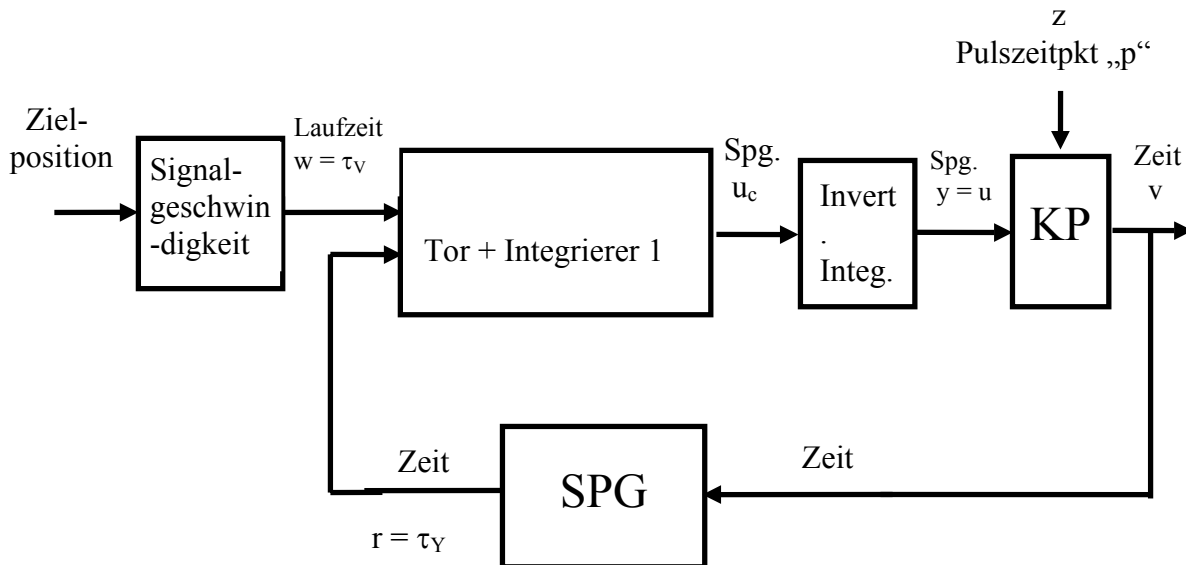


2.3	Regelgröße	$v$ = Spannung am Lastwiderstand $R_v$
	Stellgröße	$y$ = arithmetischer Mittelwert („Gleichanteil“) der Ausgangsspannung des LRC-Gliedes.
	Führungsgröße	$w$ = Spannung am Sollwertpoti
	Störgröße	$z_1$ = Spannung $U_e$
	Störgröße	$z_2$ = Widerstand von $R_v$ .

3.4 Eindeutigkeit: Die vorliegende Lösung ist wieder nicht eindeutig. Vgl. hierzu auch die Ausführungen zu 1.3

### 3. Aufgabe:

Bevor wir 3.1 bearbeiten, mache man sich klar, daß für die Spannung „uc“ gilt  $u_c \sim \tau_y - \tau_v$ .  $u_c$  ist also der negativen Differenz von Soll- und Istwert proportional. Der nachgeschaltete invertierende Integrator wirkt wie ein nichtinvertierender Integrator der auf die Soll-Istwertdifferenz aufintegriert.



## 2.Mathematische Modellbildung, Strukturbilder, Zustandsvariable

„In bunten Bildern wenig Klarheit, viel Irrtum und ein Fünkchen Wahrheit“, Goethe, Faust I

### 2.1. Betrachtungen zur Regelstrecke (Einführungsbeispiel)

Vor der mathematischen Modellierung ( hier der Modellierung der Regelstrecke aus dem Einführungsbeispiel ) sind zwei grundsätzliche Fragen zu klären:

- Welche Effekte sollen (müssen) berücksichtigt werden?
- Welche Größen können Eingangsgrößen, welche können Ausgangsgrößen sein?

#### **Allgemeine Vorgehensweise:**

(1) Festlegen von Ein- und Ausgangsgröße(n)

(2) Anschreiben aller Systemgleichungen *ohne* Rücksicht, ob vollständig oder redundant

(3) Strukturbild hierzu zeichnen ( Beginnend mit der vereinbarten Ausgangsgröße und endend mit der vereinbarten Eingangsgröße müssen alle anderen Verbindungslinien geschlossen sein ).

(4) Zustandsmodell ablesen

#### **Beispiel 1: Mathematische Modellbildung der Regelstrecke des Ausgangsproblems**

(vgl. Bild 1.6 und Bild 1.7)

(1) Eingangsgrößen:  $y = m_{an}(t)$ ;  $z = m_w(t)$

Ausgangsgröße:  $v = \varphi(t)$

(2) Systemgleichungen:

Bezeichne  $J$  das Trägheitsmoment aller sich drehenden Teile, dann gilt:

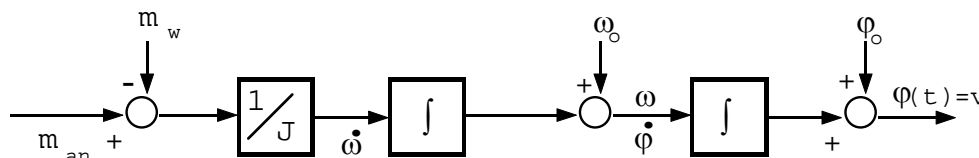
$$J \cdot \dot{\omega}(t) = m_{an}(t) - m_w(t); \quad \omega(0) = \omega_0;$$

$$\dot{\varphi}(t) = \omega(t); \quad \varphi(0) = \varphi_0;$$

bzw. 
$$\omega(t) = \omega(0) + \frac{1}{J} \cdot \int_0^t [m_{an}(\tau) - m_w(\tau)] \cdot d\tau ;$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \omega(\tau) \cdot d\tau ;$$

(3) Strukturbild hierzu:



(4) Zustandsmodell ablesen:

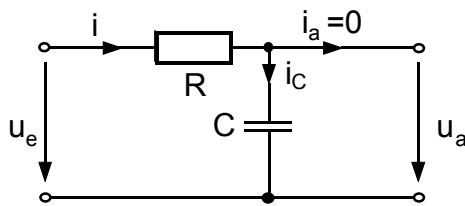
$$\dot{\varphi} = \omega; \quad \varphi(0) = \varphi_0;$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J} \cdot (m_{an} - m_w); \quad \omega(0) = \omega_0;$$

$$v = \varphi ;$$

In den nachfolgenden Beispielen geht es jedesmal darum, das Zustandsmodell aufzustellen.

**Beispiel 2a:**



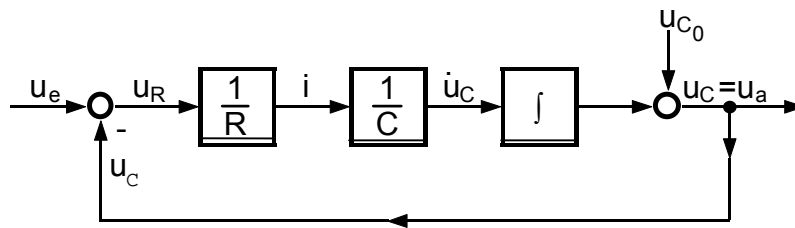
$u_e$  = Eingangsgröße  
 $u_a$  = Ausgangsgröße

zu (2):  $u_e = R \cdot i + u_C$ ;  $u_R = R \cdot i$  bzw.  $i = \frac{u_R}{R}$ ;  $i = i_C$ ;  $u_a = u_C$ ;

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}; \quad u_C(0) = u_{C_0};$$

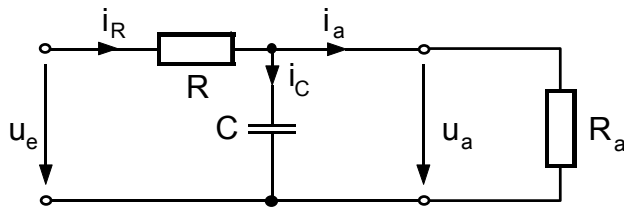
bzw.  $u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(\tau) \cdot d\tau$ ;

zu (3):



zu (4):  $\dot{u}_C = -\frac{1}{RC} \cdot u_C + \frac{1}{RC} \cdot u_e$ ;  $u_C(0) = u_{C_0}$ ;  
 $u_a = u_C$ ;

**Beispiel 2b:** (Beispiel 2a ergänzt um Lastwiderstand  $R_a$ )



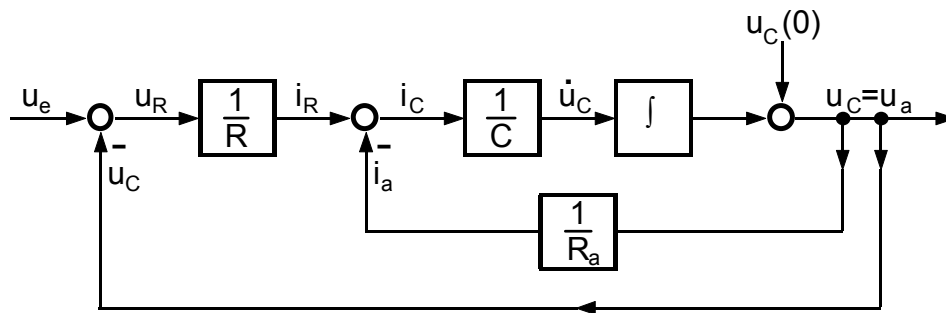
$u_e$  = Eingangsgröße

$u_a$  = Ausgangsgröße

zu (2):  $u_e = u_R + u_C$ ;  $u_a = u_C$ ;  $u_R = R \cdot i_R$ ;  $i_R = \frac{1}{R} \cdot u_R$ ;  $u_a = R_a \cdot i_a$ ;  $i_a = \frac{1}{R_a} \cdot u_a$ ;

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(\tau) \cdot d\tau ; \quad i_R = i_C + i_a ;$$

zu (3):



zu (4): gesucht ist eine Darstellung des Typs:

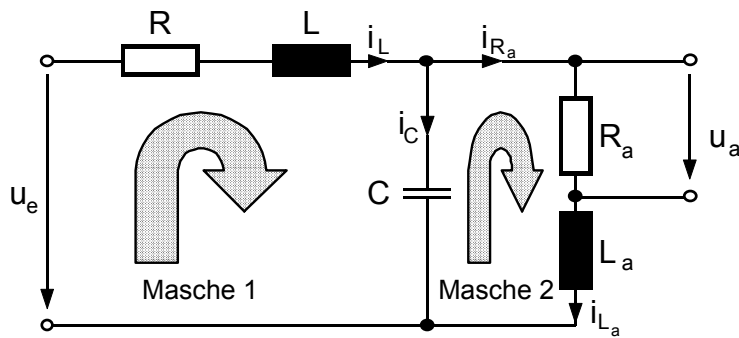
$$\dot{u}_C = f(u_C, u_e); \quad u_C(0) = u_{C_0};$$

$$u_a = g(u_C, u_e)$$

Diese lautet:

$$\dot{u}_C = -\frac{1}{C} \cdot \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_a} \right) \cdot u_C + \frac{1}{RC} \cdot u_e; \quad u_C(0) = u_{C_0};$$

$$u_a = u_C;$$

**Beispiel 3: RLC-Netzwerk** $u_e$  = Eingangsspannung $u_a$  = Ausgangsspannung

gesucht: Zustandsmodell vom Typ

$$\dot{u}_C = f_1(u_C, i_L, i_{L_a}, u_e) ; \quad u_C(0) = u_{C_0} ;$$

$$\dot{i}_L = f_2(u_C, i_L, i_{L_a}, u_e) ; \quad i_L(0) = i_{L_0} ;$$

$$\dot{i}_{L_a} = f_3(u_C, i_L, i_{L_a}, u_e) ; \quad i_{L_a}(0) = i_{L_{a0}} ;$$

$$u_a = g(u_C, i_L, i_{L_a}, u_e) ;$$

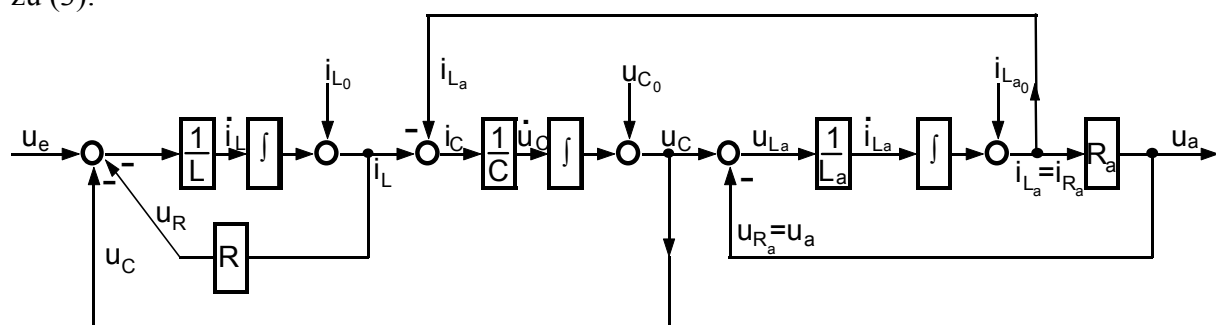
zu (2): Masche 1:  $u_e = u_R + u_L + u_C$ Masche 2:  $u_C = u_{R_a} + u_{L_a}$ Knoten:  $i_L = i_C + i_{R_a} ; \quad i_{R_a} = i_{L_a}$ 

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(\tau) \cdot d\tau$$

$$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L(\tau) \cdot d\tau$$

$$i_{L_a} = i_{L_a}(0) + \frac{1}{L_a} \cdot \int_0^t u_{L_a}(\tau) \cdot d\tau$$

zu (3):

zu (4):  $\dot{u}_C = \frac{1}{C} \cdot (i_L - i_{L_a}) ; \quad u_C(0) = u_{C_0} ;$ 

$$\dot{i}_L = \frac{1}{L} \cdot (u_e - u_C - R \cdot i_L) ; \quad i_L(0) = i_{L_0} ;$$

$$\dot{i}_{L_a} = \frac{1}{L_a} \cdot (u_C - R_a \cdot i_{L_a}) ; \quad i_{L_a}(0) = i_{L_{a0}} ;$$

$$u_{R_a} = R_a \cdot i_{L_a} ;$$



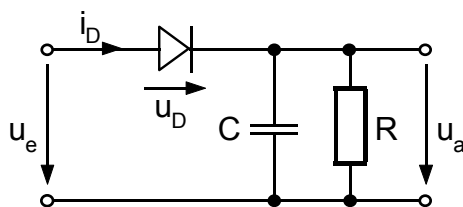
Darstellung der Lösung von Beispiel 3 in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \\ \dot{i}_{L_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/C & -1/C \\ -1/L & -R/L & 0 \\ 1/L_a & 0 & -R_a/L_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \\ i_{L_a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u_e ; \quad \begin{pmatrix} u_C(0) \\ i_L(0) \\ i_{L_a}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{C_0} \\ i_{L_0} \\ i_{L_{a0}} \end{pmatrix} ;$$

$$u_{R_a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \\ i_{L_a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \cdot u_e ; \quad \text{Abkürzende Notation: } \dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot u ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$v = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot u.$$

#### Beispiel 4: Spitzenwertgleichrichter; AM-Demodulator

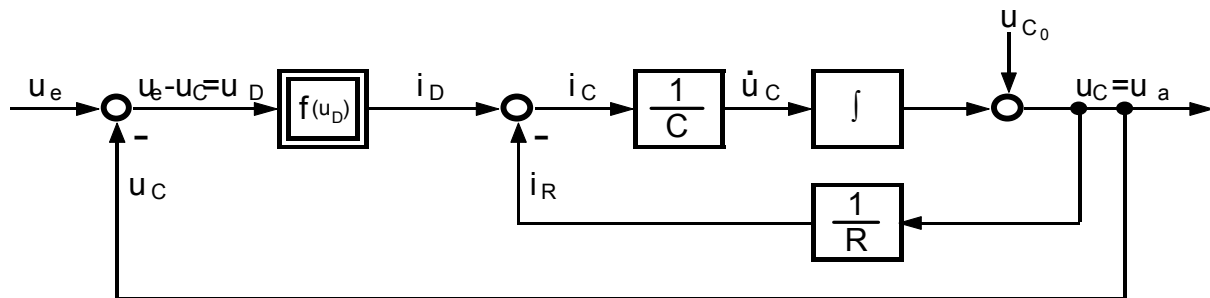


$u_e$  = Eingangsspannung

$u_a$  = Ausgangsspannung

zu (2):  $i_D = I_S \cdot \left( e^{u_D/U_T} - 1 \right) \equiv f(u_D)$

zu (3):



zu (4):  $\dot{u}_C = \frac{1}{C} \cdot \left( f(u_e - u_C) - \frac{1}{R} \cdot u_C \right) ;$

$$u_C(0) = u_{C_0} ;$$

bzw.  $\dot{u}_C = \frac{1}{C} \cdot I_S \cdot \left( e^{\frac{u_e - u_C}{U_T}} - 1 \right) - \frac{1}{RC} \cdot u_C ;$

$$u_a = u_C ;$$

## 2.2. Zum Begriff: Zustandsvariable (state variable)

Bekanntlich gelten folgende Beziehungen:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 \quad (\text{Energie in einem geladenen Kondensator gespeichert})$$

$$E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_L^2 \quad (\text{Energie in einer stromdurchflossenen Spule gespeichert})$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 \quad (\text{Rotationsenergie})$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (\text{kinetische Energie})$$

$$E_F = \frac{1}{2} \cdot c_F \cdot x^2 \quad (\text{Energie in einer gespannten Feder gespeichert})$$

$$E_{DF} = \frac{1}{2} \cdot c_D \cdot \varphi^2 \quad (\text{Energie in einer gedrehten Feder gespeichert})$$

Offenbar sind die (Quadrate der) Kondensatorspannungen, Spulenströme, ... , Drehfederwinkel, ... den in den entsprechenden Bauteilen gespeicherten Energieinhalten proportional.

Kennt man in einem System, das durch Differentialgleichungen vom Typ  $\dot{u}_C(t) = \dots, \dots, \dot{\varphi}(t) = \dots, \dots$  beschrieben wird, zu einem bestimmten Zeitpunkt die aktuellen Werte zu  $u_C(t), \dots, \varphi(t), \dots$ , dann kennt man den aktuellen energetischen Zustand. Deshalb nennt man solche „energetragenden Größen“ auch *Zustandsvariablen*.

Eine Systembeschreibung mit Differentialgleichungen in Zustandsvariablen (Zustandsdifferentialgleichungen, state-differential-equations) ist sehr sinnvoll: Da sich Energieinhalte nur stetig in der Zeit ändern, sind die Ableitungen der Zustandsvariablen niemals unendlich.

*„Sein Gehirn wächst ständig, wenigstens was die Teile anlangt, die sich mit Mathematik befassen. Sie quellen immer größer auf ... Seine Stimme wird zum bloßen Schnarren, was für die Wiedergabe von Formeln ausreicht ... Die Fähigkeit des Lachens geht ihnen verloren, falls es sich nicht gerade um die plötzliche Entdeckung eines paradoxen Problems handelt. Am tiefsten fühlt er sich bewegt, wenn er eine rechnerische Aufgabe löst ...“*

*H. G. Wells: Die ersten Menschen auf dem Mond.*

### 2.3. Mathematische Modellierung des Gesamtsystems:

#### Regelstrecke + Regeleinrichtung (vgl. Einführungsbeispiel)

„Die Mathematik ist dem Liebestrieb nicht abträglich“, Paul Möbius (Irrenarzt)

Bei der nachfolgenden mathematischen Modellbildung sollen nur die denkbar einfachsten Modellannahmen getroffen werden. Modellverfeinerungen werden höchstens andiskutiert.

(1) Eingangsgrößen: Sollwert  $\alpha$ , Störgröße  $z = m_w$

Ausgangsgröße: Istwert = Regelgröße  $v = \varphi$

(2) Systemgleichungen

Regelstrecke:  $\dot{\varphi} = \omega$ ;  $\varphi(0) = \varphi_0$ ;

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J} \cdot (m_{an} - m_w); \quad \omega(0) = \omega_0;$$

$$v = \varphi;$$

$$\text{oder: } \varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega(\tau) \cdot d\tau;$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{1}{J} \cdot \int_0^t [m_{an}(\tau) - m_w(\tau)] \cdot d\tau;$$

$$\text{Istwertpoti: } r = \varphi \cdot \left( \frac{U_1}{\alpha_m} \right)$$

$$\text{Sollwertpoti: } w = -\alpha \cdot \left( \frac{U_1}{\alpha_m} \right)$$

Verstärkung und Vergleich:

$$u_{ab} = -\frac{R_0}{R} \cdot (r + w) \quad \Rightarrow \quad u_{ab} = \left( \frac{R_0}{R} \right) \cdot \left[ \left( \frac{U_1}{\alpha_m} \right) \cdot \alpha - \left( \frac{U_1}{\alpha_m} \right) \cdot \varphi \right] \quad \Rightarrow$$

$$u_{ab} = \left( \frac{R_0 \cdot U_1}{R \cdot \alpha_m} \right) \cdot (\alpha - \varphi)$$

Leistungsverstärker:

a) einfachstes (= ungenauestes) Modell:  $u_{LV} = V \cdot u_{ab}$

b) erste Modellverfeinerung durch Berücksichtigung der endlichen Anstiegszeit ( $\hat{=}$  nicht unendliche Bandbreite des Verstärkers): Aus der VL Meßtechnik ist eine Faustformel bekannt, welche einen Zusammenhang zwischen der bekannten „rise-time  $t_r$ “ (= Anstiegszeit =  $t_{90\%} - t_{10\%}$ ) und der Bandbreite „B“ herstellt:  $B \cdot t_r \approx 0,35$ . Gleichberechtigt damit ist die Faustformel die einen Zusammenhang zwischen der Zeitkonstanten „ $\tau$ “ (vgl. VL „Grundlagen der ET“, „Meßtechnik“) und der Bandbreitenkreisfrequenz „ $\omega_B$ “ =  $2\pi \cdot B$  beschreibt:  $\tau = \frac{1}{\omega_B}$ . Ist also (wie üblich) die

Verstärkerbandbreite bekannt, dann kann man modellieren:

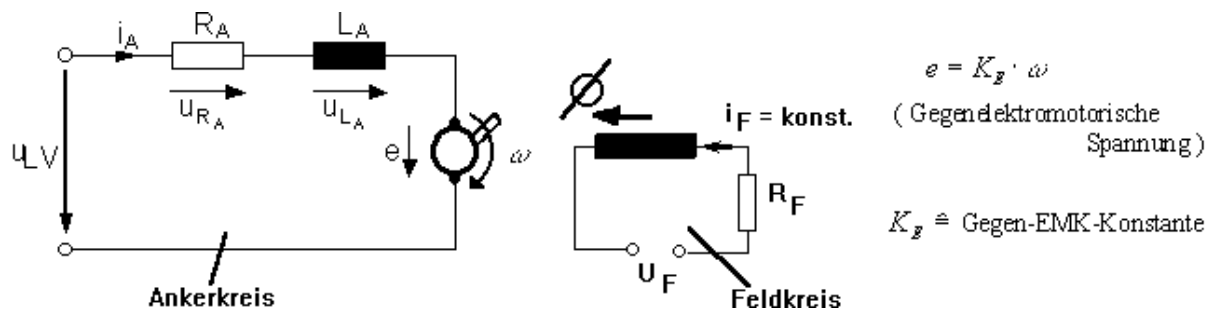
$$\tau \cdot \dot{u}_{LV} + u_{LV} = V \cdot u_{ab}.$$

Der Verstärker hat jetzt ein sogenanntes „PT1-Verhalten“ (vgl. Kap. 6 und Kap7).

c) Weitere Verfeinerungen betreffen die endlichen Ein- und Ausgangswiderstände des Verstärkers. Bisher ist die Modellierung noch so, daß man annehmen darf: der Verstärker belastet mit seinem Eingangswiderstand den vorgeschalteten OP nicht ( Es wird also bisher stark vereinfachend  $R_{\text{Eingang}} \rightarrow \infty [\Omega]$  angenommen ) und der Verstärker wird durch den nachgeschalteten Motor nicht belastet. d.h.: die Verstärkerausgangsspannung ist unabhängig von Ausgangsstrom. ( Es wird also weiterhin stark vereinfachend  $R_{\text{Ausgang}} \rightarrow 0 [\Omega]$  angenommen). Es wäre nunmehr zu überlegen, wie man diese endlichen Ein- und ausgangswiderstände des LV im mathematischen Modell zu berücksichtigen sind.

Motor: Fremderregter Gleichstrommotor

*elektrisches Teilsystem des Motors; Ankerkreis und Feldkreis*



$$u_{LV} = u_{R_A} + u_{L_A} + e ; \quad u_{LV} = R_A \cdot i_A + L_A \cdot \frac{di_A}{dt} + K_E \cdot \omega ; \quad i_A(0) = i_{A_0} ;$$

$$\Rightarrow i_A(t) = i_{A_0} + \frac{1}{L_A} \cdot \int_0^t [-R_A \cdot i_A(\tau) - K_E \cdot \omega(\tau) + u_{LV}(\tau)] \cdot d\tau$$

Man beachte: Wenn der Motor im Leerlauf arbeitet und mit der (am Typenschild angelegten) Nennspannung  $U_0$  versorgt wird, dann ist  $i_A \approx 0A$  und  $\omega = \omega_0$  (die Leerlaufwinkelgeschwindigkeit) und folglich  $U_0 \approx K_E \cdot \omega_0$  also  $K_E \approx \frac{U_0}{\omega_0}$ .  $K_E$  kann also näherungsweise im Leerlauf bestimmt werden. Durch Umskalierung kann man  $K_E$  auch in  $\left[ \frac{U / \text{min}}{V} = \frac{\text{Leerlaufdrehzahl}}{\text{Anker nennspannung}} \right]$  angeben.

*mechanisches Teilsystem des Motors:*

Antriebsmoment:  $m_{an}(t) = K_T \cdot i_A(t)$

$K_T \hat{=}$  Torquer-Konstante (torque = Drehmoment)

Es ist klar, daß die hier vorgelegten Gleichungen für den Ankerkreis bzw. für das mechanische Teilsystem wiederum nur die einfachste Modellierung darstellen. Der Feldkreis wird hier nur durch die zwei Konstanten  $K_E$  und  $K_T$  berücksichtigt. Damit beschreibt man einigermaßen genau Elektromotoren mit Permanentmagnet als Stator (z.B. die sogenannten „Scheibenläufermotoren“ ). Wird das Feld aber, wie in der obigen Skizze angedeutet, durch eine Feldwicklung erzeugt und ist die Spannung  $U_F$  variabel, dann werden aus den Konstanten  $K_E$  und  $K_T$  Multiplikationsstellen von zwei zeitvariablen Größen.

Auf den nächsten beiden Seiten finden sich Tabellen die aus Liefererkatalogen von elektrischen Kleinmotoren zusammengestellt wurden. Diese verwenden u.a. die oben gebrauchten Abkürzungen (  $K_E$ ,  $K_T$  usw.). Weitere dort auftretende Abkürzungen wie  $\tau_M$  und  $\tau_E$  werden später besprochen. Eine gut lesbare Einführung in die Modellierung von solchen Kleinmotoren und deren Einsatz bei regelungstechnischen Aufgabenstellungen bietet das Buch von

Kenjo, Nagamori: „**Permanent - Magnet and Brushless DC Motors**“;  
Clarendon Press Oxford, 1995, ISBN 0 -19-856217-9

Schließlich sei auf folgendes hingewiesen: Bei verlustfreien Maschinen und bei Verwendung des MKSA-Systems müssen die beiden Konstanten  $K_E$  und  $K_T$  gleich sein und es muß gelten  $K_E = K_T = 1$ . ( Der Beweis hierfür ist recht einfach und bleibt deshalb Ihnen überlassen! ).  $K_E = K_T = 1$  gilt sehr gut bei „großen“ Maschinen, weil diese normalerweise auch einen großen Wirkungsgrad ( d.h. geringe Verluste ) haben. Bei Kleinmaschinen gilt dies nicht mehr. Immerhin zeigen uns die Tabellen, daß noch  $K_E \approx K_T$  gilt.

## Verschiedene Herstellerdaten von Kleinmotoren

Item	Manufacturers	Yasukawa Electric Mfg. Co., Ltd.			Olympus Opto Electronics Co., Ltd.			
		UGMMEM -06AA1	UGMMEM -13AA-	UGMMEM -25AA1	OMS-312	OMS-512	OMS-1024	OMS-2024
Inertia $J$	$10^{-6} \text{ kg m}^2$	56.7	141	283	0.13	0.22	0.58	1.73
Electrical time constant $\tau_E$	ms	1.1	1.5	1.3	0.09	0.11	0.2	0.28
Mechanical time constant $\tau_M$	ms	4.7	4.6	3.6	10	10	9.5	9.5
Torque constant $K_T$	$10^{-2} \text{ N m A}^{-1}$	10	17.8	19.3	0.85	0.89	2.3	2.1
Back-e.m.f. constant $K_E$	$10^{-2} \text{ V s rad}^{-1}$	10	17.8	19.3	0.85	0.89	2.3	2.3
Armature resistance $R_a$	$\Omega$	0.84	1.03	0.47	5.3	3.6	6.3	2.6
Power rate	$\text{kW s}^{-1}$	6.1	11.5	21.5	0.069	0.11	0.29	0.36
Rated continuous torque $T$	$10^{-1} \text{ N m}$	5.9	13	25	0.03	0.05	0.13	0.25
Rated rotational speed $\Omega$	r.p.m.	3000	3000	3000	10500	10500	9200	9200
Rated output $P_o$	W	185	401	771	3	5	10	20
Rated voltage	V	40.5	68.5	70.9	12	12	24	24

Notes. Original data is converted to SI units.

Rotor. The coil is evenly fixed using epoxy resin and glass tape (see Fig. 2.14). Alnico magnets are used for field system.

$$\text{Power rate} = \frac{\text{Rated torque}}{J^2}.$$

See Section 7.6.1 for power rate.

Tabelle von Moterkenngrößen wie sie auch bei der Modellbildung zum Einführungsbeispiel Verwendung finden.

## Weitere Herstellerdaten von Kleinmotoren

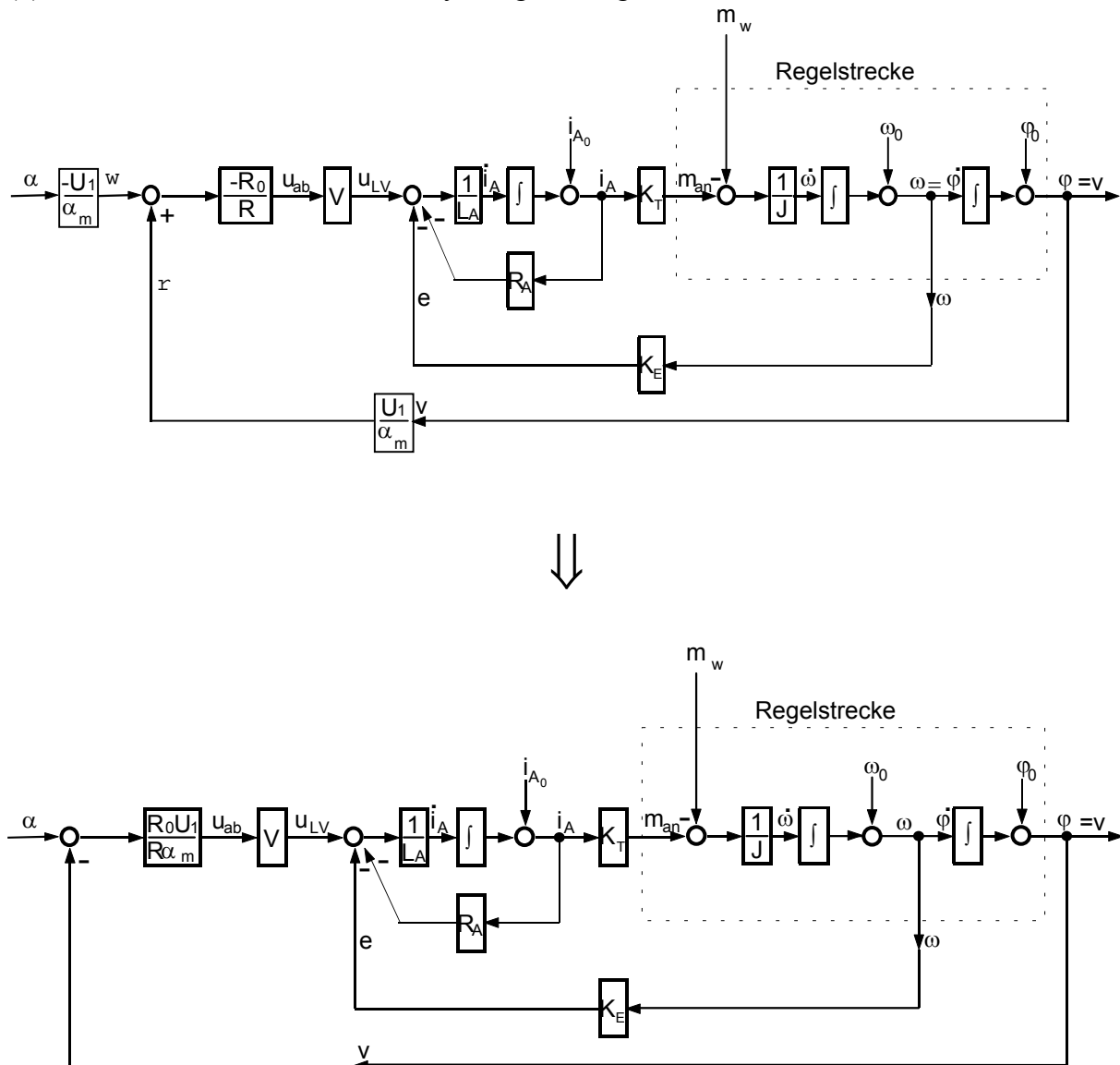
Manufacturers and models	Cylindrical rotor, outside field				Cylindrical rotor, inside field				Printed rotor	
	Tamagawa Seiki Co., Ltd.				Namiki Precision Jewel Co., Ltd.				Yasukawa Electric Mfg. Co., Ltd.	
	M-1600 -A	M-1020 -A	TS3516 -E17	TS3513 -E5	12-2006	12-3006	16-2004	16-2501	UGPMEN -90DAB	UGPMEE -09B12
Inertia $J$ ( $10^{-6}$ kg m <sup>2</sup> )	2.2	3.3	28	2.75	0.0039	0.016	0.022	0.043	43	34
Electrical time constant $\tau_E$ (ms)	0.1	0.12	0.4	0.12	0.008	0.005	0.007	0.012	0.043	0.06
Mechanical time constant $\tau_M$ (ms)	0.5	3.8	1.3	3.2	3.5	5.8	13.9	6.6	8.0	37
Torque constant $K_T$ ( $10^{-2}$ N m A <sup>-1</sup> )	6.7	2.54	16.4	5.41	0.69	1.12	0.29	2.02	5.0	3.2
Back-e.m.f. constant $K_E$ ( $10^{-2}$ V s rad <sup>-1</sup> )	6.7	2.54	16.4	5.41	0.69	1.12	0.29	2.02	5.0	3.2
Armature resistance $R_a$ ( $\Omega$ )	0.8	0.7	1.23	3.2	39	46	6	63	0.46	1.02
Power rate (kw s <sup>-1</sup> )	280	12.3	40.8	5.9	—	—	—	—	1.3	0.15
Rated continuous torque $T$ ( $10^{-1}$ N m)	8.5	3.3	10.8	1.27	S0.0012	S0.028	S0.020	S0.038	2.38	0.72
Rated rotational speed $\Omega$ (r.p.m.)	4500	4000	2100	3850	N10000	N10000	N12600	N5600	4000	4000
Rated output $P_0$ (W)	375	130	200	50	0.23	0.53	0.48	0.4	100	30
S: Starting torque N: No-load torque Rotor: Faulhaber winding									Alnico magnet	Ferrite magnet

This table is re-edited from manufacturers' catalogues.

Tabelle von Motorkenngrößen wie sie auch bei der Modellbildung zum Einführungsbeispiel Verwendung finden.

Getriebe: 
$$i = \frac{\omega_{\text{Last}}}{\omega_{\text{Motor}}} = 1$$
 bei uns vorläufig

(3) Strukturbild zu den einfachsten Systemgleichungen:



**Bild 2.1:** Strukturbild zum Einführungsbeispiel. Oben: direkte Modellierung entsprechend der gerätetechnischen Darstellung. Unten: Modellierung nach Ausklammern von  $-U_1/\alpha_m$

(4) Zustandsmodell des Regelsystems ablesen

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega ; & \phi(0) &= \phi_0 ; \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{J} \cdot (K_T \cdot i_A - m_w) ; & \omega(0) &= \omega_0 ; \\ \dot{i}_A &= \frac{1}{L_A} \cdot \left[ -R_A \cdot i_A - K_E \cdot \omega + V \cdot \left( \frac{R_0 \cdot U_1}{R \cdot \alpha_m} \right) \cdot (\alpha - \phi) \right] ; & i_A(0) &= i_{A_0} ; \\ v &= \phi ; \end{aligned}$$



Darstellung in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K_T/J \\ -V/L_A \cdot \left(\frac{R_0 \cdot U_l}{R \cdot \alpha_m}\right) & -K_E/L_A & -R_A/L_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \\ i_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/J \\ V/L_A \cdot \left(\frac{R_0 \cdot U_l}{R \cdot \alpha_m}\right) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ m_w \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \omega(0) \\ i_A(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \omega_0 \\ i_{A0} \end{pmatrix};$$

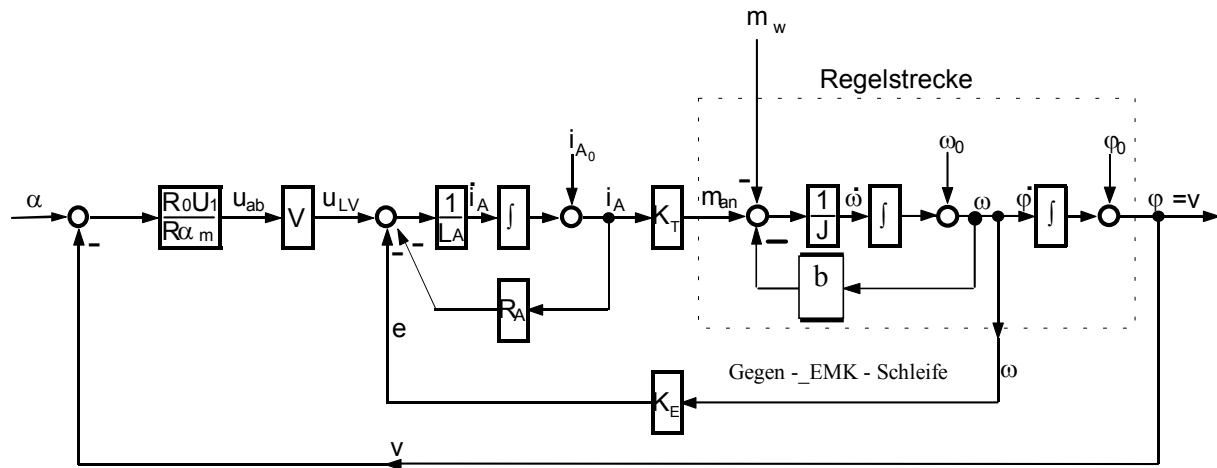
$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \\ i_A \end{pmatrix};$$

Abkürzende Notation:  $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u} \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$

$$v = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + \underline{d}^T \cdot \underline{u} \quad (\text{„d“ im obigen Beispiel 0})$$

**Nachtrag** Es wurde schon bei der Aufstellung der Systemgleichungen klar, daß dieses mathematische Modell immer noch unzulässige Vereinfachungen enthält. Eine dieser Vereinfachungen soll sogleich aufgehoben werden: Betrachtet man sich das Strukturbild (dargestellt in Bild 2.1), so erkennt man, daß bei abgeklemmter Motorspannung (dann gilt auch  $i_A = 0$ ) und verschwindendem Windmoment der mechanische Antrieb sich ungedämpft weiterdreht wenn er vorher in Bewegung gesetzt war. Tatsächlich läuft das mechanische Teilsystem („Regelstrecke“) aus.

In der Tat berücksichtigt man diesen Effekt bei elektrischen Antrieben durch einen sogenannten Dämpfungsfaktor. (Dieser modelliert die stets vorhandene geschwindigkeitsproportionale, mechanische Dämpfung und wird häufig experimentell ermittelt. „Auslaufversuch“). Dann verfeinert sich die Blockstruktur wie folgt:



**Bild 2.1.1:** Strukturbild zu einer ersten Modellverfeinerung. Hier: Berücksichtigung der geschwindigkeitsproportionalen mechanischen Dämpfung. Die (immer vorhandene) Gegen-EMK-Schleife ist hier gekennzeichnet



Erstellen Sie anhand des erstmalig verfeinerten Strukturbildes ein Zustandsmodell des Regelsystems in Matrizenschreibweise.



„Ein jeder stutzt, der Unbegreifliches hört.“ Goethe, Faust II

## 2.4. Bearbeitung von mathematischen Modellen durch Simulation

Es wird ein bekanntes Standardverfahren einige und professionelle Simulationssprachen vorgestellt.

### 2.4.1. Das EULER'sche Polygonzugverfahren

*Methode der Vorwärtsdifferenzen:*

$$\dot{\varphi}(t) \approx \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} ; \quad \dot{\omega}(t) \approx \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} ; \quad \dot{i}_A(t) \approx \frac{i_A(t + \Delta t) - i_A(t)}{\Delta t} ;$$

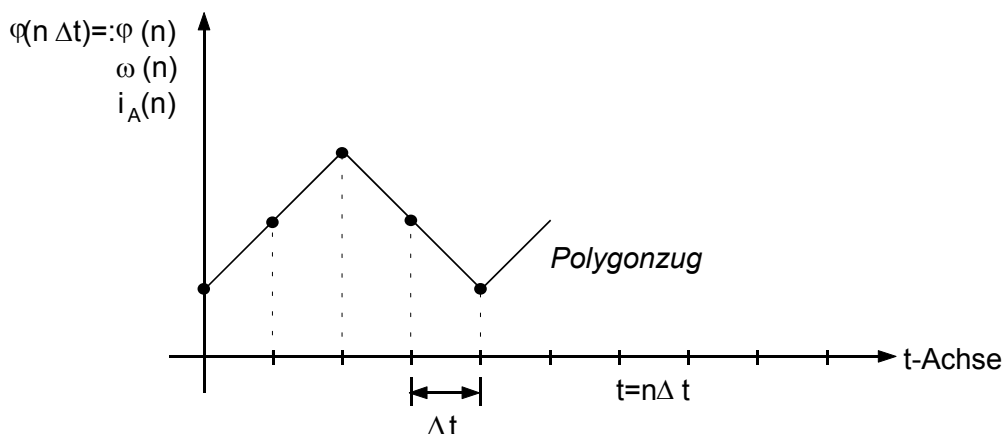
Einsetzen in das Zustandsmodell von Seite 13 und die Ungefähr-Zeichen „ $\approx$ “ ( eigentlich unzulässig ) durch Gleichheitszeichen ersetzt liefert nach Umstellen:

$$\Rightarrow \quad \varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \Delta t \cdot \omega(t)$$

$$\omega(t + \Delta t) = \omega(t) + \Delta t \cdot \left[ \frac{K_T}{J} \cdot i_A(t) - \frac{1}{J} \cdot m_w(t) \right]$$

$$i_A(t + \Delta t) = i_A(t) + \Delta t \cdot \left[ -\frac{R_A}{L_A} \cdot i_A(t) - \frac{K_E}{L_A} \cdot \omega(t) + \frac{V}{L_A} \cdot \left( \frac{R_0 \cdot U_1}{R \cdot \alpha_m} \right) \cdot (\alpha - \varphi) \right]$$

Nun rastere man die Zeitachse mit der Schrittweite  $\Delta t$ . Die Werte  $\varphi, \omega, i_A$  können dann nicht mehr zu jedem Zeitpunkt, sondern nur noch als isolierte Punkte im Abstand  $\Delta t$  näherungsweise berechnet werden. Verbindet man diese Punkte durch Geradenstücke, dann erhält man einen Polygonzug.



*Algorithmus:*

*Vordefinitionen:*

Variablen :  $n = 0; \Delta t$  ( Laufindex, Schrittweite, )

Konstanten :  $K_T = \dots; J = \dots; \dots$  ( Systemparameter)

Startwerte :  $\varphi(0), \omega(0), i_A(0)$

*Schleife:*  $m_w(n), \alpha(n)$  {Eingangswerte 'holen'; z.B. aus FUNCTION }

{Wertberechnung}

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + \Delta t \cdot \omega(n)$$

$$\omega(n+1) = \omega(n) + \Delta t \cdot \left[ \frac{K_T}{J} \cdot i_A(n) - \frac{1}{J} \cdot m_w(n) \right]$$

$$i_A(n+1) = i_A(n) + \Delta t \cdot \left[ -\frac{R_A}{L_A} \cdot i_A(n) - \frac{K_E}{L_A} \cdot \omega(n) + \frac{V}{L_A} \cdot \left( \frac{R_0 \cdot U_1}{R \cdot \alpha_m} \right) \cdot (\alpha(n) - \varphi(n)) \right]$$

{Werte umspeichern; *update past values*}

$$\varphi(n) = \varphi(n+1)$$

$$\omega(n) = \omega(n+1)$$

$$i_A(n) = i_A(n+1)$$

{Laufindex erhöhen}

$$n = n + 1$$

*wiederhole Schleife*



**Versuchen Sie, das Zeitverhalten des Regelsystems mit Hilfe des EULER'schen Polygonzugverfahrens zu simulieren.**

**Als Systemparameter sind folgende Werte zu verwenden :**



Es gelte (vgl. Bilder 2.1 bzw. 2.1.1):

$$R_A = 0,5 \, \Omega$$

$$L_A = 7,29 \, \text{mHy}$$

$$J = 0,07 \, \text{kgm}^2$$

$$V = 5$$

$$K_T = 0,945 \, \text{Nm/A}$$

$$K_E = 0,935 \, \text{V/(rad/sec)}$$

$$U_1/\alpha_m = 3,1 \, \text{V/rad}$$

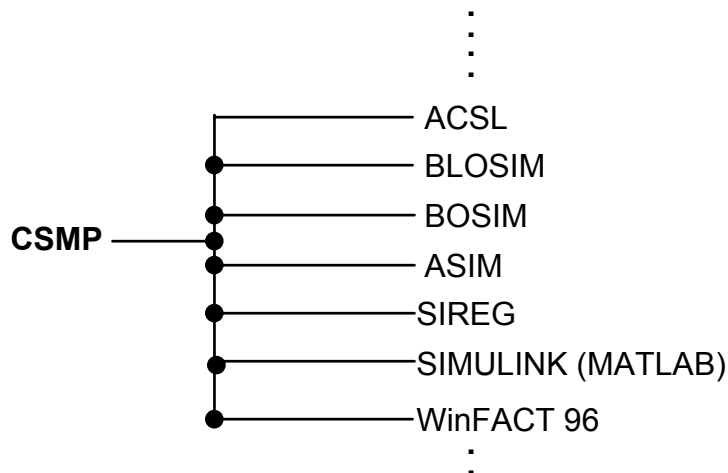
$$U_1/\varphi_m = 3,1 \, \text{V/rad}$$

$$b = 2,2 \cdot 10^{-4} \, \text{Nm/(rad/sec)}$$

Für  $R_0/R =: K_p$  sollten Sie verschiedene Werte einsetzen.

### 2.4.2. Professionelle Simulationssprachen

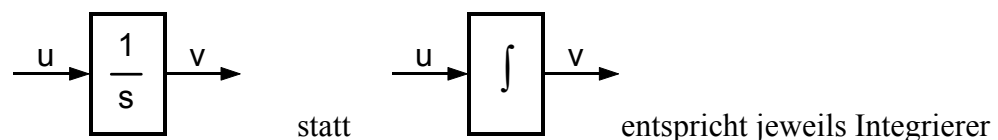
Mit dem Aufkommen des Zustandsraumkalküls entstanden Simulationssprachen die sich daran bzw. an Strukturbilddarstellungen orientierten. Die erste dieser Simulationssprachen ist vielleicht CSMP von IBM gewesen. Diese Simulationssprache gilt als Vorbild für viele professionelle Sprachen.



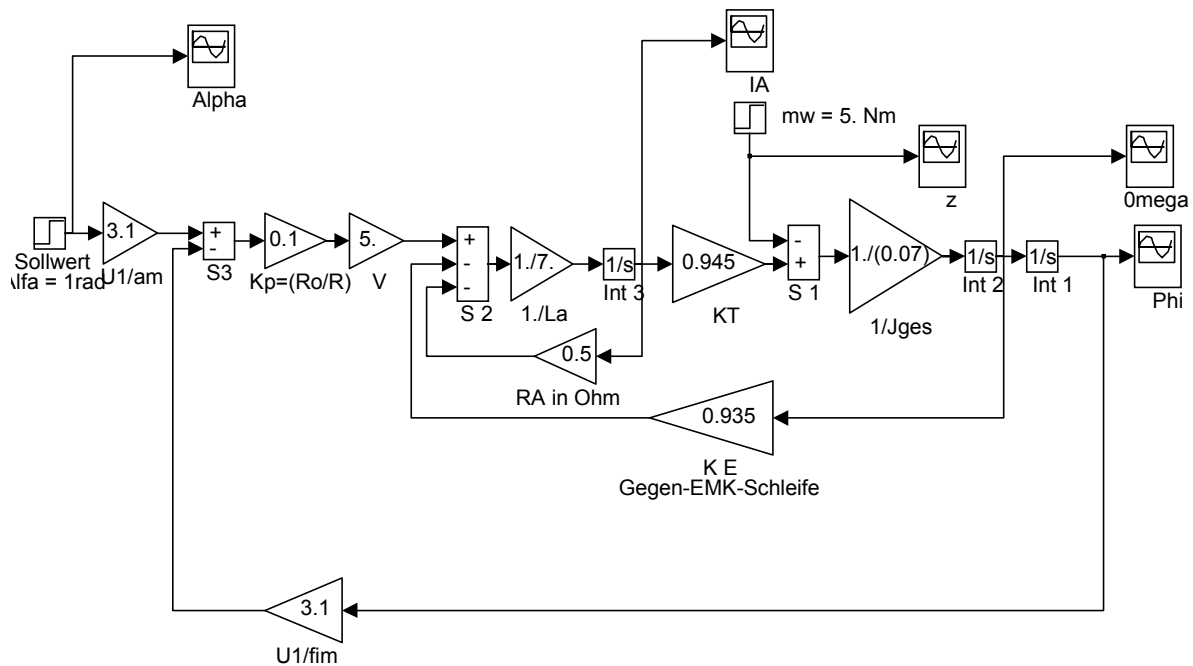
Es sollen ein paar Bemerkungen zu MATLAB (MATrix LABoratory) gemacht werden. Hierbei handelt es sich um ein matrix-orientiertes Programmpaket für ingenieurwissenschaftliche Berechnungen. Es gilt international als die Standardsoftware für Probleme der regelungstechnischen und systemtheoretischen Praxis. Interessanterweise besitzen alle in MATLAB verwendeten Variablen den Datentyp 'Matrix' (array), so daß auch Skalare stets die Felddimension 1x1 besitzen.

SIMULINK ist ein Programmpaket, das zusammen mit MATLAB für die Modellierung, Simulation und Analyse von dynamischen Systemen verwendet wird. Wir nutzen es zur Behandlung von Regelsystemen. SIMULINK arbeitet blockorientiert, d.h. man bildet den Regelkreis nach, indem man grafisch Einzelsymbole wie im Strukturbild verknüpft. Die Simulation des Systemverhaltens ist interaktiv - ändert man die Parameter im Strukturbild, sieht man den Effekt unmittelbar an den gezeichneten Kurven.

Bei der im Praktikum verwendeten SIMULINK-Simulation wird u.a. folgendes Symbol verwendet:



Auf der nächsten Seite findet sich eine Hardcopy des Monitorbildes für die SIMULINK-Simulation des Einführungsbeispiels. Die mechanische Dämpfung „b“ wird allerdings noch nicht mit berücksichtigt. Man vergleiche auch mit dem Strukturbild des Regelsystems ( Bild 2.1 in Abschnitt 2.3 ) .



**Bild 2.2:** Zur SIMULINK-Simulation des Einführungsbeispiels. „Einfachstes Modell“. Man vergleiche mit den zugehörigen Strukturbildern 2.1. Folgende Parameter wurden verwendet (Vgl 2.4.1):

$R_A = 0,5 \, \Omega$	$K_T = 0,945 \, \text{Nm/A}$	$V = 5$
$J = 0,07 \, \text{kgm}^2$	$L_a = 0,00729 \, \Omega \text{s}$	$K_E = 0,935 \, \text{V/(rad pro s)}$
$U_1/\varphi_m = 3,1 \, \text{V/rad}$		$U_1/\alpha_m = 3,1 \, \text{V/rad}$

Auf der Grundlage dieser SIMULINK-Simulation entstanden die Simulationsergebnisse wie sie in den Bildern 2.4 und 2.5 dargestellt sind.

Allen diesen Simulationen ist gemeinsam, daß stets ein Sollwertsprung von  $1 \text{ rad} \approx 57,2^\circ$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  aufgeschaltet wird, während das Störmoment noch  $m_w = 0$  ist.

Nach 2,5 sec. wird dann noch zusätzlich ein Störsprung von 5 Nm aufgeschaltet.

Bevor die Simulationsergebnisse zu diesem „einfachsten Modell“ besprochen werden, noch weitere Anmerkungen zu möglichen (bzw. notwendigen ) Modellverfeinerungen.

## 2.5. Weitere Modellverfeinerungen

### 2.5.1 Berücksichtigung des Getriebes

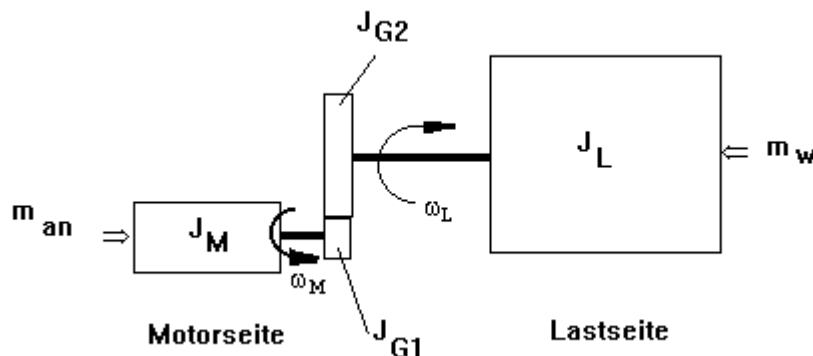
Mit den Bezeichnungen der nachstehenden Skizze definiert man als Übersetzungsverhältnis

$$i = \frac{\omega_{\text{Last}}}{\omega_{\text{Motor}}} = \frac{n_{\text{Last}}}{n_{\text{Motor}}} = \frac{\text{Zahnzahl motorseitig}}{\text{Zahnzahl lastseitig}} \quad (*)$$

n – Drehzahl

Die mit (\*) gegebene Definition ist allerdings genau umgekehrt zu der in DIN 804. Dafür gilt

bei uns: „Übersetzung ins Langsame:  $i < 1$ “ und „Übersetzung ins Schnelle  $i > 1$ “.



Es gilt

$$J_{\text{Mges}} = J_{\text{M}} + J_{\text{G1}}$$

$$J_{\text{Lges}} = J_{\text{L}} + J_{\text{G2}}$$

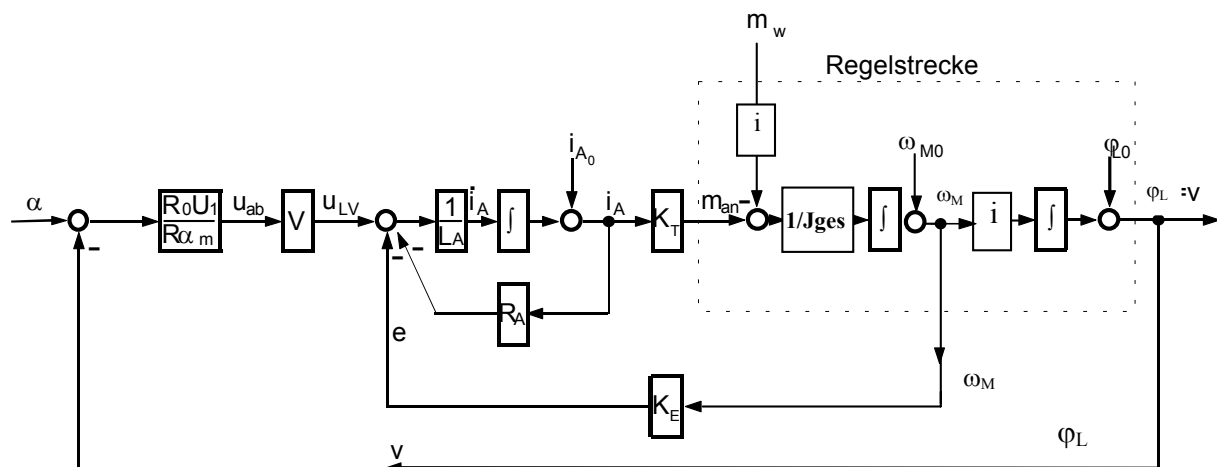
Die Trägheitsmomente aller rotierenden Teile auf die Motorseite (Motorwelle) umgerechnet

ergibt:

$$J_{\text{ges}} = J_{\text{Mges}} + J_{\text{Lges}} \cdot \left( \frac{\omega_{\text{L}}}{\omega_{\text{M}}} \right)^2 \quad \text{bzw.:} \quad J_{\text{ges}} = J_{\text{Mges}} + J_{\text{Lges}} \cdot (i)^2.$$

Das am Spiegel angreifende Windmoment lässt sich ebenfalls auf die Motorwelle umrechnen:

$$m_{\text{w}} \Rightarrow m_{\text{w}}^{\text{I}} = m_{\text{w}} \cdot i$$

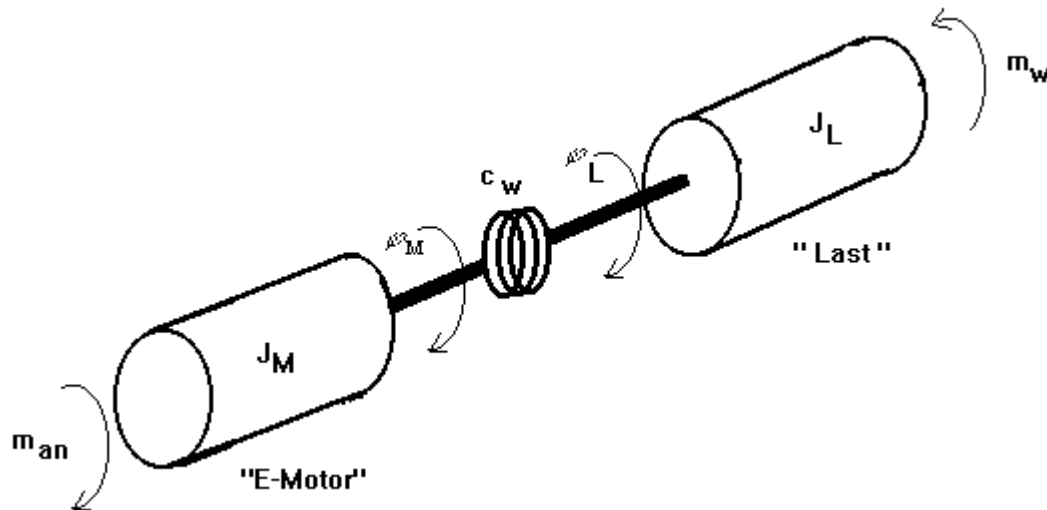


**Bild 2.3:** Strukturbild zum Einführungsbeispiel mit zusätzlicher Berücksichtigung des Getriebes.



### 2.5.2 Berücksichtigung der Wellenelastizität

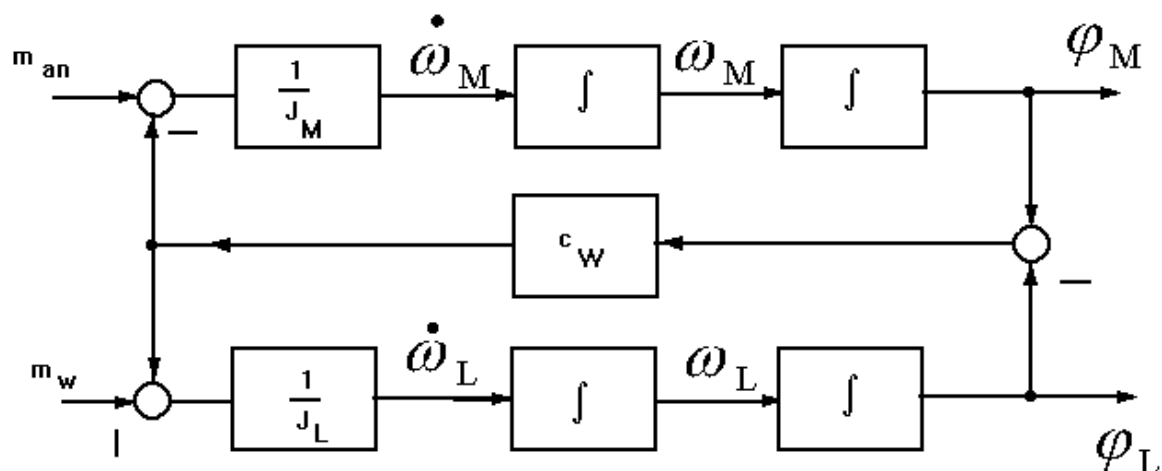
Die Annahme, daß es sich bei dem Antennenschaft (der Antriebswelle) um einen Starrkörper handelt wird nunmehr fallengelassen. Der Schaft wird durch zwei starre Wellenhälften und eine zwischengeschaltete Torsionsfeder nachgebildet. (Das Getriebe wird hier zum Zwecke der besseren Übersicht nicht berücksichtigt:  $i=1$ ). Wir nehmen also folgende Situation an:



Hierfür gilt :

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_M &= \omega_M \\ J_M \cdot \dot{\omega}_M &= m_{an} - c_w \cdot (\phi_M - \phi_L) \\ \dot{\phi}_L &= \omega_L \\ J_L \cdot \dot{\omega}_L &= c_w \cdot (\phi_M - \phi_L) - m_w\end{aligned}$$

Strukturbild hierzu:



Dieses Strukturbild ist in Bild 2.1 geeignet einzusetzen. Die Anschlüsse für die Gegen-EMK-Schleife und die Rückführung des Istwertes sind neu zu verlegen. ( Bitte selber probieren ! )



Versuchen Sie, ein Zustandsmodell des Regelsystems in der Form

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u}; \quad \underline{y} = \underline{c}^T \underline{x}$$

wobei Sie einmal die Modellverfeinerungen von 2.5.1 und einmal diejenigen von 2.5.2 verwenden.



Einige ergänzende Bemerkung zum Thema „mathematische Modellbildung und Simulation“:

Wer sich, ausgehend vom vorliegenden 2. Kapitel, eingehender mit diesem Thema vertraut machen will, dem sei das sehr gute Buch „**SIMULATIONSTECHNIK**“ von M. Neculau und U. Kramer (C. Hanser Verlag) empfohlen. Die dort gewählte Darstellungsweise und die dabei verwendete Nomenklatur ist mit dem vorliegenden Skript gut verträglich. Das genannte Buch geht weit über die im vorliegenden Kapitel angesprochenen Modellierungs- und Simulationsaspekte hinaus.

Weiterhin wurde schon die Simulationssprache SIMULINK andiskutiert. Man anerkennt sofort, daß es sich hierbei um eine - für unsere Zwecke sehr brauchbare - Simulationssprache handelt. Allerdings treten bei SIMULINK-Simulationen die verwendeten OP-Schaltungen nur durch ihre mathematische Beschreibung auf. Das „Innenleben“ dieser Schaltungen wird nicht berücksichtigt; manchmal wäre das sehr hilfreich. Hier sei auf ein SIMULINK-SPIICE-Interface hingewiesen, das es erlaubt, solche detaillierten Simulationen durchzuführen. Für Interessierte sei zur näheren Information die email-Adresse **BauschGall@compuserve.com** angegeben.

Es sei weiterhin auf die Internet - Adresse des Instituts für Regelungstechnik Braunschweig verwiesen: **<http://www.ifr.ing.tu-bs.de>**

Dort können Sie sich unter dem Icon **IfR-Lab 1.0** ein „interaktives Regelungstechnik-Labor“ herunterladen, das für unsere Zwecke noch sehr nützlich sein wird.

Das IFR-Lab befindet sich auch auf unseren Laborrechnern (Server NF-Auto).

Wenn Sie WIN 95 hochfahren und den Ordner „Labor“ aktivieren, dann erscheint das Icon IFR-Lab.

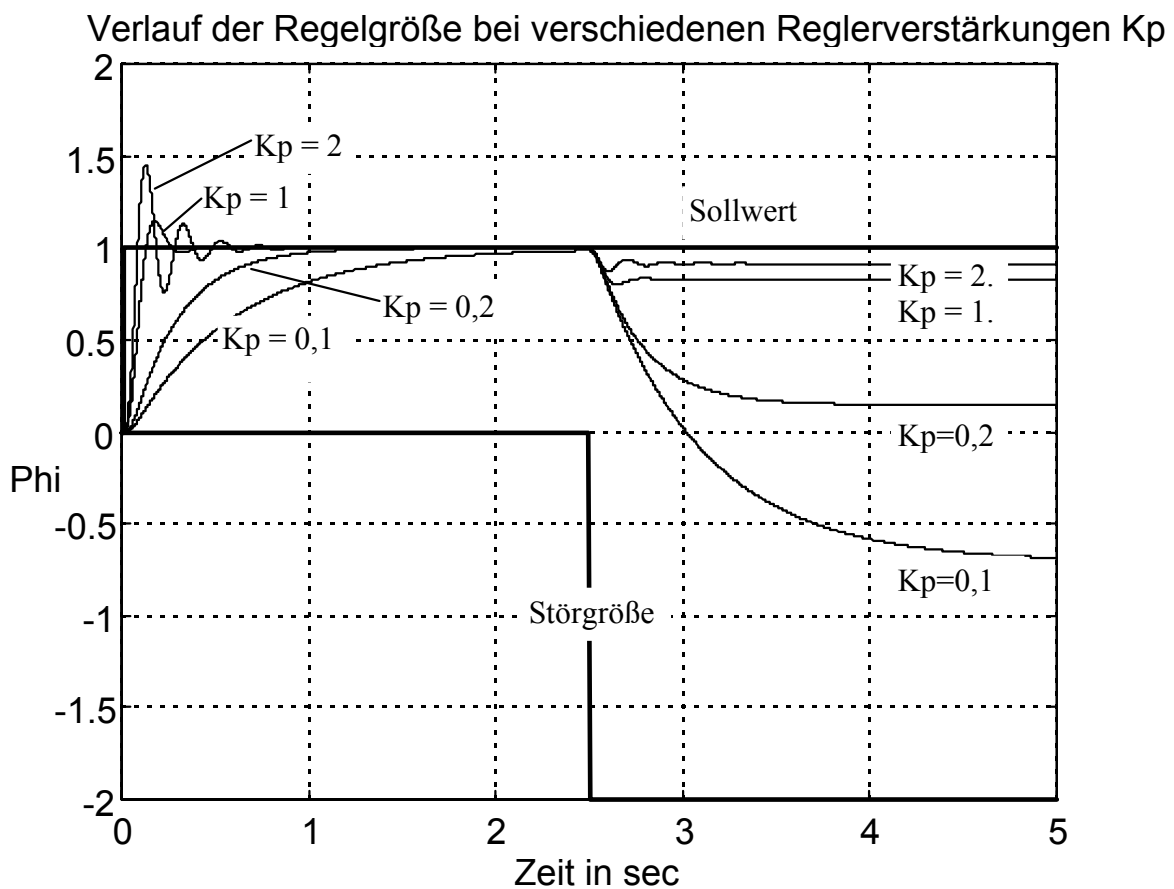
Sehr gute Erfahrungen haben wir in unserem RT-Labor auch mit dem Simulationspaket WINFACT 98 gemacht. Dieses Paket enthält u.a. die Tools „RESI“ (Reglersynthese), „LISA“ (Lineare Systemanalyse), „IDA“ (Systemidentifikation),... . Dieses Paket kann kostenlos vom Internet heruntergeladen werden

(<http://www.kahlert.com> oder auch <http://wwwsoft.nf.fh-nuernberg.de/~kist/> ).

Das Paket WINFACT 98 ist auch auf unseren Laborrechnern installiert.

## 2.6 Simulationsergebnisse für das Einführungsbeispiel auf der Grundlage des „einfachsten Modells“ (vgl. Bild 2.1 und zugehöriges Zustandsmodell)

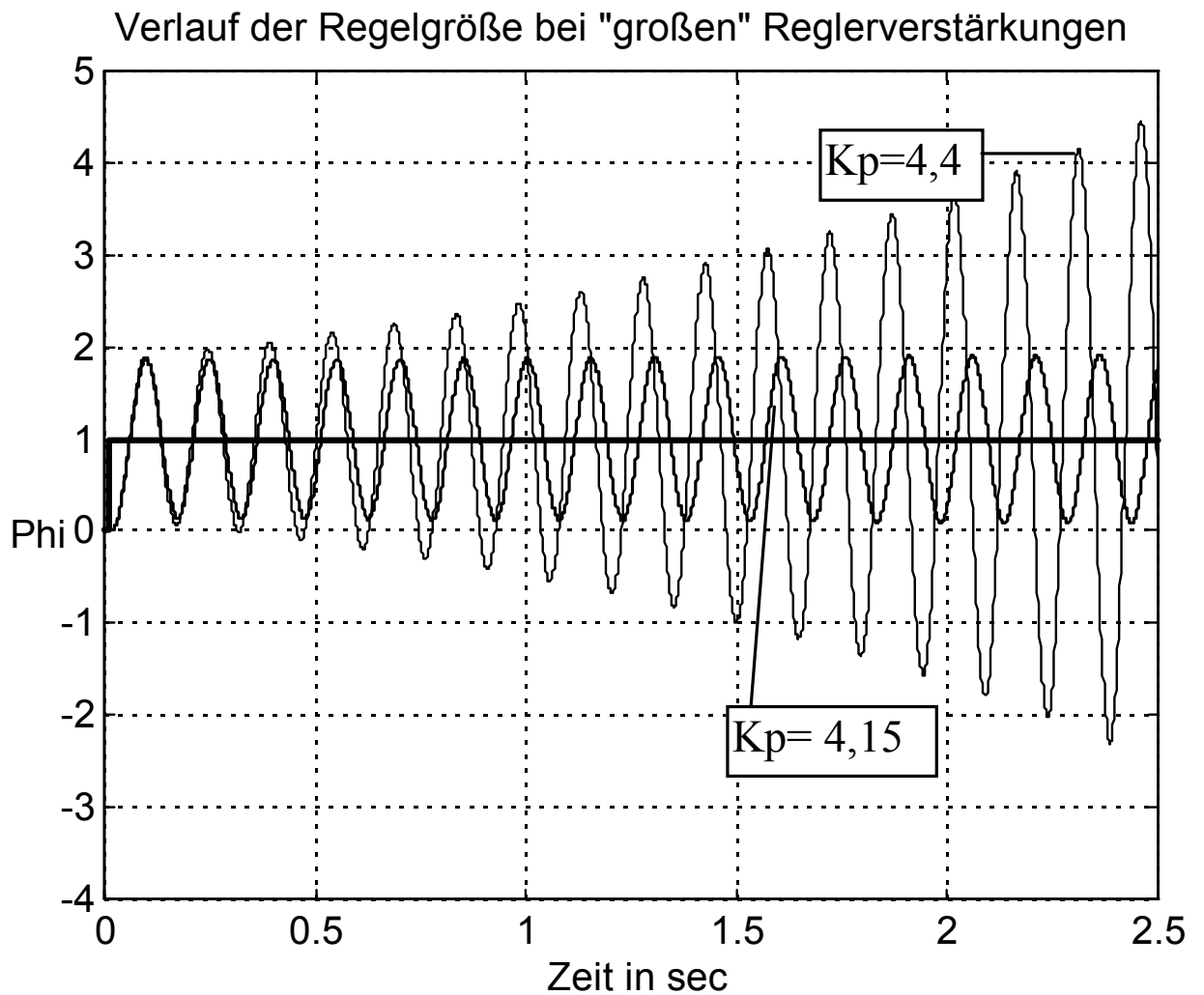
Auf das, als Einführungsbeispiel gegebene, Regelsystem werde ein Sollwertsprung von  $\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 \text{ rad} & \text{für } t > 0 \end{cases}$  geschaltet. Ein Störgrößensprung  $z(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 2,5 \text{ sec} \\ 5 \text{ Nm} & \text{für } t > 2,5 \text{ sec} \end{cases}$  werde ebenfalls zugeschaltet. Im Rahmen der verwendeten Modellierungsgenauigkeit (vgl. Zustandsmodell Seite 13 sowie Bilder 2.1 und 2.2 ) liefert die SIMULINK-Simulation folgende Ergebnisse:



**Bild 2.4:** Verlauf der Regelgröße beim Einführungsbeispiel ('Radarspiegel') in Radiant ( $1 \text{ rad} \approx 57,2^\circ$ ).  $K_p = R_o/R$ . Die anderen Systemparameter sind wie in den Anmerkungen zu Bild 2.2 gegeben.

Man beachte die bleibenden Abweichungen der Istwerte vom Sollwert bei Störsprüngen.

Diese sind immer vorhanden. Allerdings nehmen sie betragsmäßig ab, wenn man die Reglerverstärkung  $K_p$  erhöht. Der Vermutung, man könne diese bleibenden Abweichungen beliebig klein machen ( hierzu bedürfe es lediglich eines hinreichend großen  $K_p$  -Wertes ) ist allerdings falsch wie das nachfolgende Bild 2.5 zeigt.



**Bild 2.5:** Verlauf der Regelgröße beim Einführungsbeispiel ('Radarspiegel').  
 $K_p = 4,15$  - Stabilitätsgrenze;  
 $K_p = 4,4$  ( $> 4,15$ ) - instabiles Regelsystem.

## 2.7 Erste Folgerungen und Verbesserungsvorschläge für den betrachteten Regelkreis anhand der Simulationsergebnisse

### 2.7.1 Erste Folgerungen

Wie bereits unter 1.1.2 erwähnt, findet der Vergleich von (gemessener) Regelgröße und (gemessenem) Sollwert am Operationsverstärker statt. Die verwendete OP-Beschaltung multipliziert das Vergleichsergebnis zusätzlich mit dem Faktor ' $R_o/R$ '.

In der Regelungstechnik spricht man bei der Multiplikation mit einem konstanten Wert von einer 'proportionalen Verstärkung'. Vergleich und Verstärkung zusammen nennt man P-Regelung, den Verstärkungsfaktor (bei uns  $R_o/R$ ) Proportionalbeiwert  $K_P$ .

Liegen sehr niedrige Proportionalbeiwerte vor, so folgt die Regelgröße den aufgeschalteten Eingangssprüngen nur langsam. Auftretende Störungen werden nur schlecht unterdrückt.

Erhöhte Proportionalbeiwerte bedeuten beschleunigtes Folgeverhalten, die bekannte Anstiegszeit  $t_r$  ( $t_r = t_{90\%} - t_{10\%}$ ) nimmt also ab. Gleichzeitig beginnt die Regelgröße bei Sprüngen der Führungsgröße mit wachsendem  $K_P$  immer stärker überzuschwingen; die Störgrößenunterdrückung verbessert sich, bis die Schwingneigung diesen Vorteil wieder

zunichte macht (bei hohen Proportionalbeiwerten ist nur noch die stationäre d.h. bleibende Abweichung akzeptabel).



Bei hinreichend hohen Proportionalbeiwerten kann das gesamte Regelsystem instabil werden



*„Woher willst Du das wissen, Mama?“*

*„Weil der Herr Dr. Karl mir das erzählt hat.“ Hera Lind (Das Weibernetz)*

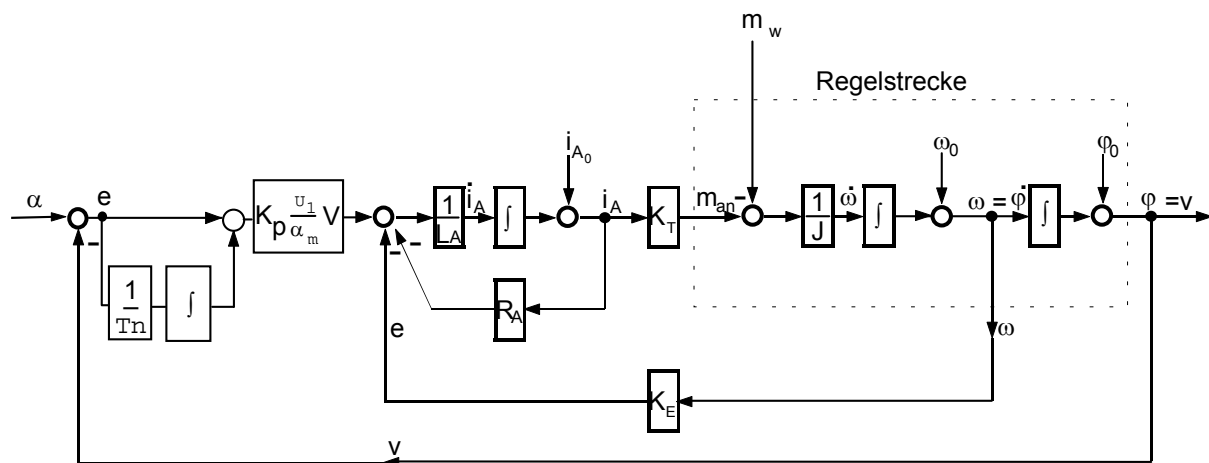
### 2.7.2 Verbesserungsvorschläge

Unser Ziel ist es natürlich, den sogenannten Regelfehler (bei uns die Differenz  $e = \alpha - \varphi$ ) möglichst zu minimieren. Wir fordern deshalb, daß - bei aufgeschalteten Eingangssprüngen - zumindest nach hinreichend langer Zeit die Regelgröße ihren Sollwert annimmt.

Mathematisch formuliert lautet dies:

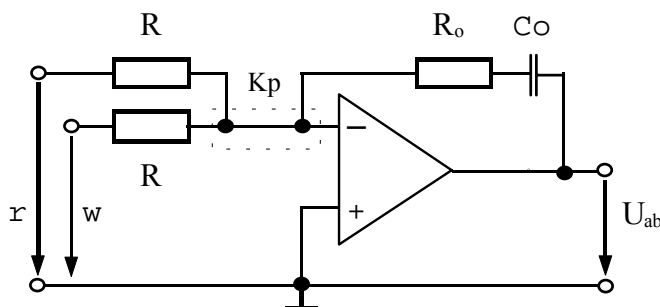
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Intuitiv ist klar, daß man mit einer Struktur wie in Bild 2.6 diesen Grenzwert erreichen kann.



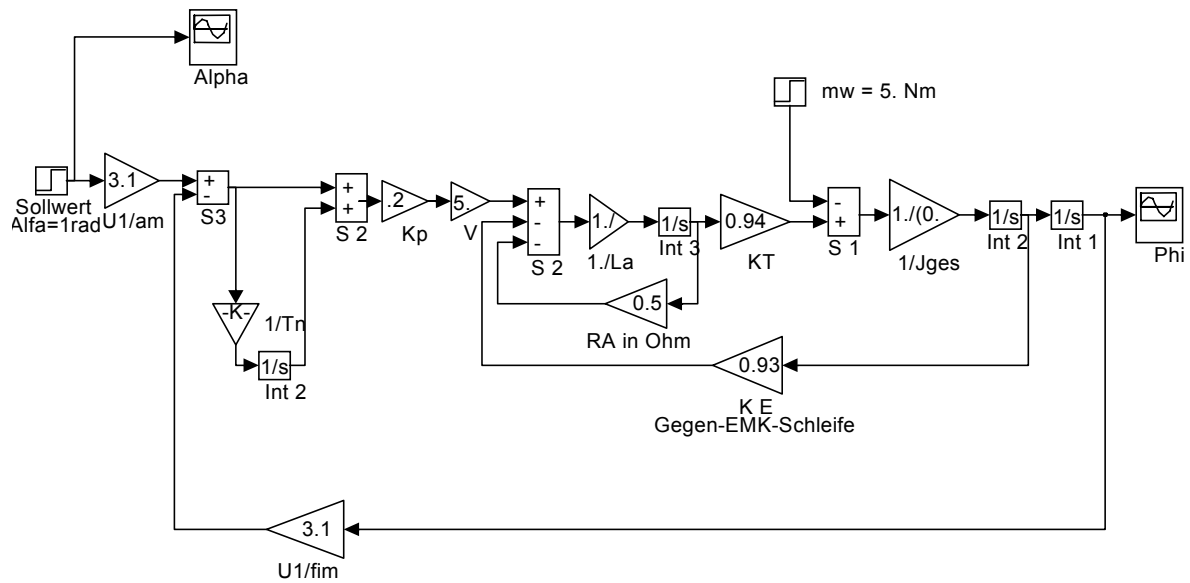
**Bild 2.6:** Strukturbild zum Einführungsbeispiel. Die Regeleinrichtung ist um einen „I-Anteil“ erweitert worden. (PI-Regler). Der I-Anteil ist seinerseits mit dem Faktor  $1/T_n$  gewichtet ( $T_n$  = „Nachstellzeit“ in sec).

Die Erweiterung des bisherigen P-Reglers zu einem PI-Rgler ist schaltungstechnisch einfach zu realisieren. Man betrachte hierzu noch einmal die OP-Schaltung in Bild 1.6. Diese wird nun wie folgt abgeändert:

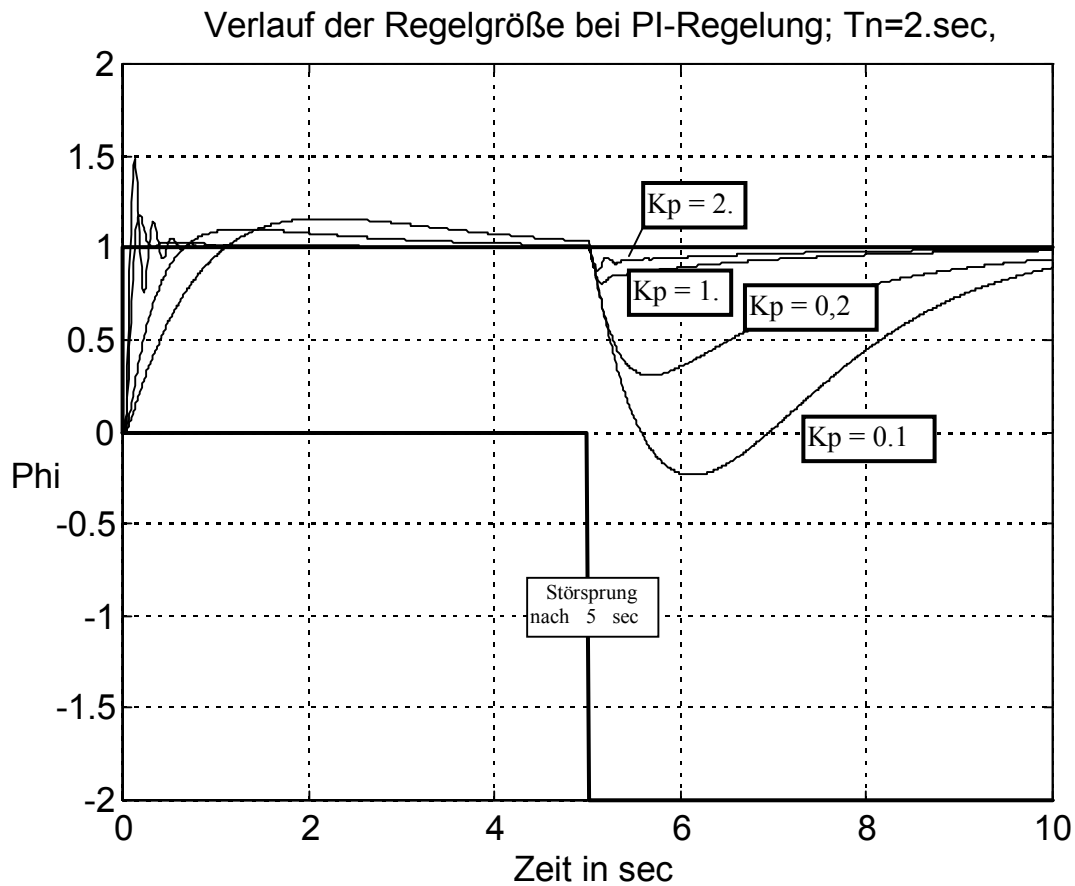


**Aufgabe:** Man berechne  $u_{ab} = f(r, w)$   
(„Kp“ bedeutet bei dieser Skizze „Knotenpunkt“ und nicht Proportionalbeiwert)

Die Simulation einer Regeleinrichtung mit zusätzlichem I-Anteil wird mit folgender SIMULINK-Simulation durchgeführt:



**Bild 2.7:** SIMULINK-Simulation des Einführungsbeispiels. Es wird ein PI-Regler verwendet.



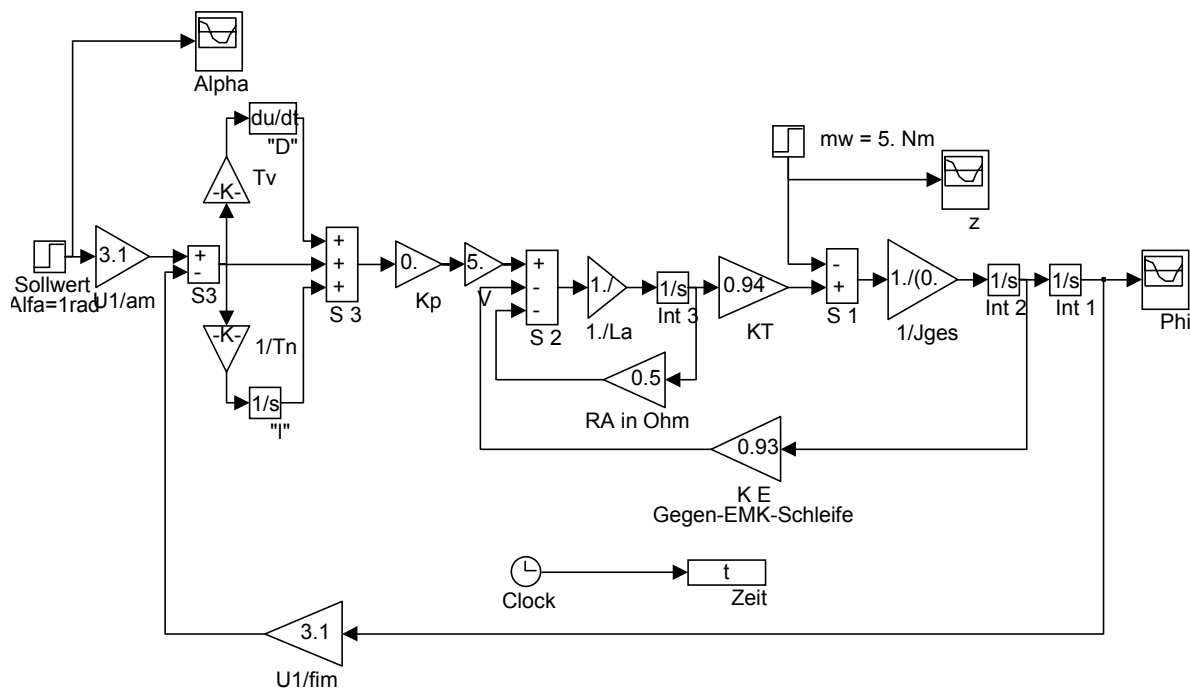
**Bild 2.8:** Verlauf der Regelgröße beim Einführungsbeispiel. Die  $K_p$ -Werte wurden wie in der Simulation zu Bild 2.4 eingestellt ( $K_p = 0.1, 0.2, 1.0, 2.0$ ); Nachstellzeit  $T_n = 2\text{ sec}$ .



Der Einfluß der konstanten Störung ( diese äusserte sich bisher in der bleibenden Abweichung des Istwertes vom Sollwert) wird nunmehr abgearbeitet. Man vergleiche Bild 2.8 mit Bild 2.4.

Der Regler mit I-Anteil ( PI-Regler ) wurde aufgrund von Plausibilitätsüberlegungen eingeführt. Ähnliche Plausibilitätsüberlegungen führen zur Hinzunahme eines zusätzlichen Differenzierers, eines „D-Kanals“ parallel zum P- und zum I-Kanal:

Ein D-Anteil im Regler reagiert auf schnelle Änderungen des sogenannten Regelfehlers d.h. im vorliegenden Fall der Differenz  $e = \alpha - \varphi$  ; man kann damit schnellen Störungen entgegenarbeiten. Eine entsprechende SIMULINK-Simulation zeigt das nachstehende Bild:



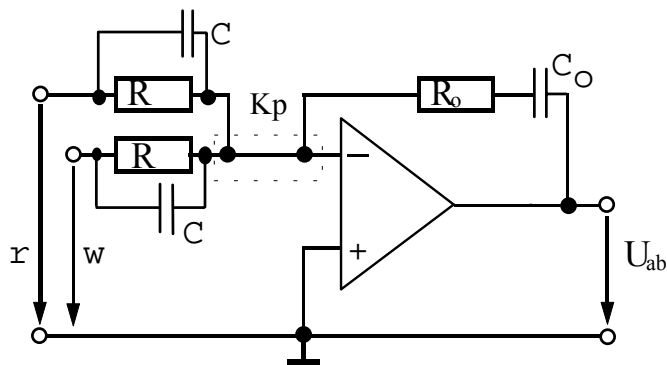
**Bild 2.9:** SIMULINK-Simulation des Einführungsbeispiels. Es wird ein PID-Regler verwendet

Der D-Kanal enthält einen Multiplikator  $T_v$ . Dieser wird als sog. Vorhaltezeit ( in sec) bezeichnet.

Die Frage, wie sinnvollerweise die drei Reglerparameter  $K_p, T_n, T_v$  eingestellt werden sollen, wird uns noch lange beschäftigen.

Eine ( auf versuchsmäßigen Einstellungen beruhende ) Antwort darauf liefern z.B. die Einstellregeln von Ziegler und Nichols. Weitere Einstellregeln geben Chien-Hrones und Reswick an.

Bevor diese Regeln besprochen werden, soll noch die Frage nach der schaltungstechnischen Realisierung eines PID-Reglers beantwortet werden. Eine mögliche Realisierung ist durch folgende Schaltung gegeben.

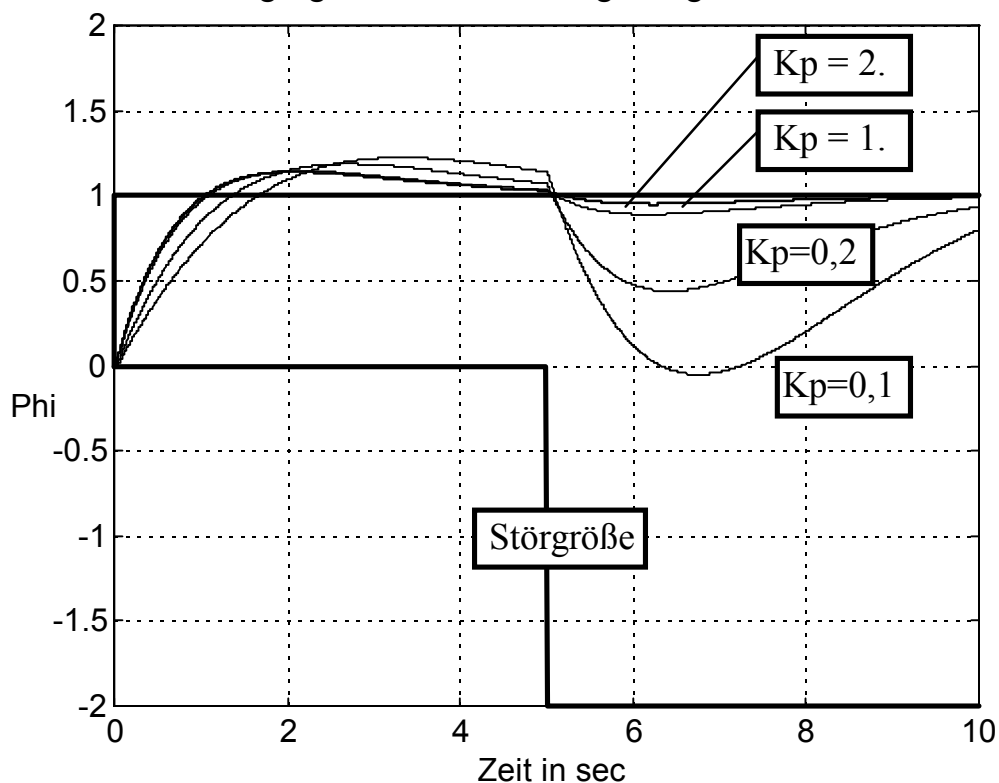


**Aufgabe:** Man berechne  $u_{ab} = f(r, w)$

( „Kp“ bedeutet bei dieser Skizze „Knotenpunkt“ )

Wir werden noch weitere schaltungstechnische Realisierungen eines PID-Reglers kennenlernen.

Verlauf der Regelgröße bei PID-Regelung;  $T_n=2$  s,  $T_v=0.5$  s



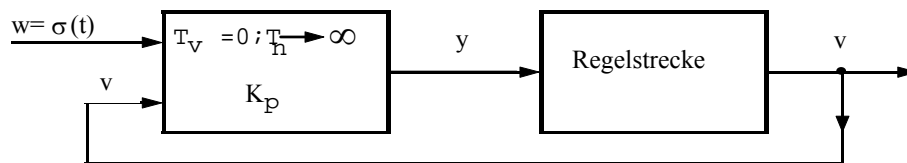
**Bild 2.10:** Verlauf der Regelgröße beim Einführungsbeispiel. Die  $K_p$ -Werte werden wie in der Simulation zu Bild 2.3 eingestellt ( $K_p=0.1, 0.2, 1.0, 2.0$ ). Die Nachstellzeit ist 2 sec, die Vorhaltzeit ist 0,5 sec. Störspaltung nach 5 sec. Geringeres Überschwingen der Regelgröße bei Führungssprüngen. Man vergleiche mit den Bildern 2.4 und 2.8

## 2.8 Reglereinstellung ( - parametrierung) nach ZIEGLER und NICHOLS

Ziegler und Nichols ermittelten empirisch Einstellregeln für P, PI und PID - Regler. Die mit dieser Methode erzielbaren Richtwerte sind grob ( und manchmal unbrauchbar ), jedoch in der Praxis manchmal schnell und zuverlässig zu ermitteln.

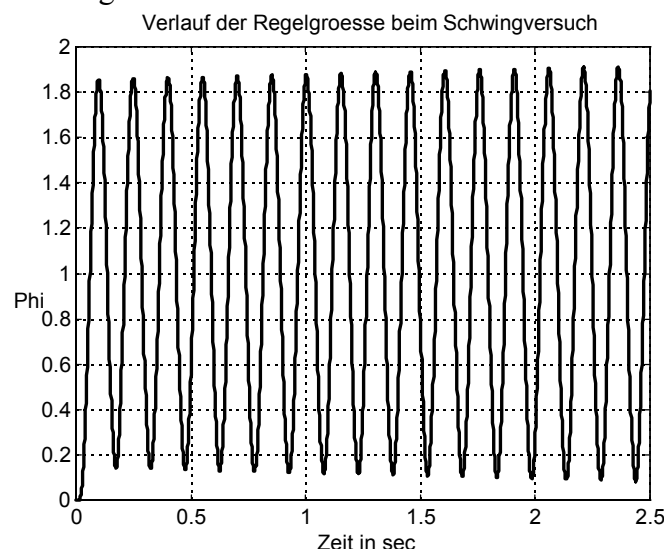
Es handelt sich hierbei um den vielgerühmten 'Schuß aus der Hüfte'. Das zugrundeliegende Vorgehen nennt man den Schwingversuch.

Beim Schwingversuch stellt man die Vorhaltezeit  $T_V$  auf Null, die Nachstellzeit  $T_n \Rightarrow \infty$  ein. Da praktisch  $T_n = \infty$  nicht gesetzt werden kann, stellt man  $T_n$  deshalb auf den maximalen Wert. Man erhält damit (mehr oder weniger) einen reinen P-Regler. Seinen Proportionalbeiwert  $K_p$  drehe man auf den Minimalwert zurück.



Als Führungsgröße schalte man wiederholt Sprungfunktionen ( im obigen Bild mit  $\sigma(t)$  bezeichnet ) auf und erhöhe mit jedem Mal langsam die Reglerverstärkung  $K_p$ . Dabei beobachte man die Reaktion der Regelgröße  $v(t)$ . Nach mehreren Versuchen wird die Stabilitätsgrenze des Systems erreicht. D.h. derjenige Einstellwert, bei dem  $v(t)$  und alle anderen Systemgrößen ungedämpft schwingen. Praktisch ist es nicht immer ratsam, die Verstärkung bis zum Erreichen der Stabilitätsgrenze aufzudrehen. Es genügt bei praktischen Anwendungen vollauf, wenn die gemessene Ausgangsgröße 6 - 8 feststellbare Schwingungsperioden durchläuft. Im Falle einer Simulation kann man den Schwingungsversuch natürlich bis zur Stabilitätsgrenze durchführen, was im Fall des Einführungsbeispiels getan wurde.

An der Stabilitätsgrenze stellt man den Wert der kritischen Reglerverstärkung und die kritische Periodendauer der sich einstellenden Schwingung fest. Dies sei anhand des Einführungsbeispiels durchgeführt:



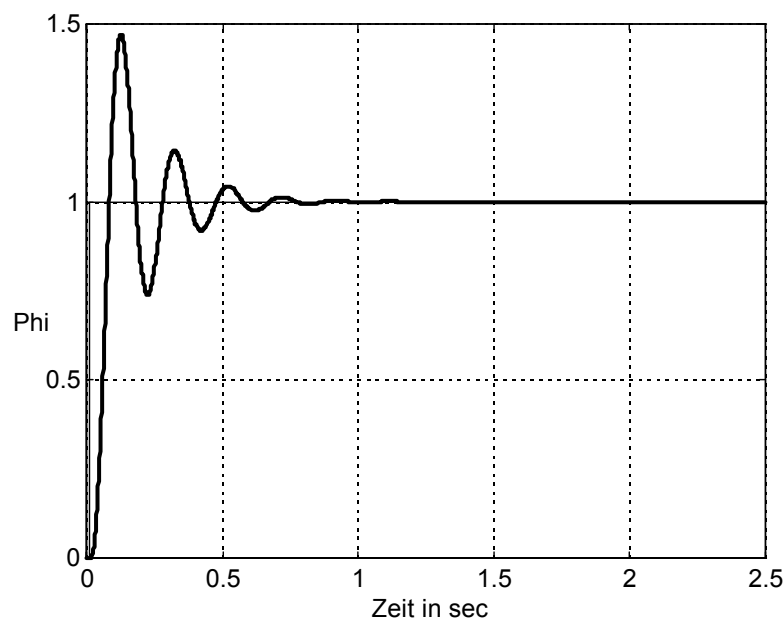
**Bild 2.11:** Durch Simulation erzeugter Schwingfall.  $K_{P,krit} = 4,15$  ;  $T_{krit} = 0,151$  sec (aus diesem Bild herausgemessen).

Nun geben ZIEGLER und NICHOLS folgende Einstellregeln an:

Reglertyp	Reglerparameter		
	$K_p$	$T_n$	$T_v$
P-Regler	$0,5 \cdot K_{p,krit}$	--	--
PI-Regler	$0,45 \cdot K_{p,krit}$	$0,85 \cdot T_{krit}$	--
PID-Regler	$0,6 \cdot K_{p,krit}$	$0,5 \cdot T_{krit}$	$0,125 \cdot T_{krit}$

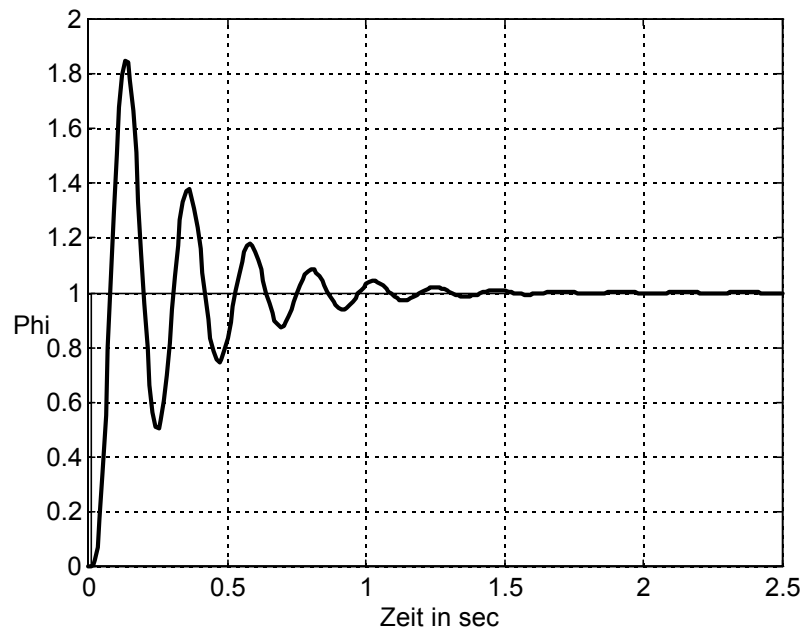
Diese Einstellregeln wurden auf das schon bisher betrachtete Einführungsbeispiel angewendet. Es ergeben sich die folgenden Simulationsergebnisse:

### Reine P-Regelung:



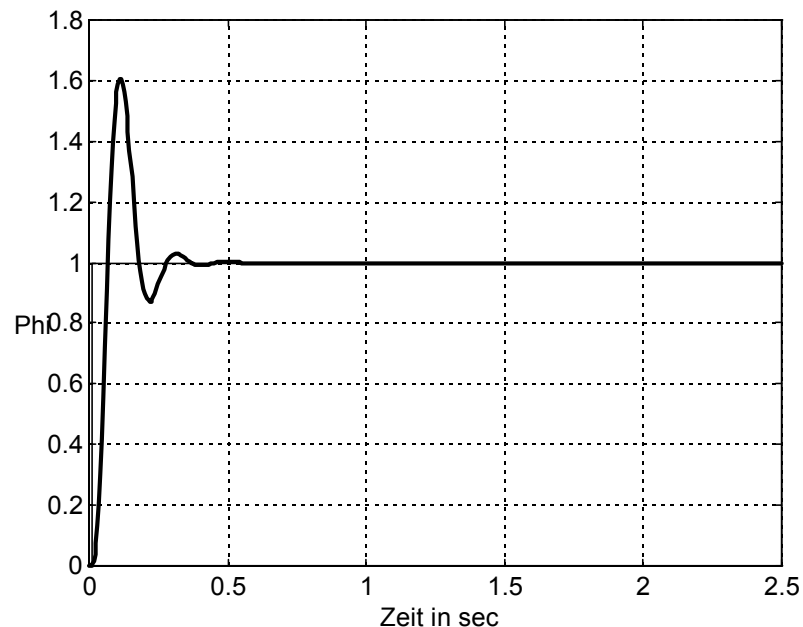
**Bild 2.11:** *P-Reglereinstellung nach ZIEGLER und NICHOLS ( Schwingversuch )*  
 Die eingestellten Werte liegen bei  $K_p = 0,5 \cdot K_{p,krit} = 2,075$

Für das vorgelegte Beispiel gilt zumindest: Die Regelgröße weist bei Sprüngen der Führungsgröße ein starkes Überschwingen auf.

**PI-Regelung:****Bild 2.12:** PI-Reglereinstellung nach ZIEGLER und NICHOLS (Schwingversuch)

Die eingestellten Werte liegen bei  $K_p = 0,45 \cdot K_{p,krit}$ ;  $T_n = 0,85 \cdot T_{krit}$

Die Regelgröße weist ein noch größeres Überschwingen auf als bei P-Regelung. Wenig brauchbare Realisierung.

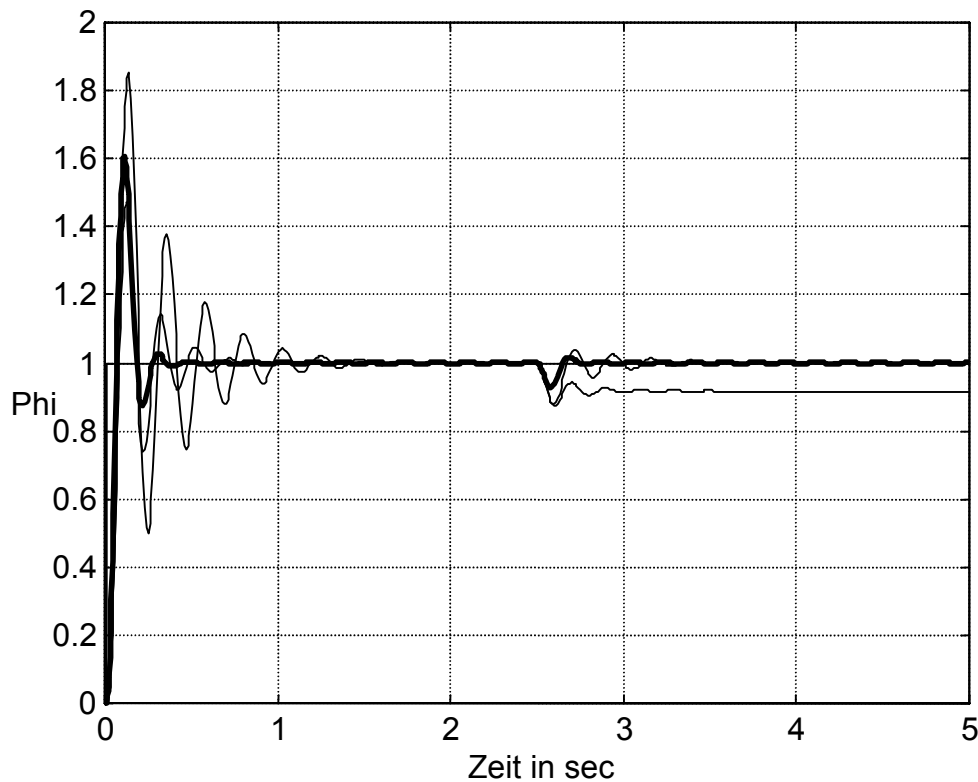
**PID-Regelung****Bild 2.13:** PID-Reglereinstellung nach ZIEGLER und NICHOLS (Schwingversuch)

Die eingestellten Werte liegen bei  $K_p = 0,6 \cdot K_{p,krit}$ ;  $T_n = 0,5 \cdot T_{krit}$ ;

$T_v = 0,125 \cdot T_{krit}$

Verbessertes Folgeverhalten gegenüber der P-Regelung und PI-Regelung. Das Überschwingen der Regelgröße auf Sollwertsprünge ist immer noch unbefriedigend hoch. Allerdings wird nun der Endwert nach einer wesentlich kürzeren Zeit angenommen.

Zum Schluß soll noch das Störverhalten bei diesen Reglereinstellungen betrachtet werden. Hierzu wird ein Störsprung von 5 Nm simuliert der nach 2,5 sec aufgeschaltet wird:



**Bild 2.14:** *Reglereinstellungen nach ZIEGLER und NICHOLS (Schwingversuch)*  
Die eingestellten Werte liegen bei  $K_p = 0,6 \cdot K_{p,krit}$ ;  $T_n = 0,5 \cdot T_{krit}$ ;  
 $T_v = 0,125 \cdot T_{krit}$ . Stark ausgezogen: Regelgröße bei PID-Regelung.  
Bleibende Regelabweichung bei P-Regelung

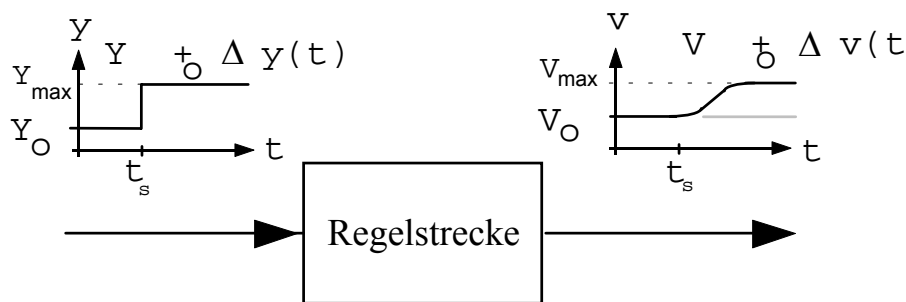
## 2.9 Reglereinstellung nach CHIEN-HRONES und RESWICK

Auch bei diesem Einstellverfahren wird mit einem beschränkten experimentellen Aufwand versucht, eine gewisse Information über die Regelstrecke zu ermitteln. Man schaltet einen Stellgrößensprung auf die Regelstrecke allein und mißt deren typische 'Sprungantwort' (ihr 'Übergangsverhalten'). Diese kann prinzipiell verschiedenste Formen annehmen. Für zwei wichtige Typen der Sprungantwort entwickelten nun CHIEN-HRONES und RESWICK Formeln, mit denen man geeignete Reglerparameter einstellen kann.

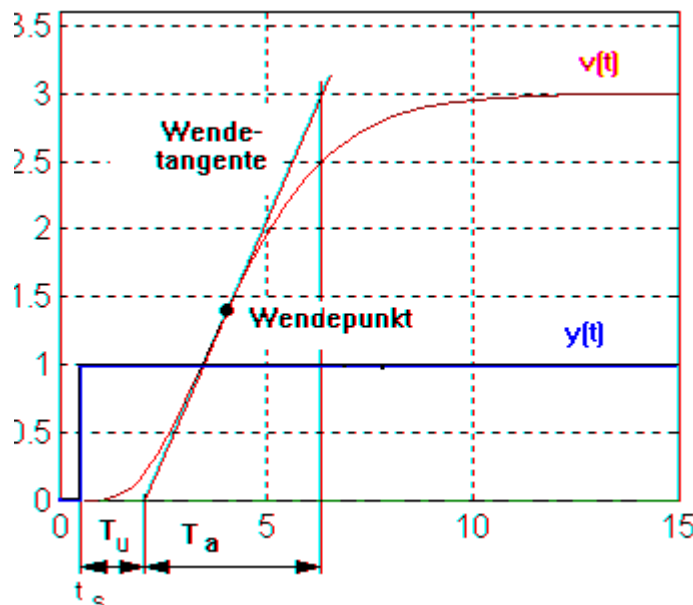
### 2.9.1 Nichtschwingungsfähiges Übergangsverhalten der Regelstrecke, wobei die Sprungantwort in einem festen Endwert mündet

Bei „Einmünden in einen festen Endwert“ spricht man manchmal von einer „Stecke mit Ausgleich“

Es liege folgende Situation vor ...



... wobei die Ein-Ausgangssignale detailliert so aussehen können:



**Bild 2.15:** Übergangsverhalten der Regelstrecke (hier ist willkürlich  $V_0 = 0$  und  $Y_0 = 0$ )  
 $T_U =$  Ersatztotzeit (=Verzugszeit) in sec;  $T_a =$  Ausgleichszeit in sec.

Es ist weiterhin  $K_s = \frac{V_{\max} - V_0}{Y_{\max} - Y_0}$  die Streckenverstärkung („Übertragungsbeiwert der Regelstrecke im Beharrungszustand“).

Die Einstellung nach CHIEN-HRONES und RESWICK erfolgt nun folgendermaßen:

Reglertyp	Reglerparameter für aperiodischen Regelvorgang	Reglerparameter für 20% Überschwängen der Regelgröße
P-Regler	$K_P = \frac{0,3 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$	$K_P = \frac{0,7 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$
PI-Regler	$K_P = \frac{0,35 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$ $T_n = 1,2 \cdot T_a$	$K_P = \frac{0,6 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$ $T_n = T_a$
PID-Regler	$K_P = \frac{0,6 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$ $T_n = T_a$ $T_V = 0,5 \cdot T_u$	$K_P = \frac{0,95 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$ $T_n = 1,35 \cdot T_a$ $T_V = 0,47 \cdot T_u$
PD-Regler	$K_P = \frac{1,8 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$ $T_V = 0,5 \cdot T_u$	

Alternativ für den Fall, daß folgendes eintritt:

### **2.9.2 Übergangsverhalten der Regelstrecke, das sich bei Stellgrößensprüngen einem rampenähnlichen Verlauf angleicht („Strecke ohne Ausgleich“)**

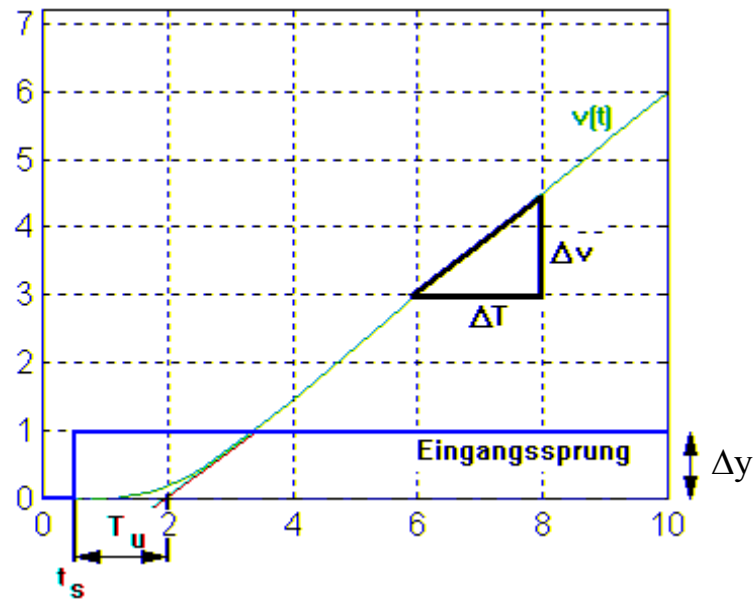
Angenommen, die bisherige Stellgröße einer Regelstrecke besitzt den Wert  $Y_0=0$ . Wenn nun 'zusätzlich' ein Sprung an ihrem Eingang aufgeschaltet wird, so soll die Regelgröße eine „Sprungantwort“ wie im Bild 2.16 haben.

Am Eingang liege also:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq t_s \\ \Delta y = \text{const.} & \text{für } t > t_s \end{cases}$$



Am Ausgang entsteht:



**Bild 2.16:** Sprungantwort der Regelstrecke ohne Ausgleich.

$T_U = \text{Ersatztotzeit (=Verzugszeit)}$ ;  $T_i = \text{Integrationszeitkonstante}$ ;  
üblicherweise ist  $V_o = 0$

Es ist weiterhin

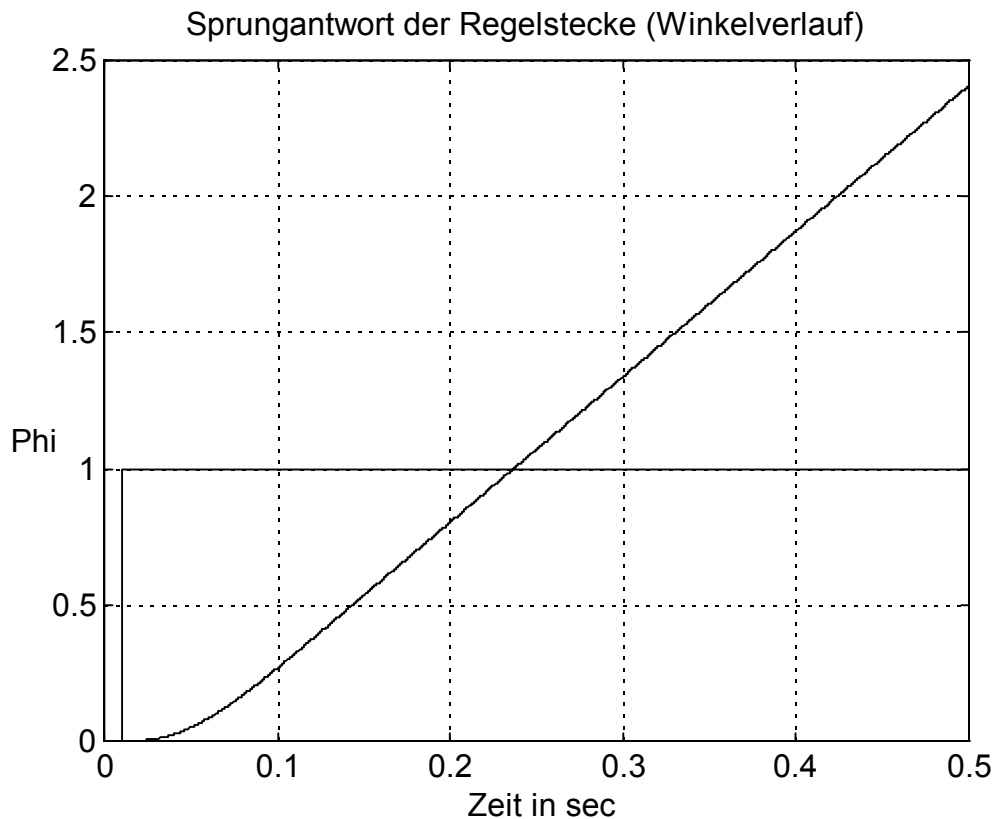
$$T_i = \frac{\Delta y \cdot \Delta T}{\Delta v}.$$

Die Einstellung nach CHIEN-HRONES und RESWICK erfolgt nun folgendermaßen:

Reglertyp	Reglerparameter		
	$K_P$	$T_n$	$T_V$
P-Regler	$0,5 \cdot \frac{T_i}{T_u}$	--	--
PD-Regler	$0,5 \cdot \frac{T_i}{T_u}$	--	$0,5 \cdot T_u$
PI-Regler	$0,4 \cdot \frac{T_i}{T_u}$	$5 \cdot T_u$	--
PID-Regler	$0,4 \cdot \frac{T_i}{T_u}$	$3,2 \cdot T_u$	$0,8 \cdot T_u$

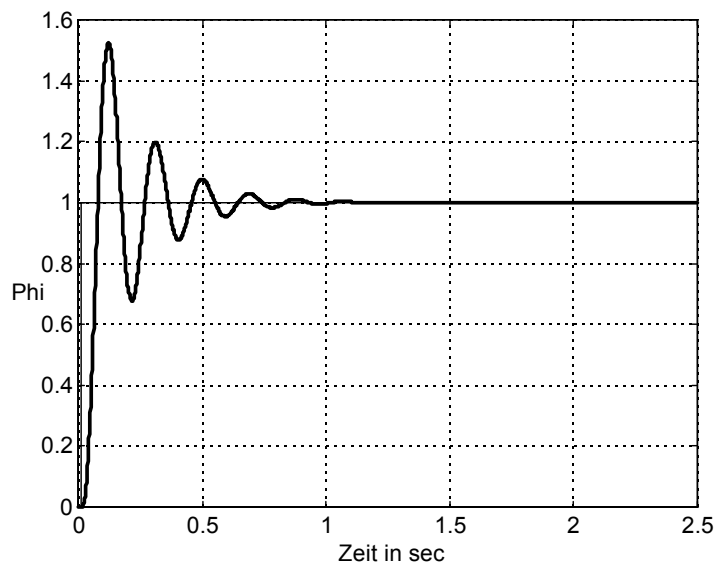
Eine Streckensprungantwort wie in Bild 2.16 weist auch die Regelstrecke des Einführungsbeispiels auf.

Die nachfolgenden Bilder zeigen die per Simulation aufgenommene Streckensprungantwort wie sie sich beim Einführungsbeispiel ergibt. Diese Regelstrecke ist ohne Ausgleich. Basierend darauf - die Simulationen mit den entsprechenden Reglern (eingestellt nach Chien-Hrones und Reswick)



**Bild 2.17:** Simulierte Sprungantwort der Strecke. Folgende Kenngrößen werden abgelesen:  
 $T_U = 0.041 \text{ sec}$ ;  $\Delta y = 1 \text{ rad}$ ,  $\Delta T = 0.163 \text{ sec}$  und  $\Delta v = 0.86 \text{ rad}$ .

**P-Regelung:** Aus den (per Simulation) aufgenommenen Werten errechnet sich:  $T_i = 0.189 \text{ sec}$ . Nach den Einstellformeln ist  $K_p = 0.5 \cdot \frac{T_i}{T_U} = 2.3$  zu setzen. Simulation ergibt:

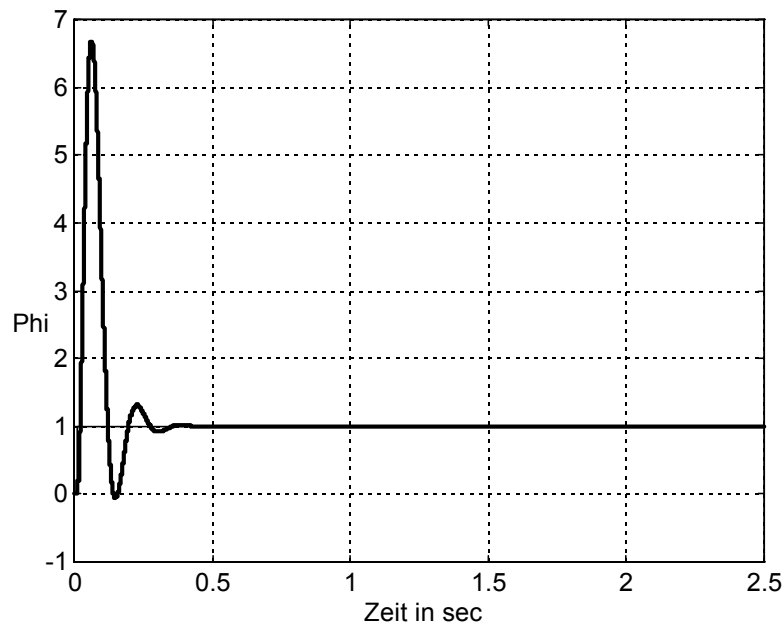


**Bild 2.18:** Simulierte Sprungantwort des Regelsystems bei P-Regelung. Vgl. Bild 2.11

**PD-Regelung:** Aus den (per Simulation) aufgenommenen Werten errechnet sich:

$$T_i = 0,189 \text{ sec. Nach den Einstellformeln ist } K_p = 0,5 \cdot \frac{T_i}{T_u} = 2,3$$

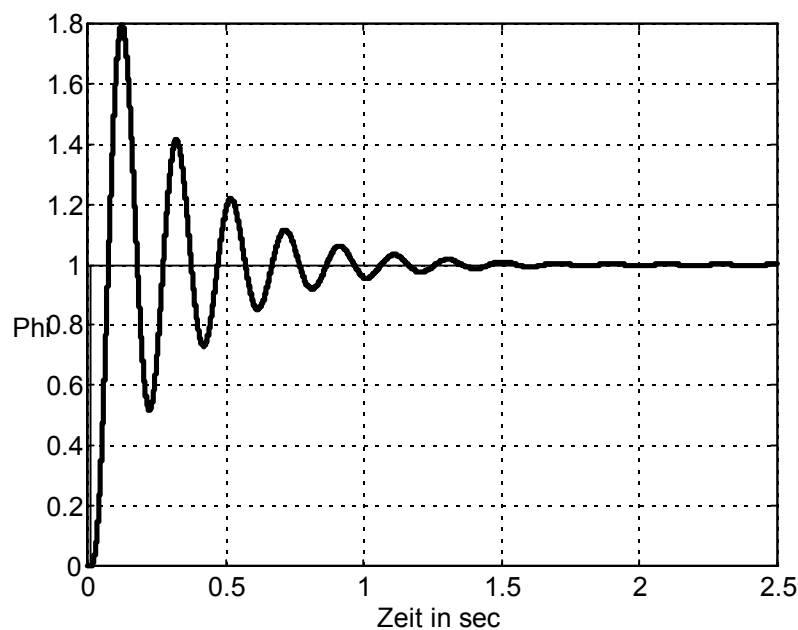
und  $T_v = 0,02 \text{ sec}$  zu setzen. Die Simulation ergibt:



**Bild 2.19:** Simulierte Sprungantwort des Regelsystems bei PD-Regelung. Unbrauchbar.

**PI-Reglung:** Aus den (per Simulation) aufgenommenen Werten errechnet sich:  $T_i = 0,189 \text{ sec}$ .

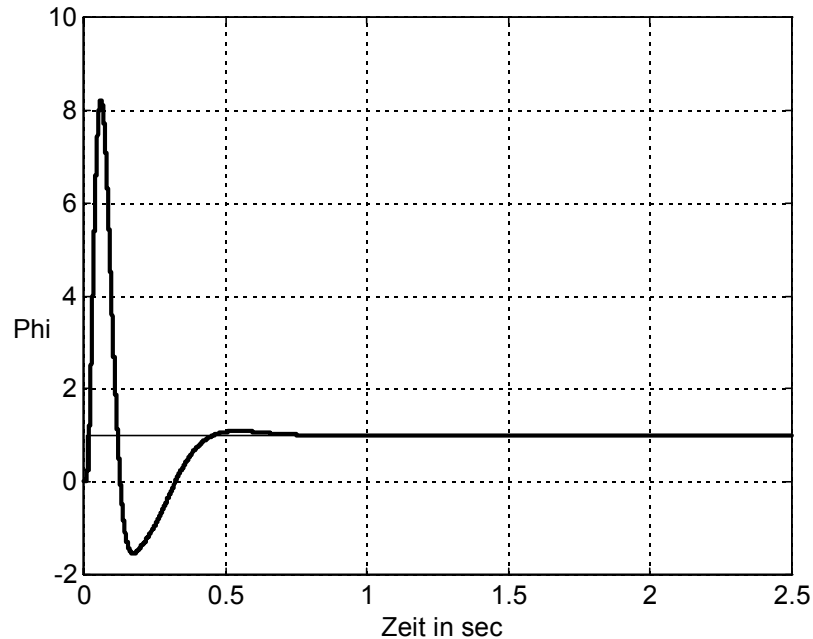
Nach den Einstellformeln ist  $K_p = 0,4 \cdot (T_i / T_u) = 1,83$  und  $T_N = 0,205 \text{ sec}$  zu setzen. Die Simulation ergibt:



**Bild 2.20:** Simulierte Sprungantwort des Regelsystems bei PI-Regelung. Vgl. mit Bild 2.12.

**PID-Regelung:**

Aus den (per Simulation) aufgenommenen Werten errechnet sich:  $T_i = 0,189$  sec. Nach den Einstellformeln ist  $K_p = 0,4 \cdot (T_i / T_u) = 1,83$  sowie  $T_N = 0,1312$  sec und  $T_v = 0,0328$  sec zu setzen. Die Simulation ergibt:



**Bild 2.21:** *Simulierte Sprungantwort des Regelsystems bei PID-Regelung. Unbrauchbar*

Wegen des unbefriedigenden Folgeverhaltens dieses Regelsystems bei Reglerparametrierung nach Chien-Hrones und Reswick wurde auf die Untersuchung des Störverhaltens verzichtet.

## 2.10 Parametrierung von PID-Algorithmen nach Takahashi

Ein PID-Regler realisiert folgende Operation:

Aus  $e = w - v$  - der Eingangsgröße für den Regler (vgl. Bild 2.9) wird gebildet:

$$y(t) = K_P \cdot \left[ e(t) + \frac{1}{T_n} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + T_V \cdot \frac{d e(t)}{dt} \right]$$

Mit  $t \rightarrow k \cdot T_{ab}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  folgt:

$$\frac{d e(t)}{dt} \approx \frac{e(k \cdot T_{ab}) - e((k-1) \cdot T_{ab})}{T_{ab}} = \frac{e_k - e_{k-1}}{T_{ab}} \quad - \quad \text{Bildung der "Rückwärtsdifferenz"}$$

Und mit

$$\int_0^t e(\tau) d\tau \approx T_{ab} \sum_{i=0}^{k-1} e(i \cdot T_{ab}) = T_{ab} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} e_i$$

gilt endlich

$$y_k = K_P e_k + \frac{K_P T_{ab}}{T_n} \sum_{i=0}^{k-1} e_i + \frac{K_P T_V}{T_{ab}} (e_k - e_{k-1})$$

sowie folglich auch:

$$y_{k-1} = K_P e_{k-1} + \frac{K_P T_{ab}}{T_n} \sum_{i=0}^{k-2} e_i + \frac{K_P T_V}{T_{ab}} (e_{k-1} - e_{k-2})$$

Die Subtraktion der letzten beiden Zeilen liefert

$$y_k - y_{k-1} = K_P \cdot (e_k - e_{k-1}) + \frac{K_P T_{ab}}{T_n} \cdot (e_0 + \dots + e_{k-1} - e_0 - \dots - e_{k-2}) + \frac{K_P T_V}{T_{ab}} \cdot (e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2})$$

und den PID-Algorithmus:

$$y_k = y_{k-1} + K_P \cdot (e_k - e_{k-1}) + \frac{K_P T_{ab}}{T_n} \cdot e_{k-1} + \frac{K_P T_V}{T_{ab}} \cdot (e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2})$$

(algorithmische Abarbeitung wie beim EULER'schen Polygonzugverfahren - vgl. 2.4.1)

Oft wird bei PID-Algorithmen der Tatsache Rechnung getragen, daß auch im Analogen gar nicht exakt differenziert wird. D.h.: Am Ausgang des in Bild 2.9 mit „D“ gekennzeichneten Kanals mißt man normalerweise nur eine „geglättete“ Ableitung.

Also verwende man statt  $\dot{e}(t)$  eine Ersatzgröße  $e_D(t)$ .

$$\text{Diese ist Lösung der Differentialgleichung} \quad T_1 \cdot \frac{de_D}{dt} + e_D(t) = T_V \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

$$\text{bzw. der zugehörigen Integralbeziehung:} \quad T_V \cdot e(t) = T_1 \cdot e_D(t) + \int_0^t e_D(\tau) d\tau$$

der PID-Algorithmus nimmt dann die Form

$$y_K = y_{K-1} + K_P \cdot (e_K - e_{K-1}) + \frac{K_P \cdot T_{ab}}{T_n} \cdot e_{K-1} + K_P \cdot e_{D,K} - K_P \cdot e_{D,K-1}$$

und

$$e_{D,K} = \left(1 - \frac{T_{ab}}{T_1}\right) \cdot e_{D,K-1} + \frac{T_V}{T_1} \cdot e_K - \frac{T_V}{T_1} \cdot e_{D,K-1}$$

an.

Wenn eine Regelstrecke mit Ausgleich vorliegt und das Übergangsverhalten auf einen Stellgrößensprung nichtschwingungsfähig ist (vgl. 2.8.1), dann stelle man die Reglerparameter für den PID-Algorithmus nach Takahashi wie folgt ein:

Reglertypen	Reglerparameter		
	$K_P$	$T_N$	$T_V$
P-Regler	$\frac{1}{K_s} \cdot \frac{T_a}{T_u}$	--	--
PI-Regler	$\frac{0,9}{K_s} \cdot \frac{T_a}{T_u + 0,5 \cdot T_{ab}}$	$3,33 \cdot (T_u + 0,5 \cdot T_{ab})$	--
PID-Regler	$\frac{1,2}{K_s} \cdot \frac{T_a}{T_u + T_{ab}}$	$2 \cdot \frac{(T_u + 0,5 \cdot T_{ab})^2}{T_u + T_{ab}}$	$0,5 \cdot (T_u + T_{ab})$

Die Formeln werden für  $\frac{T_{ab}}{T_a} \leq 0,1$  empfohlen.



Versuchen Sie, von den ausgeteilten Übungsaufgaben die Nummern 3-6 zu bearbeiten



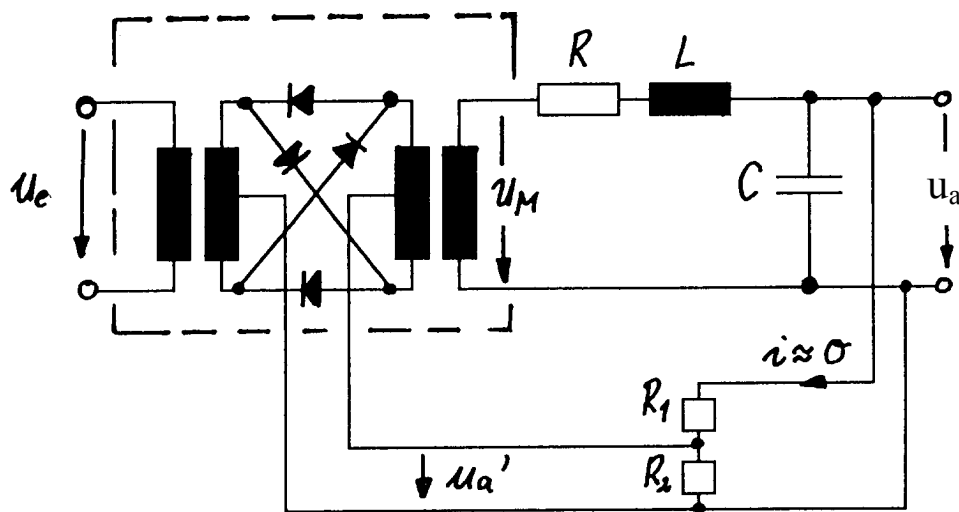
*„Ach es gäbe noch soviel zu sagen, aber ich glaube Sie haben nichts versäumt.“ Fontane*

## 2.11 Aufgaben zum 2. Kapitel

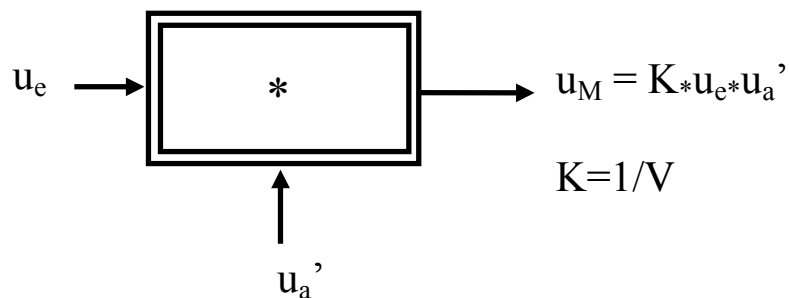
„Nicht über Berge strauchelt der Mensch, er stürzt über einen Ameisenhügel.“

Lü Bu-We (um 240 v. Chr.)

**1. Aufgabe:** Die nachfolgende Schaltung wird in der HF-Technik manchmal als „Diodenrückmischteiler“ bezeichnet. Damit können hochfrequente Schwingungen „heruntergemischt“ werden. Die Schaltung ist aber noch anderweitig interessant: als FM-Modulator.



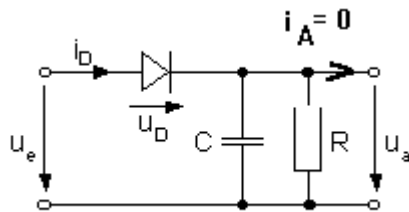
Bei dem gestrichelt eingerahmten Teilsystem handelt es sich um einen sogenannten Ringmodulator. Es genügt für die mathematische Modellbildung zu wissen, daß damit eine Produktbildung von zwei (Spannungs-) Signalen durchgeführt wird. Folgende Blockstruktur kann für den Ringmodulator angesetzt werden:



Stellen sie ein Zustandsmodell und ein mathematisches Modell in Form einer Differentialgleichung 2. Ordnung für den Diodenrückmischteiler auf.

## 2. Aufgabe: ( AM-Demodulation ) :

Aus dem Skript ist Ihnen das Beispiel 4 schon bekannt.



$u_e$  = Eingangsgröße

$u_a$  = Ausgangsgröße

### 2.1) Spitzenwertgleichrichtung:

Es seien jetzt als spezielle Werte gegeben:  $C = 10\mu\text{F}$ ;  $R = 5\text{ k}\Omega$ ;  
 Von der Diode sind noch die folgenden Kennwerte gegeben:  $I_s = 10^{-9}\text{ A}$ ;  $U_T = 0,026\text{ V}$ .

Bestimmen Sie durch Simulation die Ausgangsspannung  $u_a$  für den Fall, daß  $u_e$  ein sinusförmiges Eingangssignal mit einem Scheitelwert von 2 [V] und einer Frequenz von 50 Hz ist.

Als Simulationssprache können Sie z.B. die Sprache SIMULINK (aber auch jede andere Ihnen bekannte Sprache ) verwenden. Sie können sich auch selber ein Simulationsprogramm schreiben das EULER'sche Polygonzugverfahren verwendet.

### 2.2) AM-Demodulation:

Es werde nunmehr angenommen, daß  $u_e$  ein AM-Signal ist.

Nämlich  $u_e(t) = (1 + 0,2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 500 \cdot t)) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 10^4 \cdot t)$

Versuchen Sie mit Hilfe der obigen Schaltung und mit Zusatzschaltungen die Nachricht zu rekonstruieren.

Im AM-Demodulator liegen jetzt die folgenden Kennwerte vor:  $C = 100\text{ nF}$ ;  $R = 1\text{ k}\Omega$  zu Grunde. Die Diode sie wie in 2.1 verwendet.

Die genannten Zusatzschaltungen müssen sein:

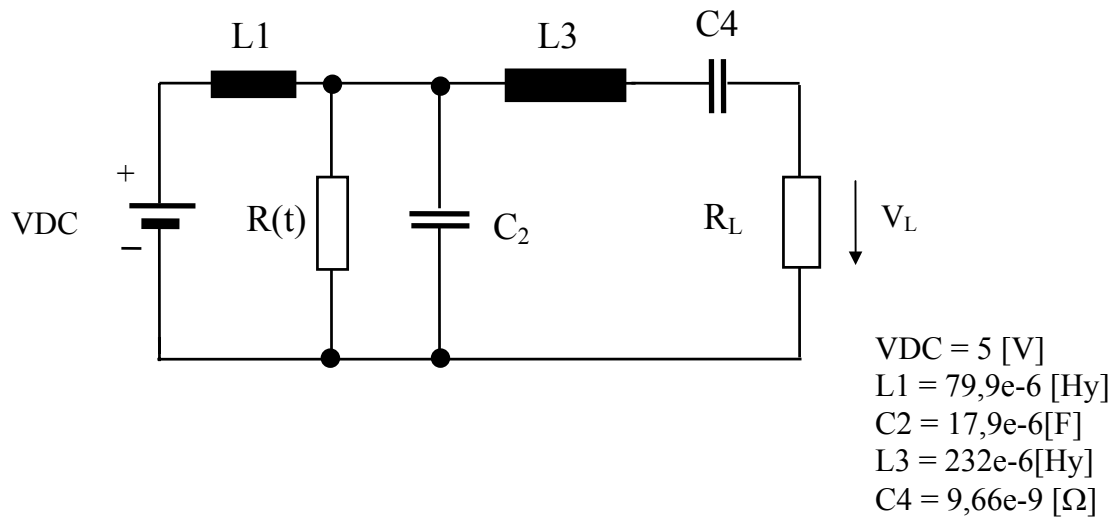
- ein Tiefpaßfilter um die in  $u_a$  verbliebenen HF-Anteile herauszufiltern,
- eine Sperre für Gleichanteile.

Wegen  $i_A = 0$ , belasten diese Zusatzschaltungen den AM-Demodulator nicht.

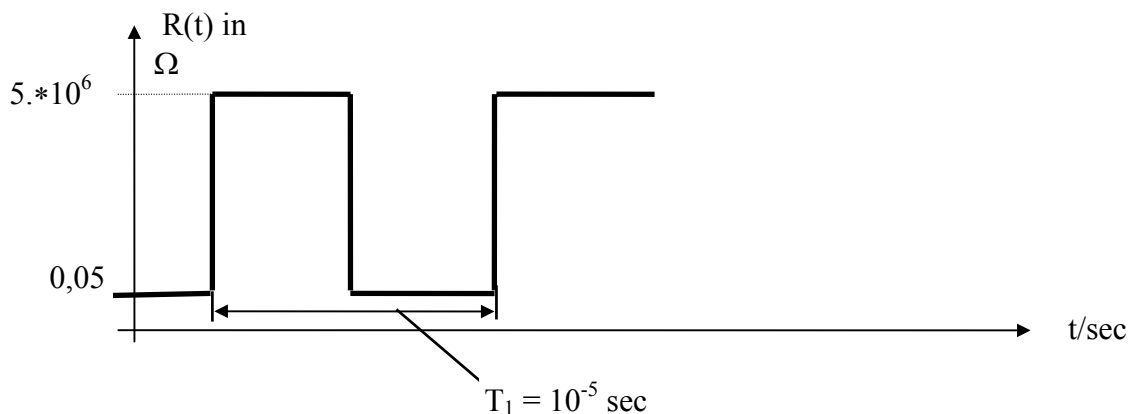


### 3. Aufgabe: ( Oszillator ) :

Die nachstehende Schaltung zeigt einen Oszillator der durch einen Schalter angestoßen wird. Dieser wird durch den Widerstand  $R(t)$  symbolisiert.



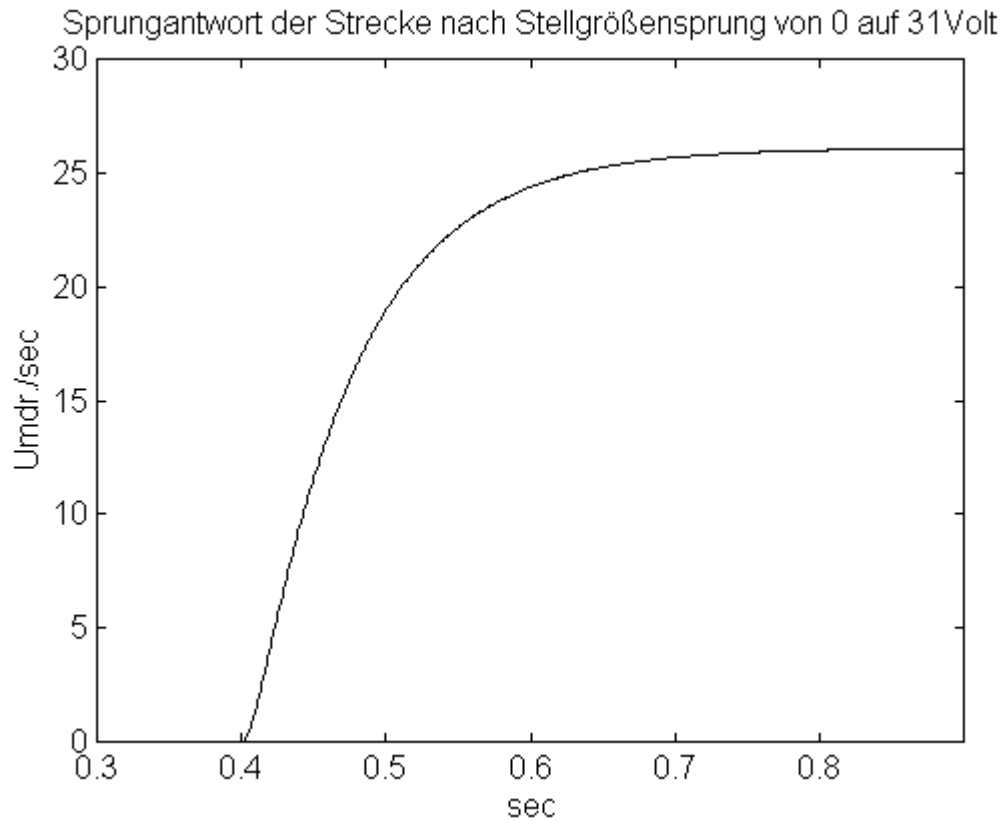
Für den periodisch zeitabhängigen Widerstand ist  $R(t)$  ist folgender Verlauf gegeben:



- 3.1) Erstellen sie ein Zustandsmodell für diese Schaltung.
- 3.2) Simulieren Sie diese Schaltung mit SIMULINK. Verwenden sie als numerisches Integrationsverfahren das Verfahren „Gear-stiff“. (Simulationsdauer 0,1 msec).
- 3.3) Mit den angegebenen Schaltungsparametern simuliere man die Schaltung, wenn nun die Periodendauer des Widerstandes von  $T_1 = 1.e-5 \text{ sec}$  auf auf  $T_2 = 1.e-3 \text{ sec}$  vergrößert wird.
- 3.4) Durch Umskalieren des mathematischen Modells der Schaltung berechne man neue Schaltungsparameter, so daß sich derselbe Kurvenverlauf wie unter 1.2 auch bei  $T_2$  ergibt und simuliere erneut.

#### 4. Aufgabe: Zur Einstellung nach Takahashi

Es wurde die Regelgröße (Drehzahl) Regelstrecke aufgenommen:



Der Stellgrößensprung erfolgte zum Zeitpunkt  $t = 0,4$  sec.

Man bestimme  $K_s$ ,  $T_u$  und  $T_a$ .

Davon ausgehend leite man die Reglerparameter für die Reglereinstellung nach Takahashi ab.

Sei finden unter **H:\Karl\RT-Aufgaben** (Server NF-Auto) das SIMULINK - Modell „Taka\_1.m“ eines Regelsystems das die vorgelegte Strecke und einen zeitdiskreten Regler enthält. Stellen Sie Ihre Reglerparameter nach Takahashi ein und simulieren Sie das Ergebnis mit dem angegebenen Simulink - Modell.

Abtastzeit  $T_{ab} = 1$  msec

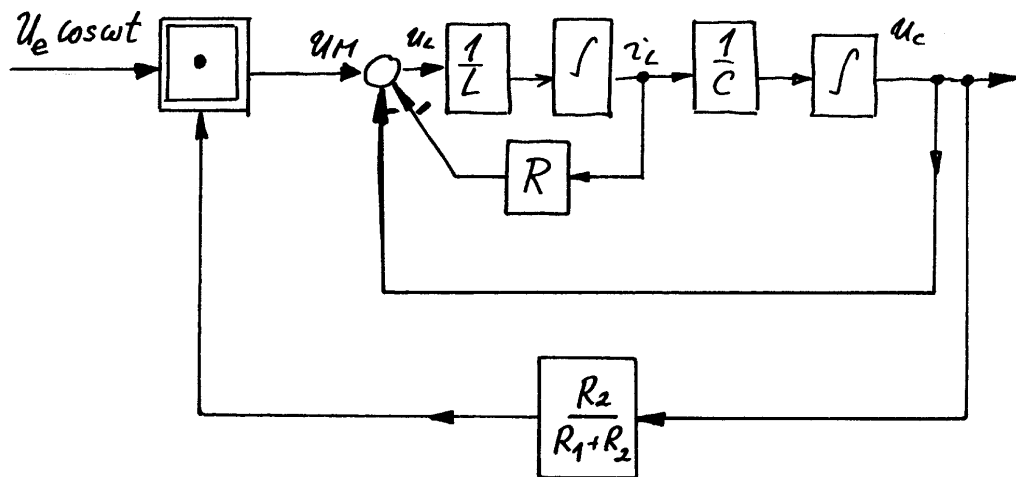
## 2.12 Lösung der Aufgaben zum 2. Kapitel

„Leicht ist es zu lernen, aber zu erkennen ist schwer. Auch erkennen ist nicht so schwer; schwer ist es, das Erkannte selbst auszuüben und damit Nützliches zu schaffen.“

Tscheng I (1033-1107)

### 1. Aufgabe:

Nachdem Eingangsgröße ( $u_e$ ) und Ausgangsgröße ( $v = u_c$ ) klar sind, kann sofort das Strukturbild gezeichnet werden:



Wir lesen ab:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{L} \end{pmatrix} \cdot u_e \cdot u_a' \quad \begin{pmatrix} u_c(0) \\ i_L(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{c0} \\ i_{L0} \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ i_L \end{pmatrix}$$

Für  $u_a'$  ist sodann  $\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot u_c$  einzusetzen.

Wenn nun die Erste der Zustandsdifferentialgleichungen noch einmal differenziert und die zweite Gleichung in die erste eingesetzt wird, dann entsteht daraus:

$$C \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} C \cdot \dot{u}_c + \frac{1}{L} \cdot u_c = K \cdot \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{L} \cdot u_c \cdot u_e$$

Und endlich:

$$LC \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \cdot \frac{du_c}{dt} + \left( 1 + K \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot u_e \right) \cdot u_c = 0; \quad u_c(0) = u_{c0}; \quad \dot{u}_c(0) = \frac{i_{L0}}{C}.$$

Angenommen,  $u_e$  wird jetzt ganz speziell durch eine Cosinus-Funktion beschrieben:

$$u_e = u_e(t) = U_e \cdot \cos(\Omega t).$$

Weiterhin sei  $\varepsilon := K \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_e$ . Dann lautet die obige Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$LC \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \cdot \frac{du_c}{dt} + (1 + \varepsilon \cdot \cos(\Omega \cdot t)) \cdot u_c = 0; \quad u_c(0) = u_{c0}; \quad \dot{u}_c(0) = \frac{i_{L0}}{C}.$$

Neue Abkürzungen einführen liefert:

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot \frac{du_c}{dt} + \omega_n^2 (1 + \varepsilon \cdot \cos(\Omega \cdot t)) \cdot u_c = 0; \quad u_c(0) = u_{c0}; \quad \dot{u}_c(0) = \frac{i_{L0}}{C}.$$

Man nennt diese Differentialgleichung auch die MATTHIEU'sche Differentialgleichung. Diese regiert die Frequenzmodulation. Weiterhin beschreibt die MATTHIEU'sche Differentialgleichung auch so unterschiedliche physikalische Effekte wie das Stabilitätsverhalten von Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Achsiallast, die Stabilität von Satellitenbahnen usw.

Setzt man statt  $u_e = u_e(t) = U_e \cdot \cos(\Omega t)$  eine Recheckfunktion ein, so erhält man die MEISSNER'sche Differentialgleichung.

Setzt man schließlich statt  $u_e = u_e(t) = U_e \cdot \cos(\Omega t)$  eine beliebige periodische Funktion ein, so erhält man schließlich die noch allgemeinere HILL'sche Differentialgleichung:

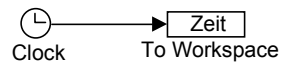
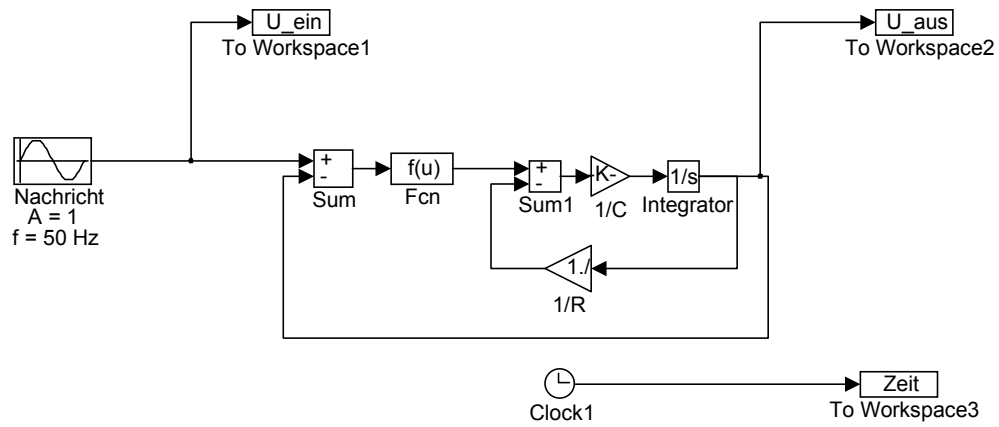
$$LC \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \cdot \frac{du_c}{dt} + \Phi(t) \cdot u_c = 0; \quad \Phi(t) = \Phi(t + T); \quad u_c(0) = u_{c0}; \quad \dot{u}_c(0) = \frac{i_{L0}}{C}.$$

Interessanter Weise ist weder für die MATTHIEU'sche Differentialgleichung noch für die HILL'sche Differentialgleichung ( bei beliebigem „ $\Phi$ , „) die geschlossene Lösung bekannt.

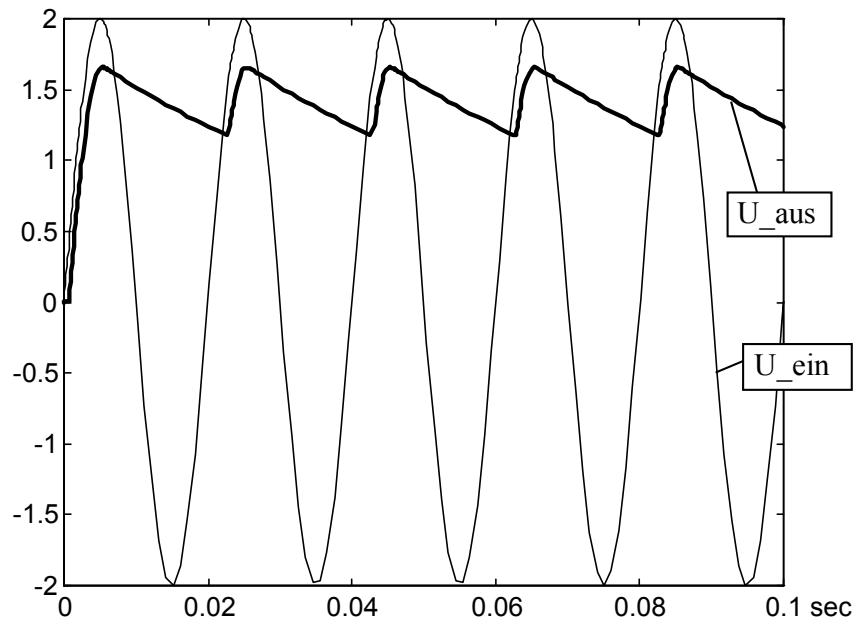
( Man kann sogar zeigen, daß sich diese Lösungen nicht mit endlich vielen elementaren Funktionen darstellen lassen. )

## 2. Aufgabe ( AM-Demodulation )

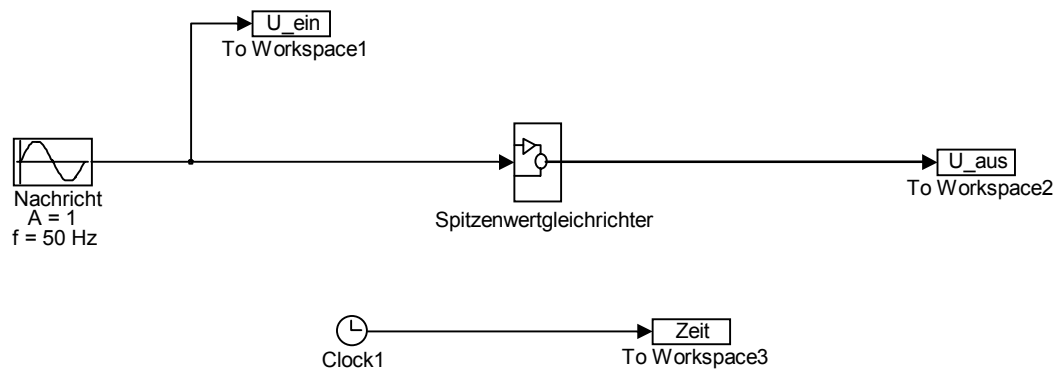
2.1) Spitzenwertgleichrichtung: SIMULINK-Simulation entsprechend Strukturbild.



Simulationsergebnis:



Noch eine Anmerkung zu dieser Simulation: Man kann umfangreiche Simulationsdetails zu einem Ersatzsymbol zusammenfassen und gewinnt dadurch an Übersicht. Dies sei anhand der vorgelegten Simulation schon einmal durchgeführt:

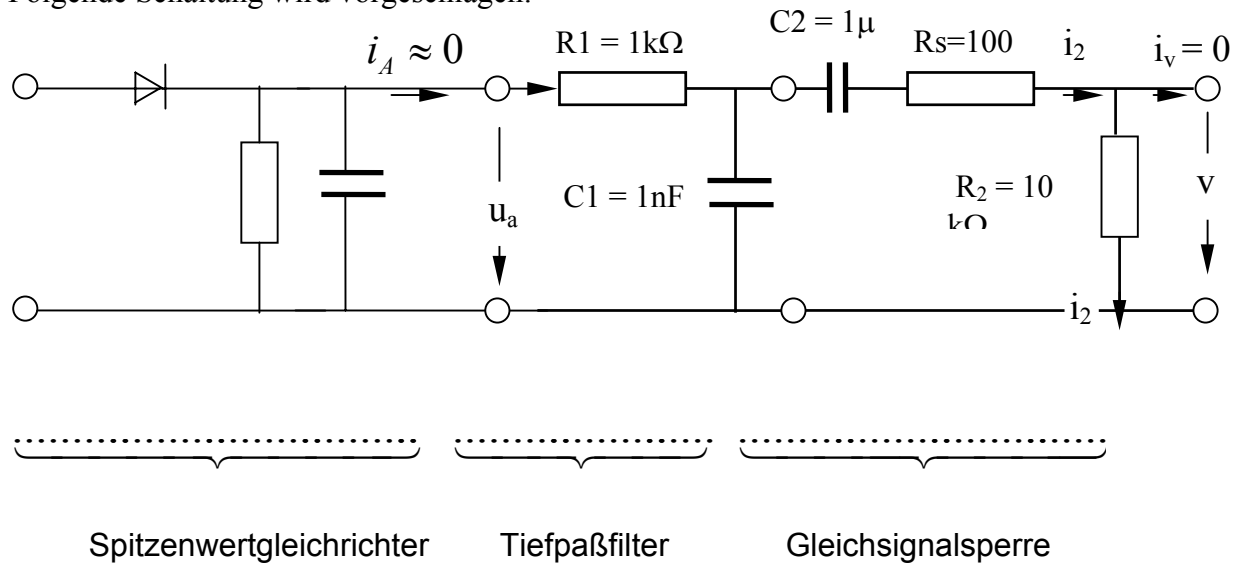


Dieselbe Simulation wie vorher. Die Spitzenwertgleichrichtung wurde allerdings zusammengefaßt

Für die AM-Demodulation gewinnen wir durch diese Zusammenfassung an mehr Übersicht.

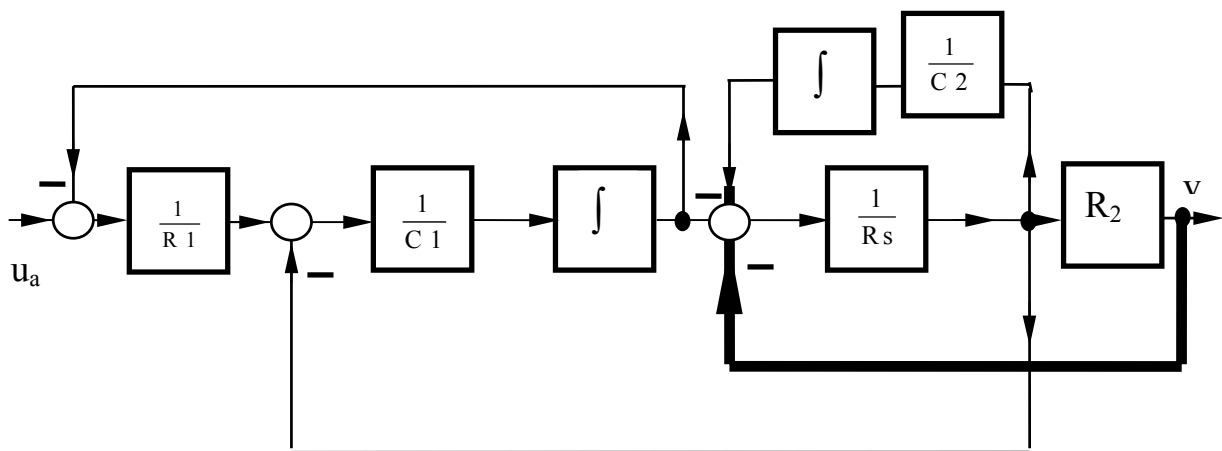
## 2.2) AM-Demodulation:

Folgende Schaltung wird vorgeschlagen:



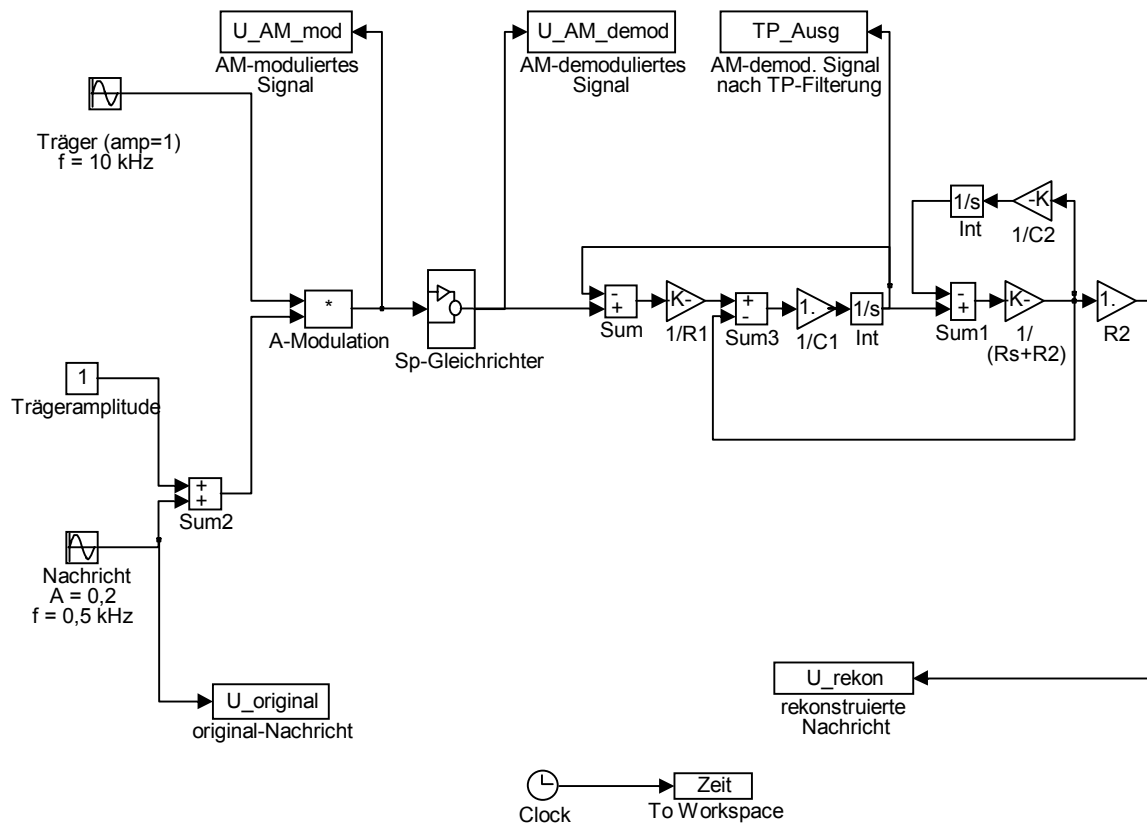
Die Annahme  $i_A \approx 0$  ist sicher problematisch. Wir wollen vorerst diese Annahme gelten lassen. !

Nun zum Strukturbild von Tiefpaßfilter und Gleichsignalsperre:

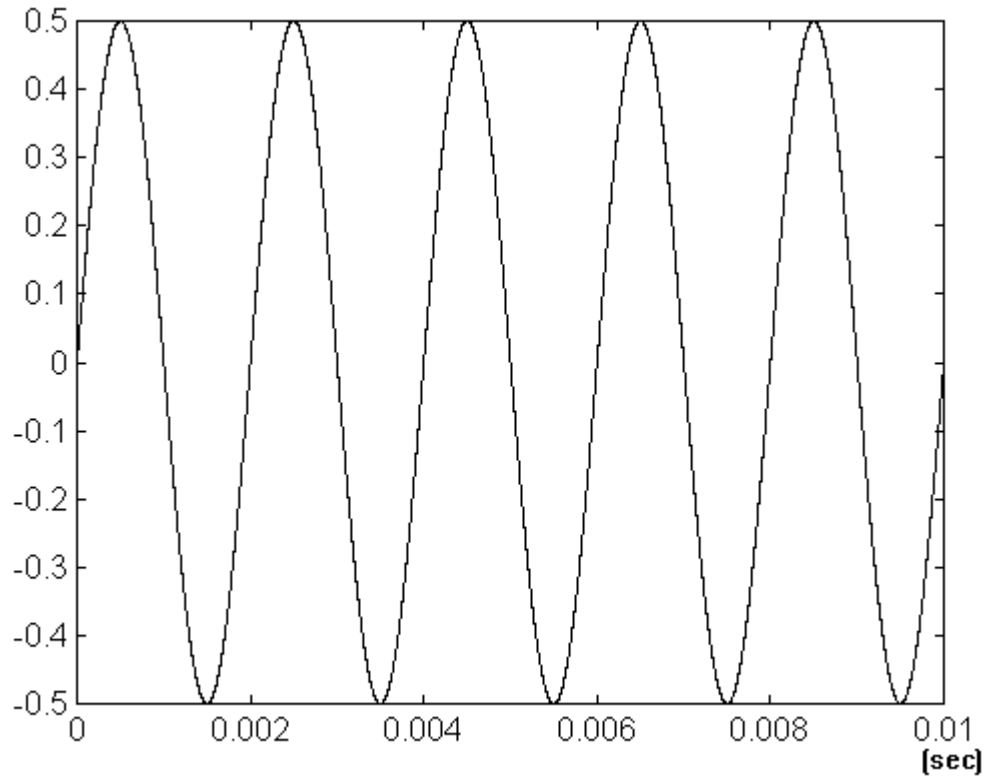


Dieses Strukturbild enthält eine sogenannte „Algebraische Schleife“ (diese ist dick eingezeichnet). Das bedeutet bekanntlich Probleme bei der Simulation. Die Algebraische Schleife läßt sich im vorliegenden Fall leicht beseitigen (bitte selber überlegen). Die nachstehende Strukturdarstellung für die SIMULINK-Simulation hat diese Schleife bereits vermieden.

Strukturbild von Tiefpaßfilter und Gleichsignalsperre; Spitzenwertgleichrichter zusammengefaßt:

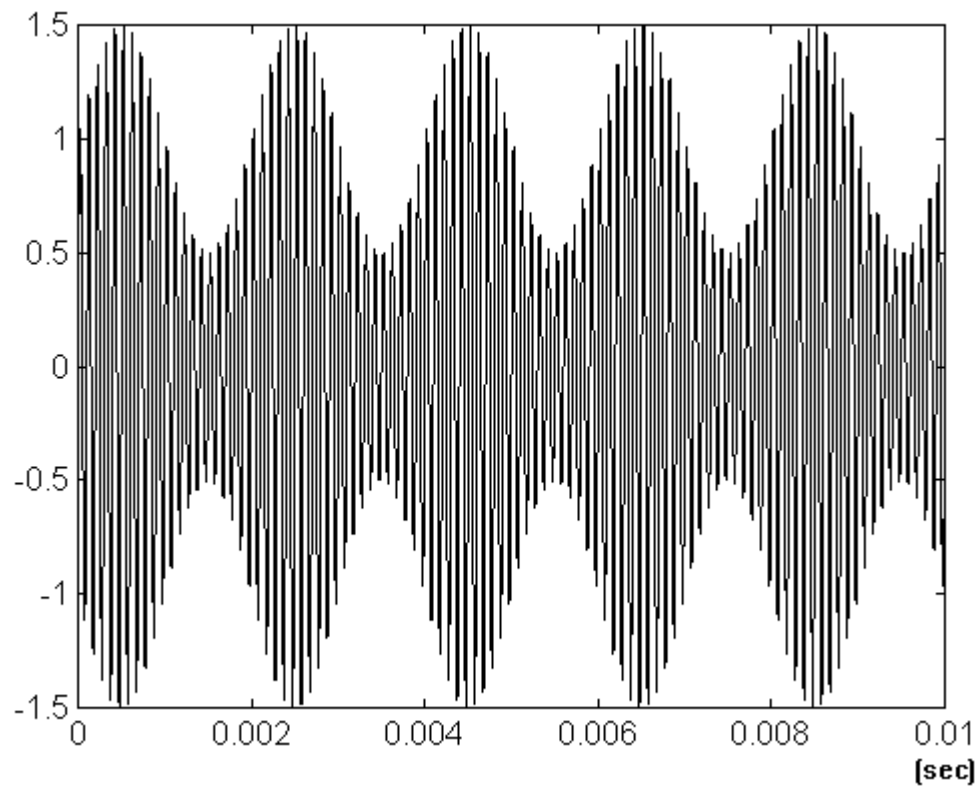
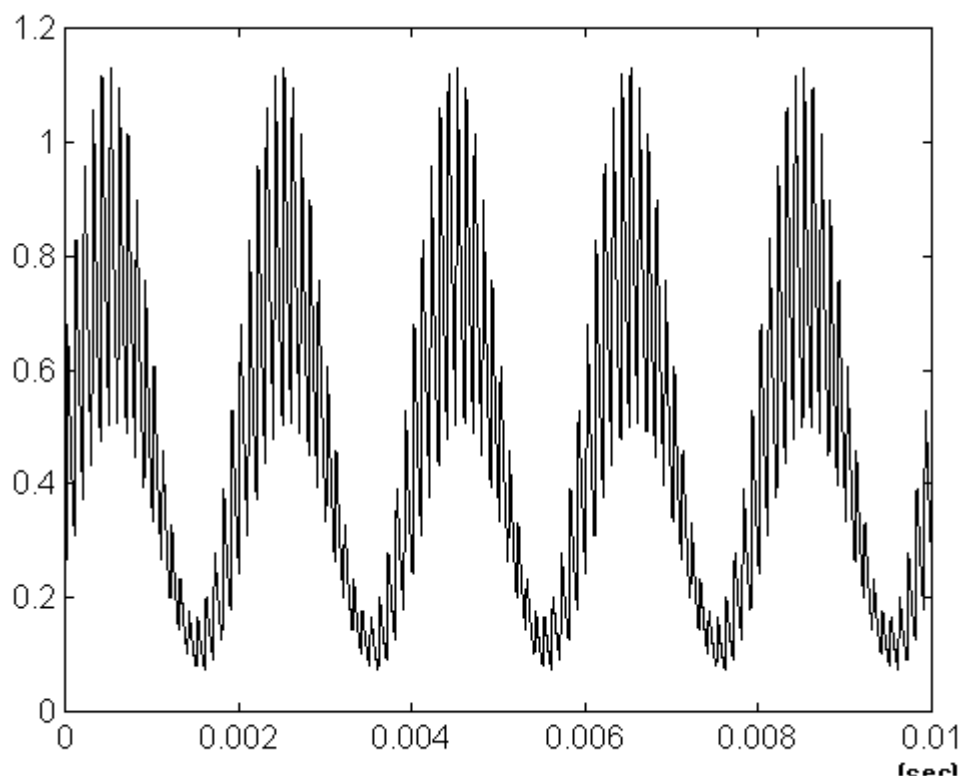


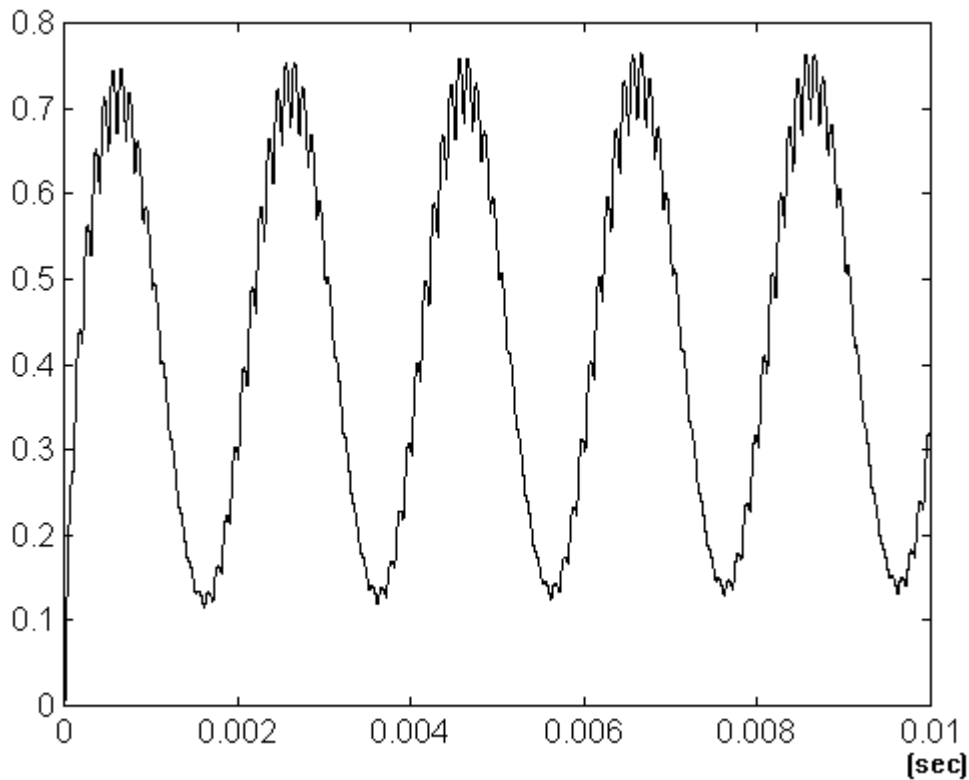
### Simulationsergebnisse:



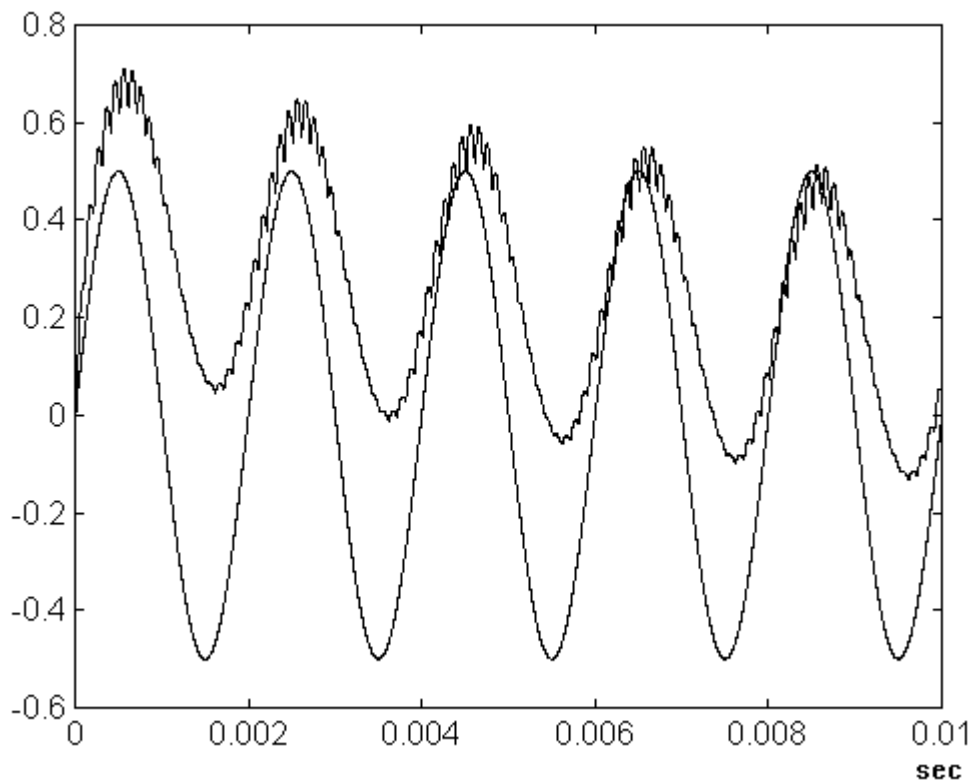
Originale Nachricht „U<sub>original</sub>“



Amplitudenmoduliertes Signal  $U_{AM\_mod}$ AM-Demodulator (Spitzenwertgleichrichter)-Ausgang:  $U_{AM\_demod}$



AM-demoduliertes Signal nach Tiefpaßfilterung: TP-Ausg



AM-demoduliertes Signal nach TP-Filterung und Gleichsignalsperre.  
(Man überlegt sich leicht, daß die Gleichsignalsperre nicht immer vorteilhaft ist: wenn die originale Nachricht eine Sprungfunktion enthält, wird diese von der Gleichsignalsperre ebenfalls unterdrückt.)

Zum Schluß werden die Leser aufgefordert, das Gesamtsystem neu zu simulieren wobei jetzt (realistischerweise)  $i_A \neq 0$  gelten soll.

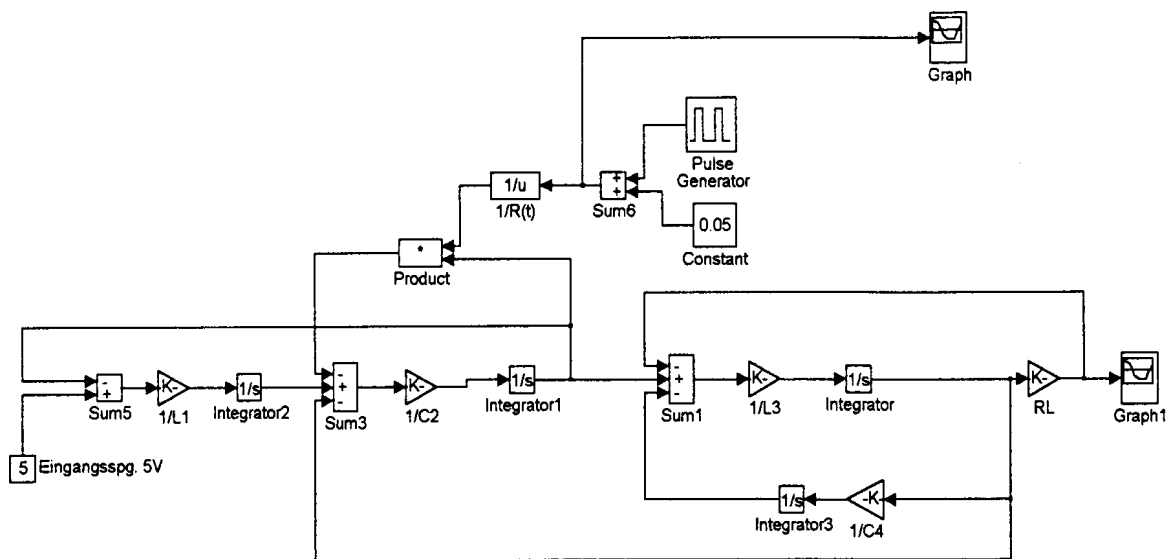
### 3. Aufgabe ( Oszillator ) :

3.1 Zustandsmodell der Schaltung: Es sei gleich das Zustandsmodell angegeben. Wegen des Strukturbildes betrachte man auch das Blockschaltbild der SIMULINK-Simulation (nächstes Bild):

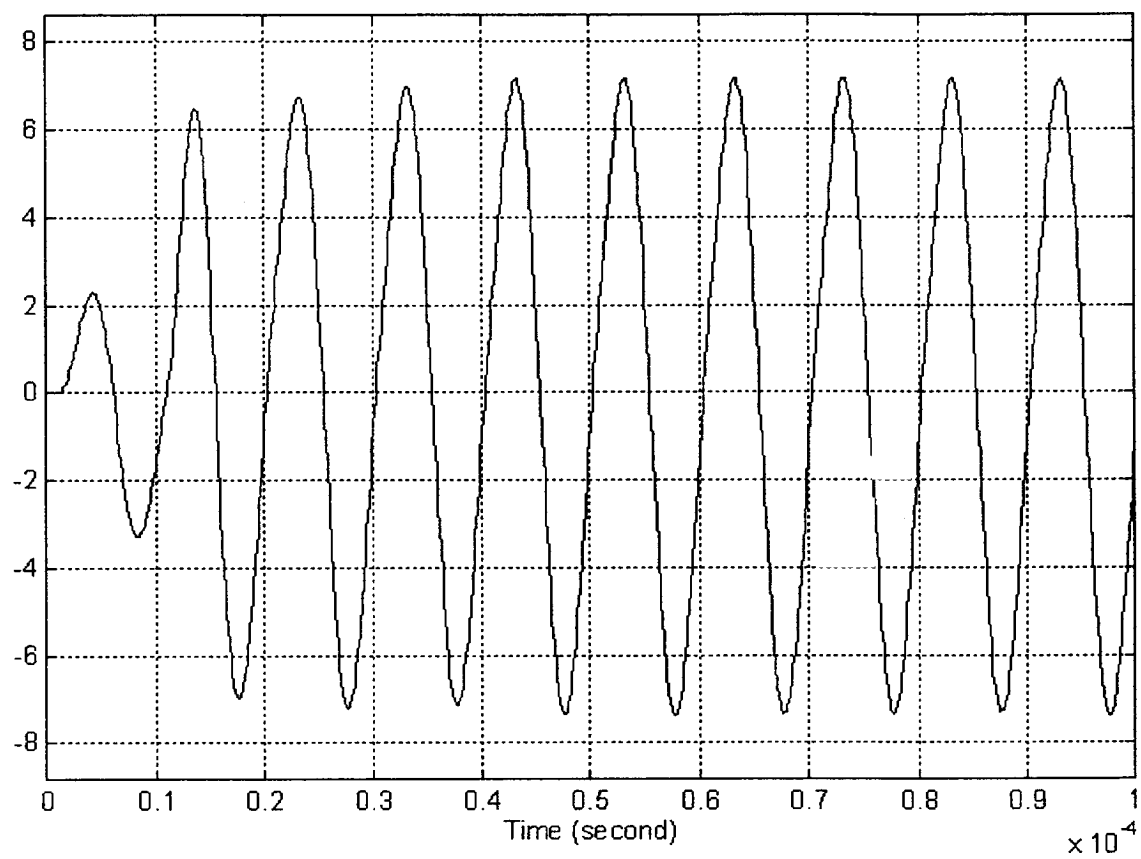
$$\begin{aligned}\frac{di_{L3}}{dt} &= \frac{1}{L_3} [u_{C2} - u_{C4} - R_L \cdot i_{L3}] \\ \frac{di_{L1}}{dt} &= \frac{1}{L_1} [u_e - u_{C2}] \\ \frac{du_{C2}}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left[ i_{L1} - i_{L3} - \frac{1}{R(t)} \cdot u_{C2} \right] \\ \frac{du_{C4}}{dt} &= \frac{1}{C_4} \cdot i_{L3}\end{aligned}$$

(Anfangswerte Null gesetzt)

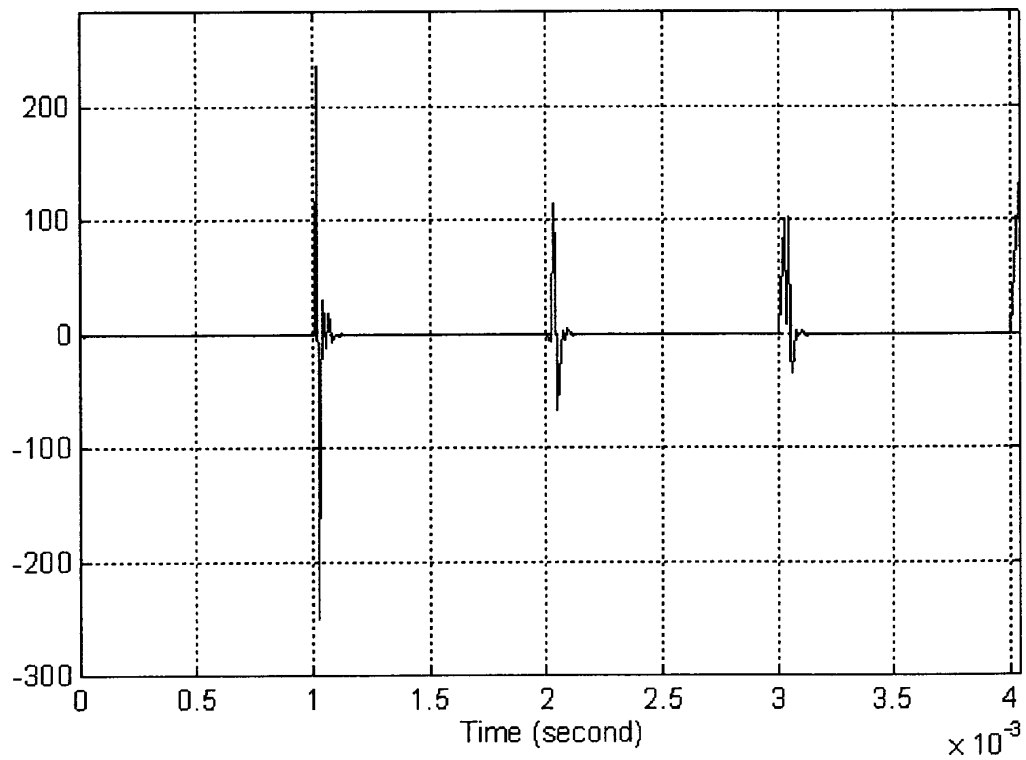
3.2) SIMULINK Blockstruktur hierzu:



Spannungsverlauf an  $R_L$  in Volt:



3.3 SIMULINK-Simulation bei Periodendauer  $T_2 = 1.e-3$  sec und ansonsten unveränderten Parametern:



### 3.4 Umskalierung des mathematischen Modells:

Die Schaltungsparameter sollen so berechnet werden, daß sich derselbe Kurvenverlauf wie unter 3.2 auch bei  $T=1.0\text{e-}3$  sec ergibt.

#### Lösungsansatz für die Umskalierung:

$$\dot{u} = \frac{du(t)}{dt}$$

Neue Zeit:  $\vartheta = t \cdot \beta$  ;  $\beta$  = Faktor

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \beta$$

$$d\vartheta = \beta \cdot dt \quad "$$

$$dt = \frac{1}{\beta} \cdot d\vartheta \quad "$$

$$u(t) = u(\vartheta/\beta) = \tilde{u}(\vartheta)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{d\tilde{u}(\vartheta)}{\frac{1}{\beta} \cdot d\vartheta} = \beta \cdot \frac{d\tilde{u}}{d\vartheta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{u}}{d\vartheta} = \frac{1}{\beta} \cdot [\dots]$$

Bei Anwendung dieser Umskalierung auf die Systemgleichungen erhält man folgendes:

$$\frac{di_{L3}}{dt} = \frac{1}{\beta \cdot L_3} \cdot u_{C2} - \frac{1}{\beta \cdot L_3} \cdot u_{C4} - \frac{R_L}{\beta \cdot L_3} \cdot i_{L3}$$

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{\beta \cdot L_1} \cdot u_e - \frac{1}{\beta \cdot L_1} \cdot u_{C2}$$

$$\frac{du_{C2}}{dt} = \frac{1}{\beta \cdot C_2} \cdot i_{L1} - \frac{1}{\beta \cdot C_2} \cdot i_{L3} - \frac{1}{\beta \cdot C_2} \cdot R(t) \cdot u_{C2}$$

$$\frac{du_{C4}}{dt} = \frac{1}{\beta \cdot C_4} \cdot i_{L3}$$

Durch Zeitdehnung um den Faktor 100, das entspricht einer Reduzierung der Frequenz von 100 kHz auf 1 kHz, ergibt sich ein Faktor von  $\beta = 100$  ( $\beta = 1.\text{e-}3/1.\text{e-}5 = 100$ ). Damit ergeben sich als Schaltungsparameter, wenn man für  $L_{1\text{neu}} = \beta \cdot L_1$ ,  $C_{2\text{neu}} = \beta \cdot C_2$  usw. setzt :

$$L_{3\text{neu}} = 232\text{e-}4 \text{ Hy}$$

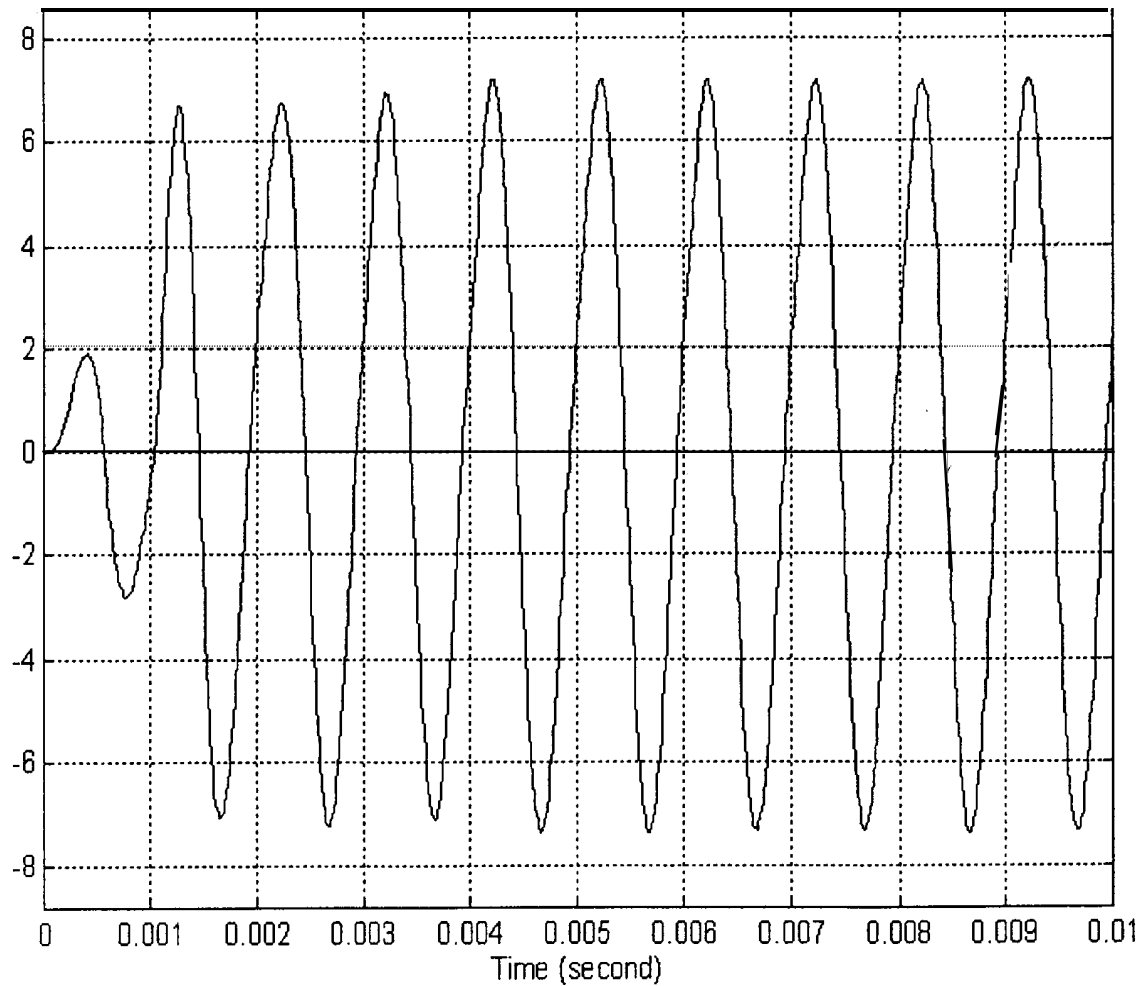
$$C_{4\text{neu}} = 9,66\text{e-}7 \text{ F}$$

$$C_{2\text{neu}} = 17,9 \text{ e-}7 \text{ F}$$

$$L_{1\text{neu}} = 79,9\text{e-}4 \text{ Hy}$$

$$R_L = 52,4 \text{ } \Omega \text{ (gleicher Wert wie bisher).}$$

Durch anschließende Simulation ergibt sich die nachfolgende Kurvenform. Sie scheint die gleiche zu sein wie unter 3.2. Man betrachte aber die unterschiedlichen Zeitskalen.





4. Aufgabe ( Einstellung nach Takahashi ) :

Aus der Sprungantwort der Regelstrecke lese ich ab:

Wendepunkt der Sprungantwort = 40 msec nach Führungsgrößensprung.

$T_u = 10 \text{ msec}$

$T_a = T_g = 40 \text{ msec}$

Die Streckenverstärkung ist  $K_s = \frac{\text{Enddrehzahl}}{\text{Amplitude des Stellsprungs}} = \frac{26 \text{ (U / sec)}}{31 \text{ (V)}} = 0,839$

Mit  $T_{ab} = 1 \text{ msec}$  erhält man nach Takahashi

$K_p = 5,2 \quad [(\text{U/sec}) / \text{V}]$

$T_n = 0,02 \quad [\text{sec}]$

$T_v = 0.0055 \quad [\text{sec}]$

Setzt man diese drei Parameter in die Formel für den PID - Algorithmus ein und ordnet um, dann erhält man:

$$y_k = y_{k-1} + 33,8 e_k - 62,14 e_{k-1} + 28,6 e_{k-2}.$$

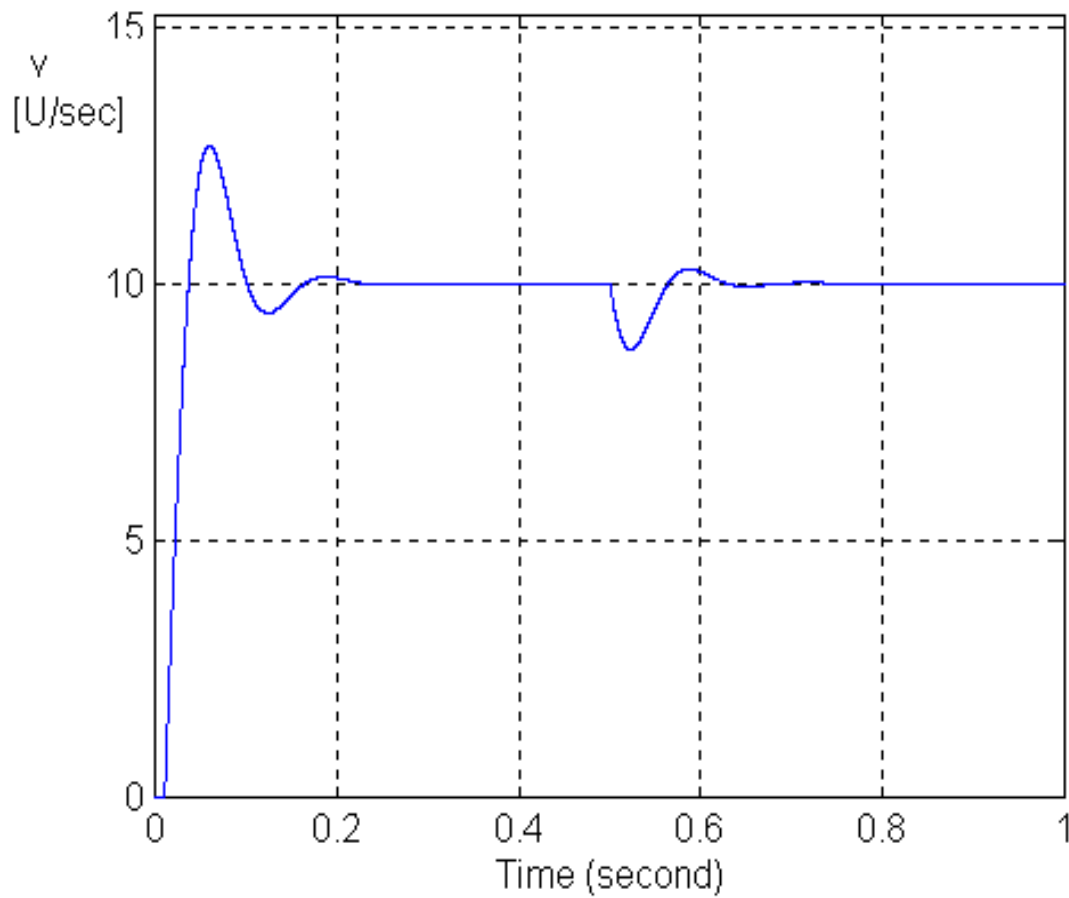
Nunmehr ist noch zu berücksichtigen, daß bei der Aufnahme der Streckendaten der Meßwandler mit  $K_M = 3,1$  und das Vorfilter mit  $K_V = 3,1$  nicht vorhanden waren. Meßwandler und Vorfilter haben (natürlich) denselben Beiwert. Man vergleiche auch mit dem SIMULINK - Modell. Diesen Beiwert kann man sich als einen Multiplikator über den Summenpunkt geschoben denken. Man erkennt sodann:

- 1.) Nach dem Überschieben des Faktors von „3,1“ erhält man die „vereinfachte Struktur eines Regelkreises“.
- 2.) Allerdings ist dann der Faktor „3,1“ zuviel vorhanden und man muß ihn im Regelalgorithmus „herausrechnen“.

Der PID - Algorithmus lautet sodann:

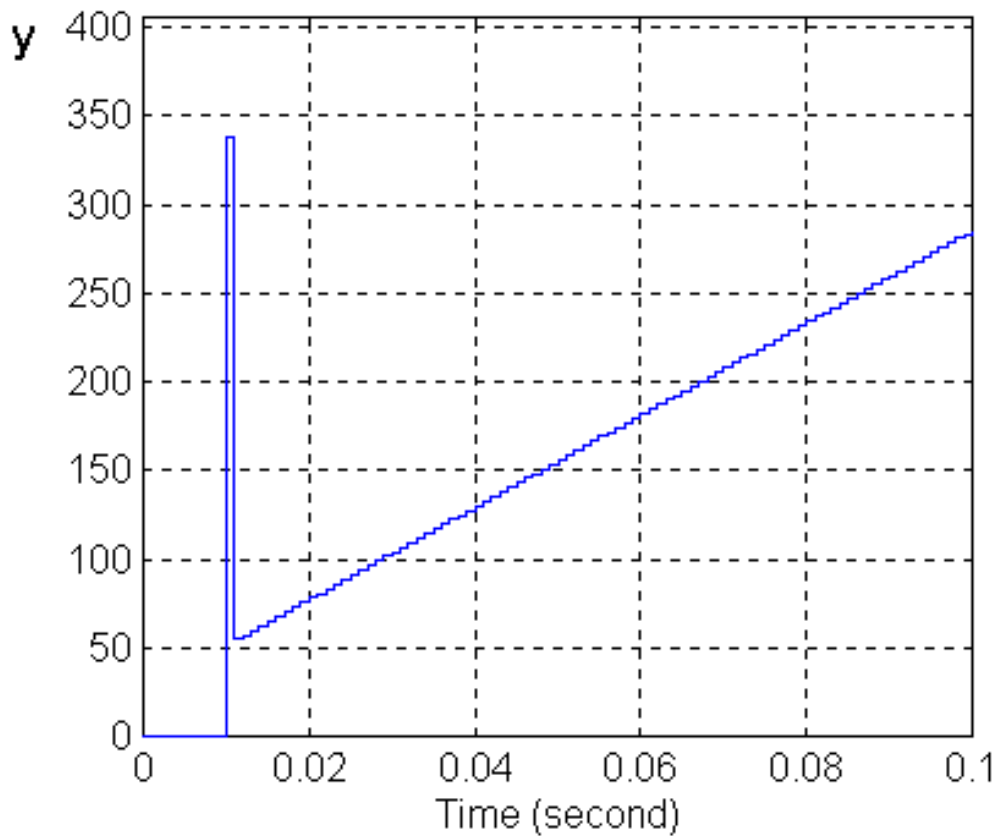
$$y_k = y_{k-1} + 33,8 / 3,1 e_k - 62,14 / 3,1 e_{k-1} + 28,6 / 3,1 e_{k-2}.$$

In dieser Form wurde der PID - Algorithmus realisiert und man erhielt einen Verlauf der Regelgröße wie ihn das nachstehende Bild 2.22 zeigt.



**Bild 2.22 :** Verlauf der Regelgröße nach Führungsgrößensprung von 0 Umdr. / sec auf  $w = 10$  Umdr. / sec. Nach 0,5 sec wird ein Störgrößensprung von 50 Nm aufgeschaltet.

Desweiteren wurde der Regelkreis geöffnet und der Verlauf der Stellgröße aufgezeichnet. Dabei stellt man, wenn auch durch Treppenfunktionen nachgebildet, die typische Sprungantwort eines PID-Reglers fest.



**Bild 2.23** : Verlauf der Stellgröße nach Führungsgrößensprung von 0 Umdr. / sec auf  $w = 10$  Umdr. / sec. Nachbildung des PID-Verhaltens durch einen digitalen Regler.

### 3. Systemtheoretische Aspekte

„Laßt die ihr hier eingeht alle Hoffnung fahren“. ... „Herr ihr Sinn beängstigt mich.“ ...  
„Hier sei jedweder Argwohn weggebannt und alle Zagnis sterb an diesem Orte.“ (Dante. Göttliche Kommödie; Höllenabstieg)

#### 3.1. Regeln für die Laplace-Transformation

Sei  $L\{f\} = F(s)$  und  $L^{-1}\{F\} = f(t)$ .

Ausführlich:  $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$  und  $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$ ;

Beachte  $L^{-1}\{F\} = 0$  für  $t \leq 0$

- **Linearitätssatz:**  $L\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} = c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbf{C}, \mathbf{R}$

- **Ähnlichkeitssatz:**  $L\{f(at)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$

- **Verschiebungssatz:**  $L\{f(t-a)\} = e^{-as} \cdot F(s)$

- **Dämpfungssatz:**  $L\{e^{\alpha t} \cdot f(t)\} = F(s-\alpha)$

- **Differentiationssatz:**  $L\{\dot{f}(t)\} = s \cdot F(s) - f(-0)$   
 $L\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s) - f(-0) \cdot s^{n-1} - \dot{f}(-0) \cdot s^{n-2} + \dots + f^{(n-1)}(-0)$

- **Integrationssatz:**  $L\left\{\int_0^t f(\tau) \cdot d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot F(s)$

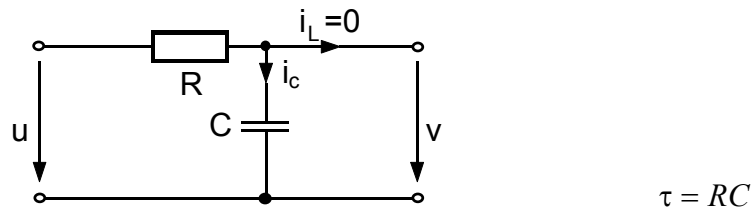
- **Faltung:**  $L^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) \cdot d\tau = \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1(t-\tau) \cdot d\tau = f_1(t) * f_2(t)$

- **Grenzwertsätze:**  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$   
 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$

Die Grenzwertsätze liefern nur dann richtige Ergebnisse, wenn die Grenzwerte im Zeitbereich existieren! Auf diese Tatsache werden wir später bei der Berechnung von stationären Regelfehlern achten müssen.

### 3.2. Übertragungsfunktionen, Gewichtsfunktionen, Übergangsfunktion

Beispiel:



Zustandsmodell:  $\tau \cdot \dot{v} + v = u; \quad v(0) = v_0;$

L -Transformation anwenden:  $L \{ \tau \cdot \dot{v} + v \} = L \{ u \};$

Linearität ausnutzen:  $\tau \cdot L \{ \dot{v} \} + L \{ v \} = L \{ u \}$

Differentiationssatz:  $\tau \cdot [s \cdot V(s) - v_0] + V(s) = U(s);$

Ausdrücke in  $V(s)$  und  $U(s)$  zusammenfassen und ausklammern:

$$V(s) = \left( \frac{1}{1 + s\tau} \right) \cdot U(s) + \left( \frac{\tau}{1 + s\tau} \right) \cdot v_0$$

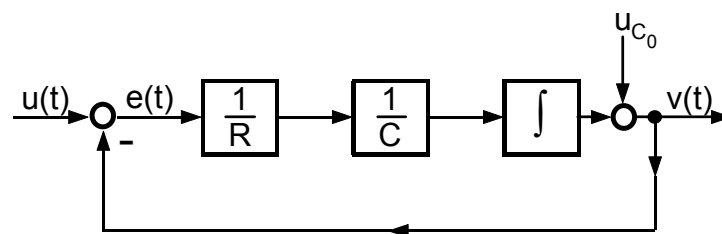
Anfangswert = 0:

$\Rightarrow$

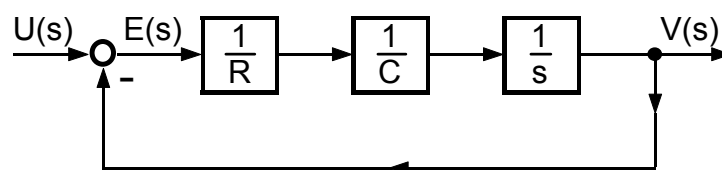
$\frac{V(s)}{U(s)} \Big _{AW=0}$	$= G(s) - \text{Übertragungsfunktion (transferfunction)}$
----------------------------------	---

Im vorliegenden Fall ist also  $G(s) = \frac{1}{1 + s\tau}$

Alternative Berechnung von  $G(s)$  mit Hilfe eines Strukturbildes:



Wenn man im Sinne des Integrationssatzes Blöcke mit „ $\int$ “ durch  $\frac{1}{s}$  ersetzt und die Anfangswerte = 0 setzt, dann erhält man das Strukturbild im Bildbereich der Laplace-Transformation:

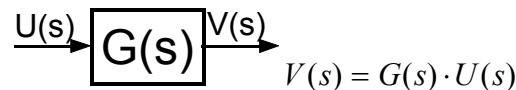


Aus dem Strukturbild im Bildbereich der Laplacetransformation liest man ab:

$$V(s) = \left( \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{C} \right) \cdot E(s); \quad E(s) = U(s) - V(s); \quad \Rightarrow \quad V(s) \cdot \left( 1 + \frac{1}{sRC} \right) = U(s) \cdot \frac{1}{sRC}$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{sRC}}{1 + \frac{1}{sRC}} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + s\tau} = G(s)$$

Abkürzende Darstellung:



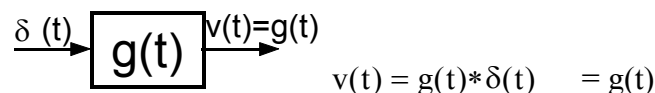
Sei speziell:  $U(s) = 1$ . Dann gilt

$$V(s) = G(s) \cdot 1 = G(s)$$

Das Ausgangssignal ist die Übertragungsfunktion selbst.

Für den Zeitbereich gilt bekanntlich (vgl. VL Systemtheorie):  $L^{-1}\{1\} = \delta(t)$ .

Im Sinne der bereits verwendeten, abkürzenden Darstellung kann man dies so darstellen:



Es ist :

$$\mathbf{g(t) = L^{-1}\{G(s)\} \text{ die } \textbf{Gewichtsfunktion}; (Impulsantwort, impulse response, Stoßantwort)}$$

Offenbar gilt bei linearen, zeitinvarianten Systemen  
(d.h. Systemen mit konstanten Parametern) immer:

$$\textbf{Systemreaktion } \mathbf{v(t) = \int_0^t g(t - \tau) \cdot u(\tau) d\tau}$$

Berechnung des Ausgangssignals  $v(t)$ , wenn  $u(t)$  - Einheitssprung  $\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$

$$V(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} \quad \bullet \text{---} \circ \quad v(t) = g(t) * \sigma(t) = \int_0^t g(\tau) \cdot d\tau = h(t)$$

Man nennt.

$$\mathbf{h(t) = L^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{1}{s}\right\} = \int_0^t g(\tau) \cdot d\tau} \quad \textbf{Übergangsfunktion} \text{ (Sprungantwort - step response)}$$

Während man  $g(t)$  meßtechnisch nur schwer erfassen kann, ist  $h(t)$  normalerweise einfach zu messen!



Man beachte, daß bei uns die Einheitssprungfunktion definiert wurde als

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Es gibt auch bei anderen Autoren die Definition als

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{Das gibt manchmal Anlaß zu Mißverständnissen}$$

**Zusatzbemerkung:** Ausgehend von

$$v(t) = \int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau$$

bzw. von

$$V(s) = G(s) \cdot U(s)$$

erhält man durch elementare Umformungen:

$$V(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$= \frac{1}{s} G(s) \cdot sU(s) \quad \text{mit "1" multipliziert}$$

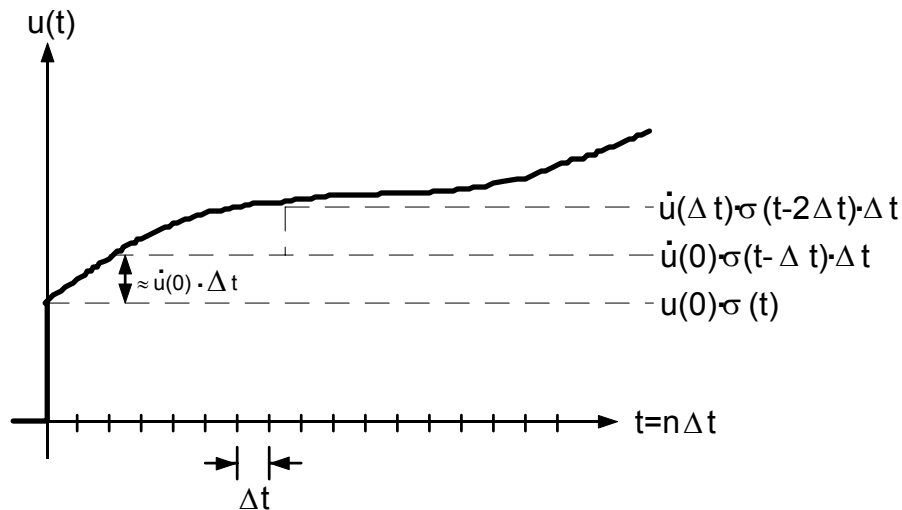
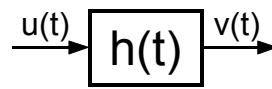
$$= \frac{1}{s} G(s) \cdot (sU(s) - u(0) + u(0)) \quad \text{"0" addiert}$$

$$= \frac{1}{s} G(s) \cdot (sU(s) - u(0)) + \frac{1}{s} G(s) \cdot u(0)$$

$$\Rightarrow v(t) = h(t) * \dot{u}(t) + h(t) \cdot u(0)$$

$$v(t) = h(t) \cdot u(0) + \int_0^t h(t-\tau) \cdot \dot{u}(\tau) \cdot d\tau \quad \text{das Duhamel - Integral}$$

**Anschauliche Interpretation:**



$$u(t) \approx u(0) \cdot \sigma(t) + \sum_{i=1}^n \dot{u}(i-1) \cdot \Delta t \cdot \sigma(t-i\Delta t) = u(0) \cdot \sigma(t) + \sum_{i=1}^n \dot{u}(i-1) \cdot \sigma(t-i\Delta t) \cdot \Delta t$$

Am Ausgang gilt:  $v(t) \approx h(t) \cdot u(0) + \sum_{i=1}^n \dot{u}(i-1) \cdot h(t-i\Delta t) \cdot \Delta t$

mit:  $\Delta t \rightarrow dt \approx 0$ ;  $n \rightarrow \infty$ ;  $i\Delta t \rightarrow \tau$

$$\Rightarrow v(t) = h(t) \cdot u(0) + \int_0^t \dot{u}(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

Weiterhin nennt man bekanntlich (vgl. die Vorlesungen Meßtechnik; Systemtheorie; und Schaltungstechnik)

$G(s) \Big _{s=j\omega}$ - den Frequenzgang (frequency response)
--

**Vorsicht:**



Der **Frequenzgang** wird in der Nachrichtentechnik auch die **Systemfunktion** genannt und mit  $H(\omega)$  abgekürzt.



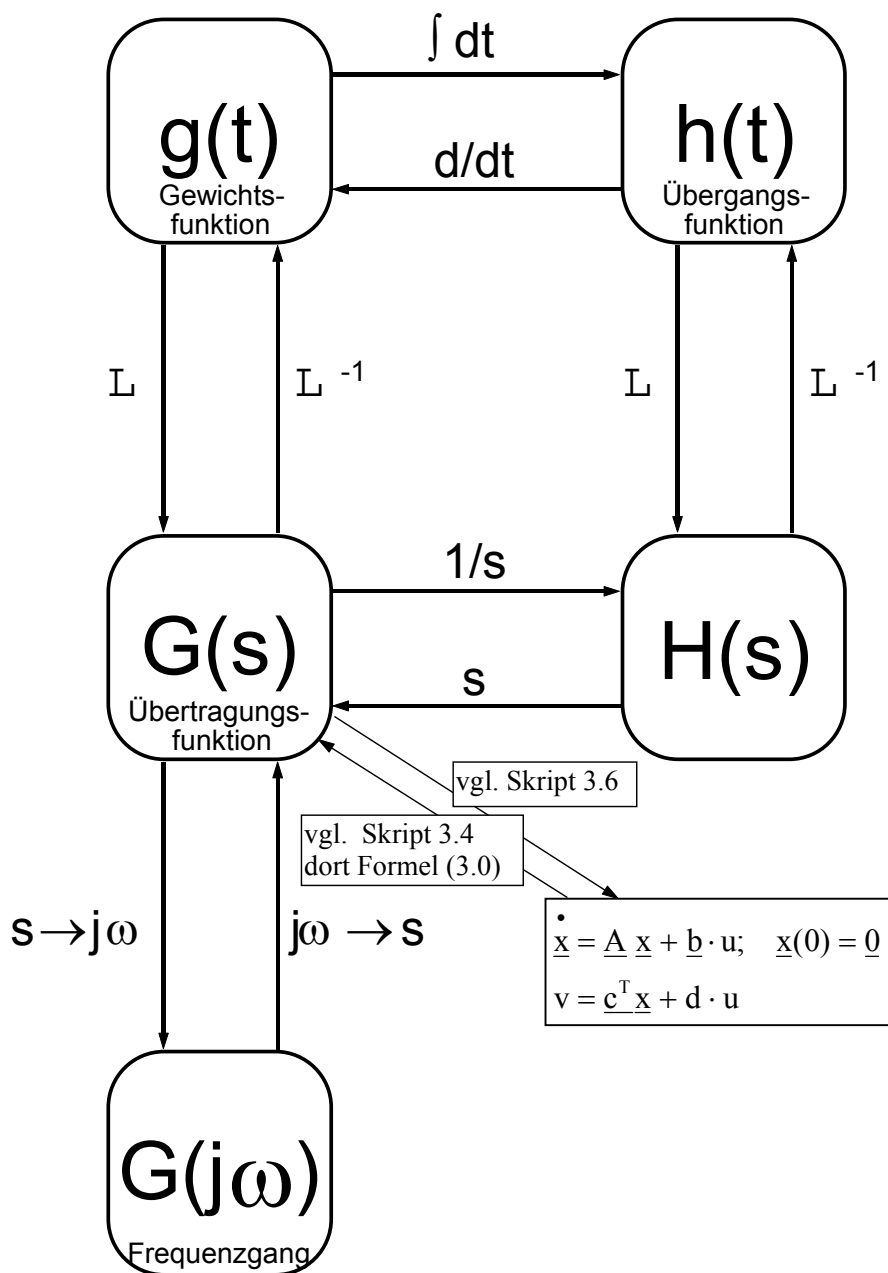
Es gilt aber: Regelungstechnik  $G(j\omega) \equiv H(\omega)$  Nachrichtentechnik,  
was hoffentlich nicht zu Mißverständnissen führt!



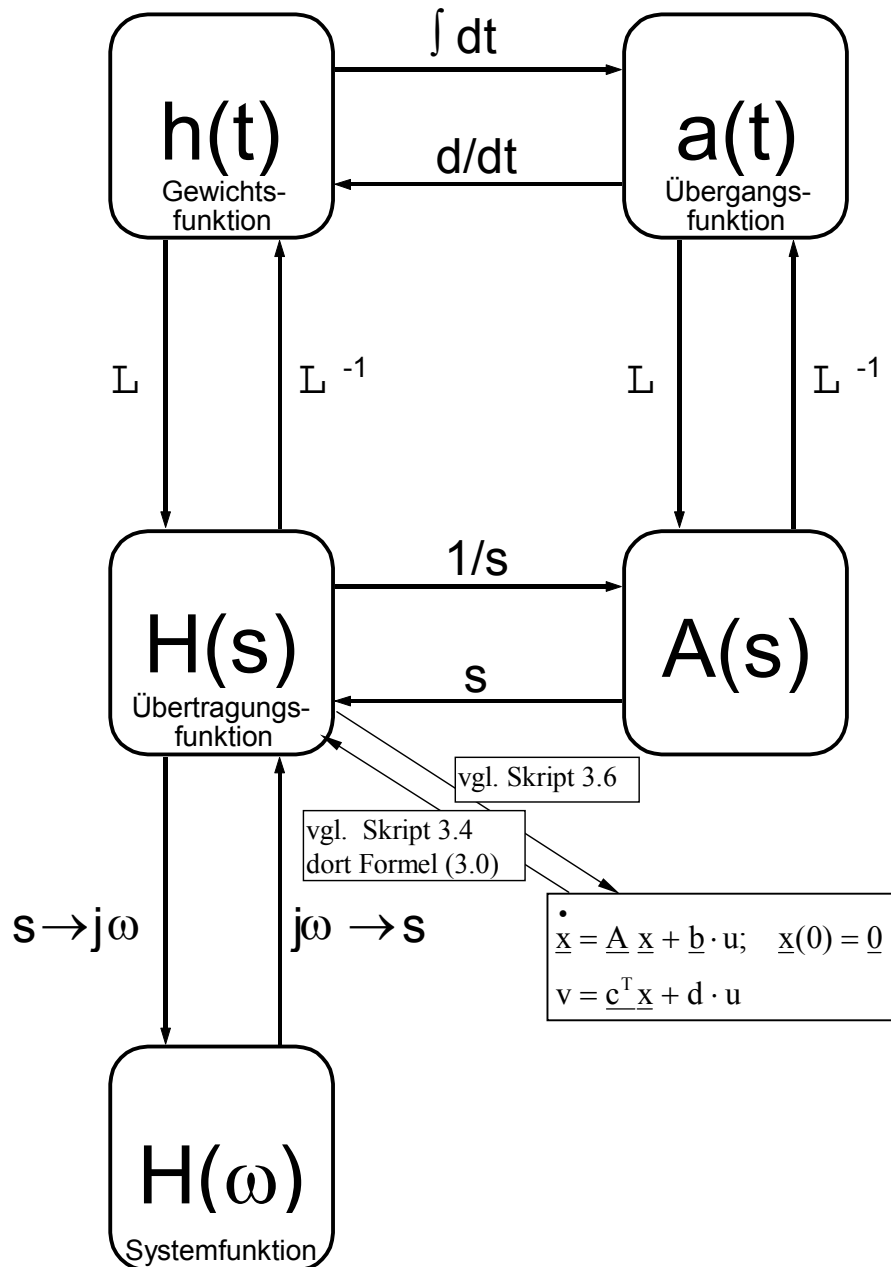
Der Frequenzgang nimmt wegen seiner meßtechnischen Bedeutung in der Regelungstechnik und in der Nachrichtentechnik (dort unter dem Namen Systemfunktion) eine zentrale Stellung ein.





**Grafische Darstellung der Beziehungen zwischen den verschiedenen Funktionen:**


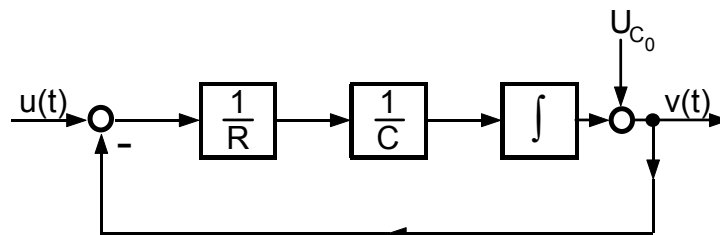
Diese grafische Darstellung der Beziehungen zwischen den verschiedenen Funktionen werde noch einmal mit der Nomenklatur der Nachrichtentechnik dargestellt.



Zum Schluß des Abschnittes 3.2. noch ein wichtiger Hinweis:

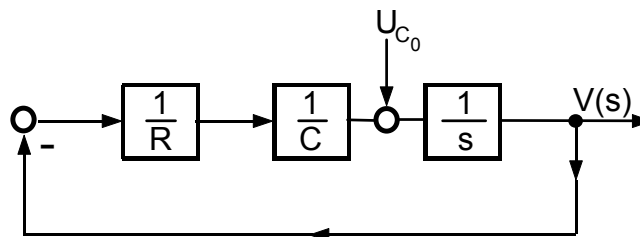
### Einfluß der Anfangswerte

Für die Bestimmung von  $G(s)$  werden die Anfangswerte zu null gesetzt. Der Einfluß der Anfangswerte kann z.B. aus dem Strukturbild entnommen werden. Wir betrachten noch einmal das Einführungsbeispiel (RC-Glied) zu Abschnitt 3.2 und nehmen an, daß der Kondensator eine Anfangsladung trägt; dann haben wir bekanntlich folgende Blockstruktur:



Sei  $u(t) \equiv 0$  angenommen, dann erhalten wir  $v(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\tau}{1 + s\tau} \cdot U_{C_0} \right\} = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot U_{C_0} \cdot \sigma(t)$

Wenn man diesen Einfluß des Anfangswertes mit Hilfe des Strukturbildes im Bildbereich der L-Transformation bestimmen will, dann muß man **den Anfangswert auf den Eingang des Blockes mit „1/s“ vorverlegen** und erhält folgende Struktur:



Dann liest man richtig ab:

$$V(s) = \frac{U_{C_0} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{sRC}} = U_{C_0} \cdot \frac{RC}{1 + sRC} = U_{C_0} \cdot \frac{\tau}{1 + s\tau}$$

Begründung: Der konstante Anfangswert ( $U_{C_0}$ ) geht nach L-Transformation in  $U_{C_0} \cdot \delta(t)$  über. Damit sich der Anfangswert richtig auf den Systemausgang auswirkt, muß man den Term  $U_{C_0} \cdot \delta(t)$  auf den Integrationseingang vorverlegen; denn es gilt:  $\int_0^t \delta(t) dt = 1$ .

(vgl. Vorlesung Systemtheorie)

### 3.3 Weitere Anmerkungen zu $G(s)$ / bzw. zu $g(t)$

#### 3.3.1 Grundlagen

a) Es gilt :  $L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$

Die L -Rücktransformation geschieht häufig mit Hilfe der *Partialbruchentwicklung*,

$$\text{da } G(s) \text{ meist vom Typ } G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{A_1}{s - s_{\infty 1}} + \dots + \frac{A_n}{s - s_{\infty n}}$$

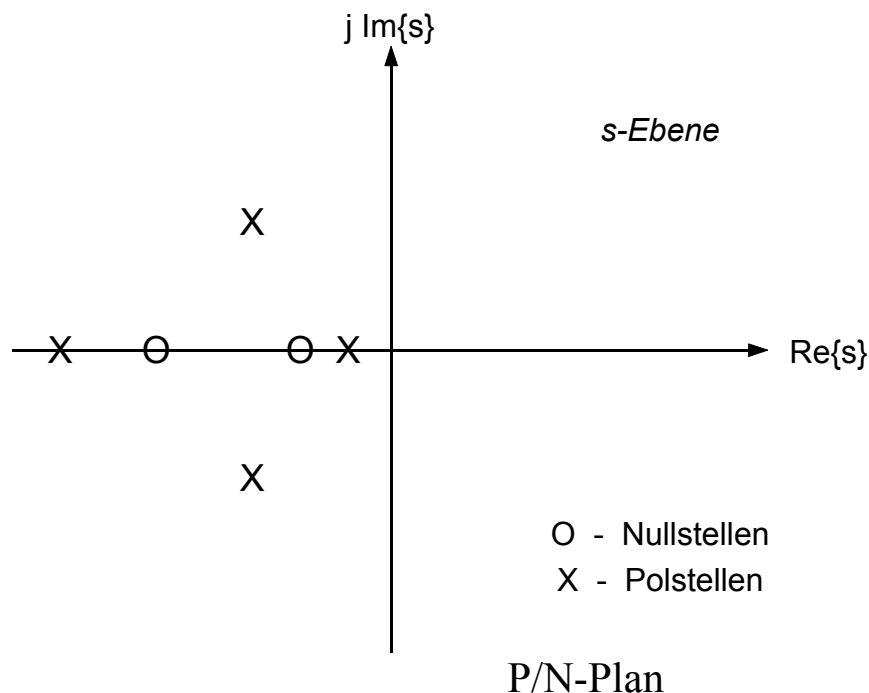
$s_{\infty 1}, s_{\infty 2}, \dots, s_{\infty n}$  - Pole der Übertragungsfunktion

$A_1, A_2, \dots, A_n$  - Residuen

Darstellung der Pole und Nullstellen von  $G(s)$  im Pol-Nullstellenplan (P/N-Plan)

Bezeichnen noch  $s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0m}$  die Nullstellen der Übertragungsfunktion, dann gilt

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = b_m \cdot \frac{(s - s_{01})(s - s_{02}) \dots (s - s_{0m})}{(s - s_{\infty 1})(s - s_{\infty 2}) \dots (s - s_{\infty n})}$$



**Beachte:** Da Zähler- und Nennerpolynome von  $G(s)$  Polynome mit reellen Koeffizienten sind, treten die komplexen Pole und Nullstellen auch immer konjugiert komplex auf.

b) *Stabilität*

Offenbar (hier ohne Nachweis) ist ein lineares, zeitinvariantes Übertragungssystem stabil, wenn für alle Pole  $s_{\infty i}$  von  $G(s)$  gilt:  $\operatorname{Re}\{s_{\infty i}\} < 0$  (Vgl. VL Systemtheorie)

c) *Realisierbarkeit.*

Fallunterscheidungen hierzu:

„Wo das Rechnen anfängt, hört das Denken auf.“ (Schopenhauer)

1. Fall: Zählergrad < Nennergrad ( $m < n$ )

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \Rightarrow \text{Übertragungssystem (schaltungstechnisch) realisierbar.}$$

2. Fall: Zählergrad = Nennergrad ( $m = n$ )

Das System ist sprungfähig und (noch) schaltungstechnisch realisierbar!

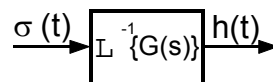
$$\text{Nachweis: } G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{aligned} & (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0) : (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) = b_n \\ & \frac{-b_n s^n + b_n a_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_n a_1 s + b_n a_0}{(b_{n-1} - b_n a_{n-1}) s^{n-1} + \dots + (b_0 - b_n a_0)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G(s) = b_n + \frac{\overbrace{(b_{n-1} - b_n a_{n-1})}^{\beta_{n-1}} s^{n-1} + \dots + \overbrace{(b_0 - b_n a_0)}^{\beta_0}}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = b_n + \tilde{G}(s)$$

$$\Rightarrow \text{Zählergrad}(\tilde{G}(s)) = n-1; \quad \text{Nennergrad}(\tilde{G}(s)) = n$$

Auf ein Übertragungssystem  $G(s)$  wird ein Einheitssprung  $\sigma(t)$  geschaltet



dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \left( G(s) \cdot \frac{1}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} (b_n + \tilde{G}(s)) = b_n + \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{G}(s)$$

$$\text{Wegen: } \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\beta_{n-1} \frac{1}{s} + \dots + \beta_0 \frac{1}{s^n}}{1 + a_{n-1} \frac{1}{s} + \dots + a_0 \frac{1}{s^n}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = b_n \quad - \quad \text{"sprungfähiges" System}$$

3. Fall: Zählergrad > Nennergrad ( $m > n$ ); nicht realisierbar !

Ähnlich wie im 2. Fall liefert die Polynomdivision:

$$G(s) = \frac{b_{n+1} s^{n+1} + b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = b_{n+1} s + \beta_n + \frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$H(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) = b_{n+1} + \beta_n \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_0}{s^n + \dots + a_0}$$

!

$$h(t) = \underbrace{b_{n+1} \cdot \delta(t)}_{\substack{\text{"Dirac-Impuls"} \\ \Rightarrow \text{nicht realisierbar!}}} + \underbrace{\beta_n \cdot \sigma(t)}_{\substack{\text{sprungfähiger} \\ \text{Anteil}}} + L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_0}{s^n + \dots + a_0} \right\}$$

### 3.3.2 Beispiele für Partialbruchentwicklungen, graphische Residuenbestimmungen und der Einfluß von „langsamen“ und „schnellen“ Polen

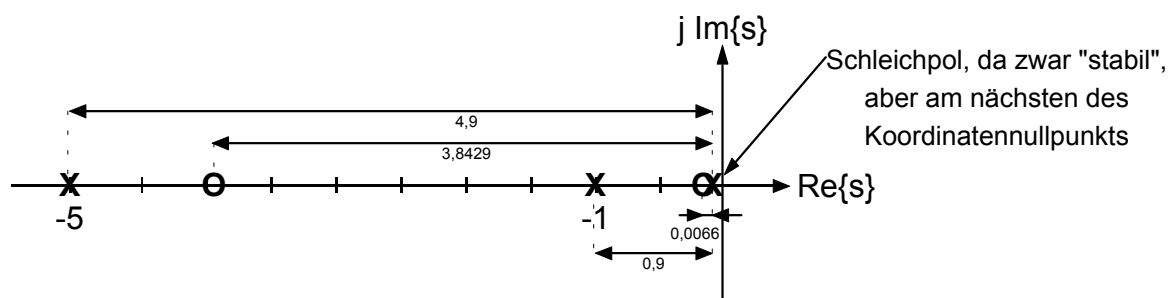
**Beispiel 1a:** Partialbruchentwicklung bei Vorlage von reellen Polen; hier ist der „Schleichpol“ nahezu kompensiert. ( Wegen der Bezeichnung „Schleichpol“ sehe man sich später das Beispiel 4 genauer an.)

a) Rechnung:

$$G(s) = \frac{1,189s^2 + 4,815s + 0,5}{s^3 + 6,1s^2 + 5,6s + 0,5} = \frac{C_1}{(s+1)} + \frac{C_2}{(s+5)} + \frac{C_3}{(s+0,1)}$$

$$G(s) = 1,189 \cdot \frac{(s+0,1066)(s+3,9429)}{(s+1)(s+5)(s+0,1)} = \dots = \frac{0,8683}{s+1} + \frac{0,3138}{s+5} + \frac{0,00689}{s+0,1}$$

b) Graphische Bestimmung der Residuen:



Es ist (graphische Bestimmung der Residuen):  $1,189 \cdot \frac{0,0066 \cdot 3,8429}{0,9 \cdot 4,9} = 0,0068 = |C_3|$ .

Analog lassen sich die Residuen zu den restlichen Polen bestimmen.

Für die graphische Bestimmung der Residuenbeträge gilt offenbar stets die Formel ( bitte selber überlegen !):

$$\text{Betrag des Residuums zum Pol } s_{i,\infty} = |b_m| \cdot \frac{\text{Produkt der Abstände von } s_{i,\infty} \text{ zu den Nullstellen}}{\text{Produkt der Abstände von } s_{i,\infty} \text{ zu den restlichen Polstellen}}$$

Sind keine (endlichen) Nullstellen vorhanden, so lautet die Formel:

$$\text{Betrag des Residuums zum Pol } s_{i,\infty} = \frac{|b_m|}{\text{Produkt der Abstände von } s_{i,\infty} \text{ zu den restlichen Polstellen}}$$

Diese Formeln kann man selbstverständlich auch bei Vorlage von einfachen (konjugiert) komplexen Polstellen anwenden. Bei Vorlage von reellen oder komplexen Mehrfachpolen gelten sie in der oben angegebenen Form nicht mehr.

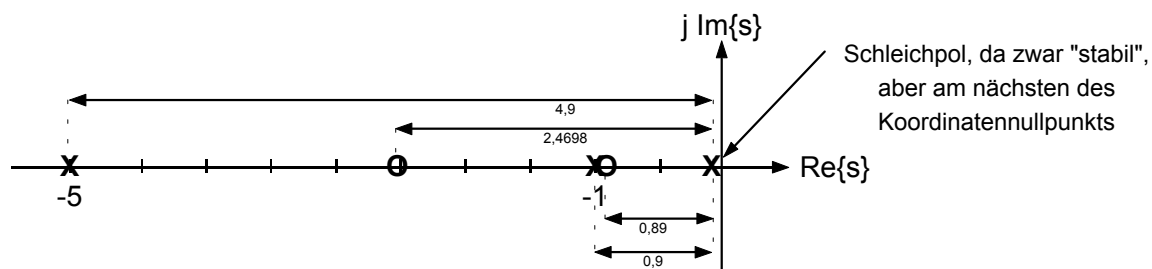
**Beispiel 1b:** Partialbruchentwicklung bei Vorlage von reellen Polen  
( Fast wie Beispiel 1a. Aber der „Schleichpol“ dominiert jetzt. )

a) Rechnung:

$$G(s) = \frac{0,1967s^2 + 0,7s + 0,5}{s^3 + 6,1s^2 + 5,6s + 0,5} = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+5} + \frac{C_3}{s+0,1}$$

$$G(s) = 0,1967 \cdot \frac{(s+2,5698)(s+0,99)}{(s+1)(s+5)(s+0,1)} = \dots = \frac{0,000916}{s+1} + \frac{0,098}{s+5} + \frac{0,098}{s+0,1}$$

b) Graphische Bestimmung der Residuen:



Offenbar ist (graphische Bestimmung der Residuen):  $0,1967 \cdot \frac{0,89 \cdot 2,4698}{0,9 \cdot 4,9} = 0,098 = |C_3|$

Analog lassen sich die Residuen zu den restlichen Polen bestimmen.

*„Und wieviel Leute habe ich nicht zu meiner Zeit verblöden sehen aus maßloser Gier nach Gelehrsamkeit.“ ( Montaigne. Versuch über die Erziehung )*

**Beispiel 2:** Partialbruchentwicklung bei Vorlage von konjugiert komplexen Polen

a) Rechnung:

$$G(s) = \frac{20}{s^3 + 12s^2 + 22s + 20} = \frac{20}{(s+10)(s+1+j)(s+1-j)} = \frac{C_1}{s+10} + \frac{C_2}{s+1+j} + \frac{C_3}{s+1-j}$$

$$G(s) = \frac{0,243}{s+10} + \frac{-0,122 - j1,098}{s+1+j} + \frac{-0,122 + j1,098}{s+1-j}$$

$$(|C_2| = |C_3| = 1,102) \quad (\text{beachte: } C_3 = \overline{C_2})$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = 0,234e^{-10t} - (0,128 + j1,095) \cdot e^{-t} \cdot e^{-jt} - (0,128 - j1,095) \cdot e^{-t} \cdot e^{+jt}; t \geq 0$$

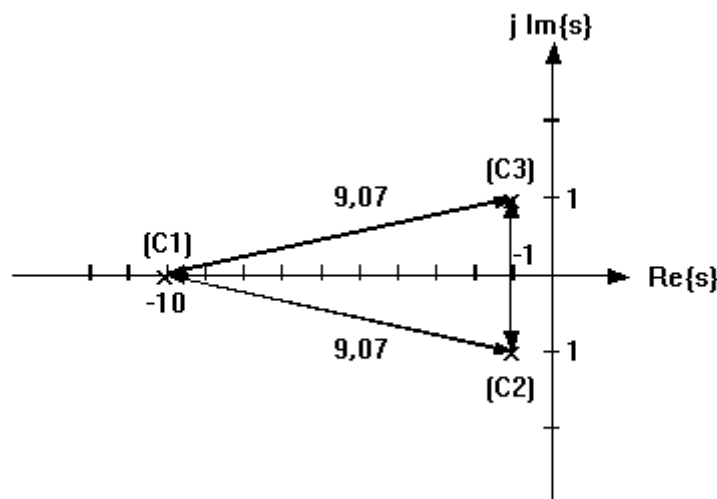
$$g(t) = 0,234e^{-10t} - e^{-t}[(0,128 + j1,095)(\cos t - j \sin t) + (0,128 - j1,095)(\cos t + j \sin t)]; t \geq 0$$

$$g(t) = 0,234e^{-10t} - e^{-t}[0,128 \cos t + 1,095 \sin t + 0,128 \cos t + 1,095 \sin t]; t \geq 0$$

$$g(t) = 0,234e^{-10t} - e^{-t}[0,256 \cos t + 2,19 \sin t]; t \geq 0$$

$$\text{oder: } g(t) = 0,234e^{-10t} - e^{-t} \cdot 2,204 \sin(t + \arctan(0,1168))$$

b) Graphik



$$|C_1| = 20 \cdot \frac{1}{9,07 \cdot 9,07} = 0,243$$

$$|C_2| = 20 \cdot \frac{1}{9,07 \cdot 2} = 1,102 = |C_3|$$

$$\Rightarrow |g(t)| \leq 0,243e^{-10t} + 1,102e^{-t} + 1,102e^{-t} = 0,243e^{-10t} + e^{-t} \cdot 2,204; t \geq 0$$

$$(\text{vgl. mit Rechnung: } g(t) = 0,243e^{-10t} - e^{-t} \cdot 2,204 \sin(t + \arctan(0,1168)))$$



**Beispiel 3:** Partialbruchentwicklung bei Vorlage von reellen Mehrfachpolen

a) Rechnung:

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 9s^3 + 30s^2 + 44s + 24} = \frac{1}{(s+2)^3 \cdot (s+3)} = \frac{C_{11}}{s+2} + \frac{C_{12}}{(s+2)^2} + \frac{C_{13}}{(s+2)^3} + \frac{C_{21}}{(s+3)}$$

-----

Multiplikation mit  $s^4 + 9s^3 + 30s^2 + 44s + 24$  auf beiden Seiten der mit „-----“ markierten Gleichung ergibt:

$$1 = C_{11}(s+2)^2(s+3) + C_{12}(s+2)(s+3) + C_{13}(s+3) + C_{21}(s+2)^3$$

$$\Rightarrow 1 = (C_{11} + C_{21})s^3 + (7C_{11} + C_{12} + 6C_{21})s^2 + (16C_{11} + 5C_{12} + C_{13} + 12C_{21})s + (12C_{11} + 6C_{12} + 3C_{13} + 8C_{21})$$

*Koeffizientenvergleich* ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrrcl} 12C_{11} & + & 6C_{12} & + & 3C_{13} & + & 8C_{21} & = & 1 \\ 16C_{11} & + & 5C_{12} & + & C_{13} & + & 12C_{21} & = & 0 \\ 7C_{11} & + & C_{12} & & & + & 6C_{21} & = & 0 \\ C_{11} & + & C_{21} & & & & & = & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow C_{11} = 1; \quad C_{12} = -1; \quad C_{13} = 1; \quad C_{21} = -1$$

$$\Rightarrow g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = \left( e^{-2t} - t \cdot e^{-2t} + \frac{t^2}{2!} e^{-2t} - e^{-3t} \right) \cdot \sigma(t)$$

Hier sei auch noch auf die VL „Systemtheorie“ verwiesen. Dort haben Sie eine weitere Methode zur Bestimmung der  $C_{ik}$  kennengelernt: den Entwicklungssatz von Heaviside.

b) Graphik:

Die graphische Bestimmung der Residuen ist hier, im Vergleich mit dem Fall einfacher und reeller Pole, schwierig. Mit Zusatzüberlegungen geht es aber doch!

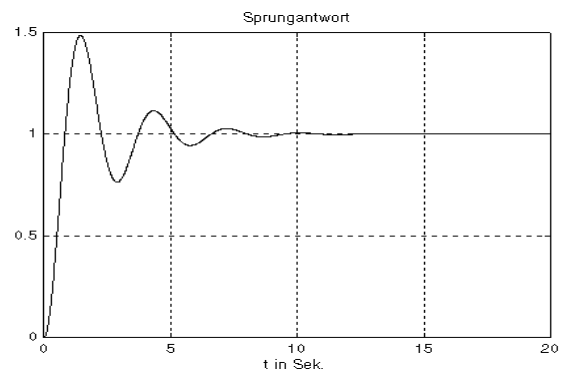
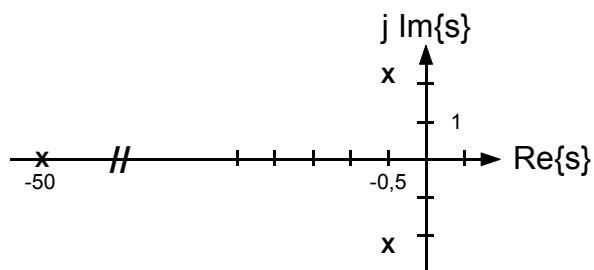
Hierzu sei verwiesen auf:

Truxal, I.G.: „Entwurf automatischer Regelsysteme“, Oldenbourg Verlag, München, 1955

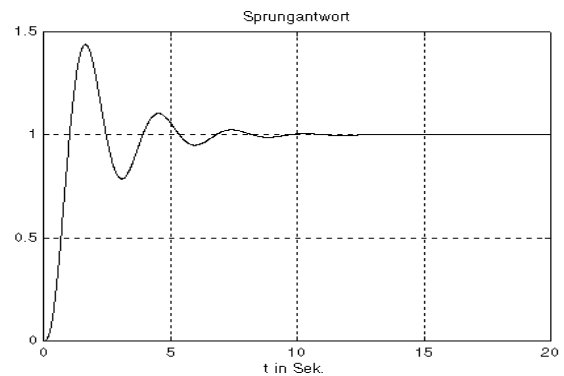
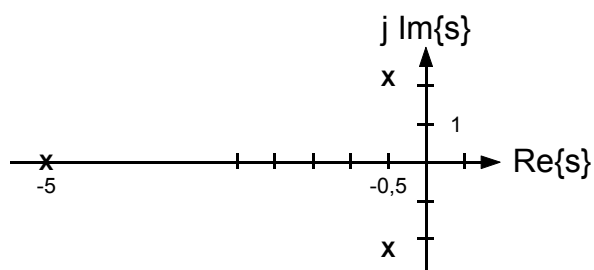
**Beispiel 4:** Einfluß von „langsamen“ und „schnellen“ Polen“.

Man beachte, daß bei den nachfolgenden Beispielen stets  $G(0) = 1$  gilt. Deshalb ist immer  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1$  gewährleistet.

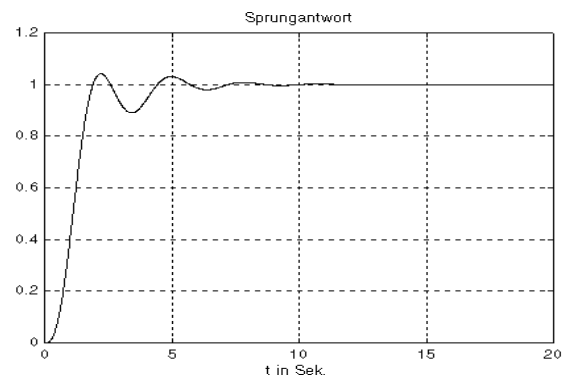
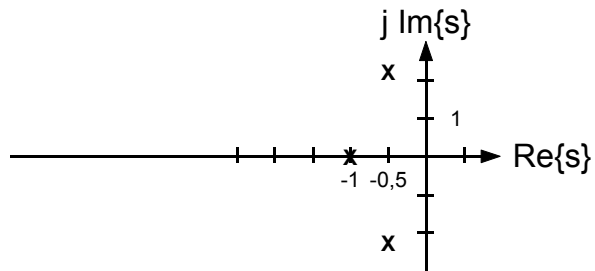
$$\text{a) } G_1(s) = \frac{250 (= 5 \cdot 50)}{(s^2 + s + 5)(s + 50)}$$



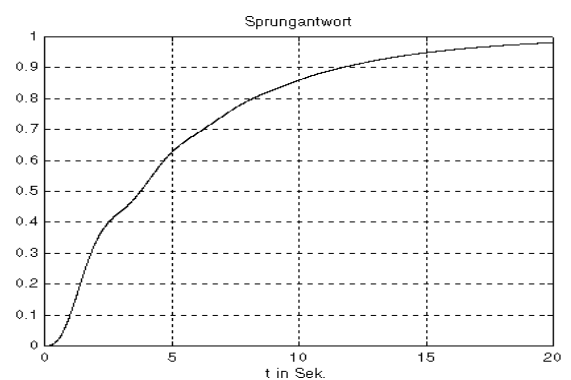
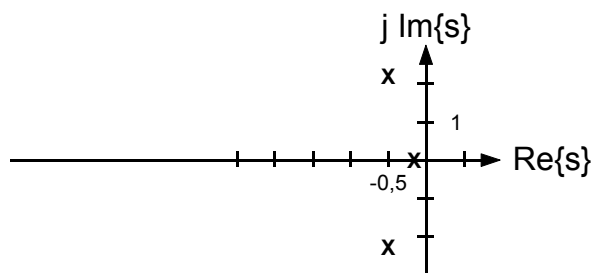
$$\text{b) } G_2(s) = \frac{25 (= 5 \cdot 5)}{(s^2 + s + 5)(s + 5)}$$



c) 
$$G_3(s) = \frac{5 (= 5 \cdot 1)}{(s^2 + s + 5)(s + 1)}$$



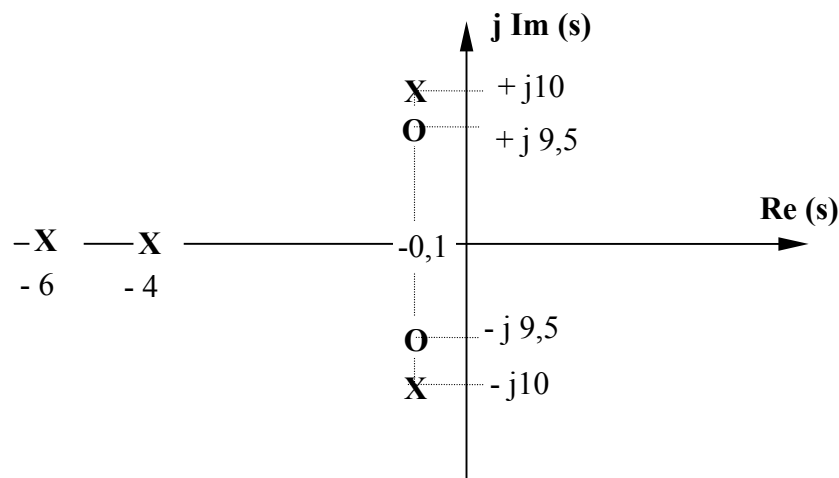
d) 
$$G_4(s) = \frac{1 (= 5 \cdot 0,2)}{(s^2 + s + 5)(s + 0,2)}$$



Während in den Fällen a) und b) der reelle Pol (im Vergleich zu den restlichen Polen) ein „schneller Pol“ war, ist er im Fall d) zu einen „langsamen Pol“ geworden.

**Beispiel 5:** Simulationsbeispiel zum Einfluß der Residuen auf das Zeitverhalten eines linearen Systems.

**Beispiel 5.a:** System mit 2 konjugiert komplexen Polen und 2 reellen Polen; 2 Nullstellen nahe bei den konjugiert komplexen Polen ( PN-Plan nicht maßstäblich ):



Die Übertragungsfunktion hierzu lautet

$$G_1(s) = K \cdot \frac{(s - (-0,1 + j9,5))(s - (-0,1 - j9,5))}{(s - (-6))(s - (-4))(s - (-0,1 + j10))(s - (-0,1 - j10))}$$

entsprechend

$$G_1(s) = K \cdot \frac{(s + 0,1 - j9,5)(s + 0,1 + j9,5)}{(s + 6)(s + 4)(s + 0,1 - j10)(s + 0,1 + j10)} = K \cdot \frac{s^2 + 0,2s + 90,26}{s^4 + 10,2s^3 + 126,1s^2 + 1004,9s + 2400,24}$$

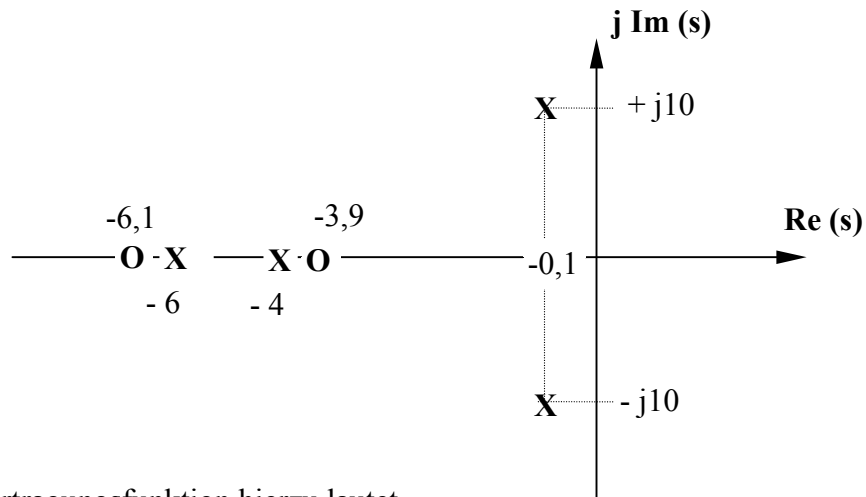
Damit die zugehörige Sprungantwort  $h_1(t)$  für große Zeiten gegen den Grenzwert „1“ läuft, fordern wir (Grenzwertsätze der Laplacetransformation !):  $K = \frac{2400,24}{90,26}$  und somit  $G(0) = 1$ .

Bevor wir die Sprungantwort zu

$$G_1(s) = 26,59 \cdot \frac{s^2 + 0,2s + 90,26}{s^4 + 10,2s^3 + 126,1s^2 + 1004,9s + 2400,24}$$

darstellen, betrachten wir ein weiteres Beispiel.

**Beispiel 5.b:** System mit 2 konjugiert komplexen Polen und 2 reellen Polen ( wie bei 5.a ); 2 Nullstellen jetzt nahe bei den bei den reellen Polen ( PN-Plan nicht maßstäblich ):



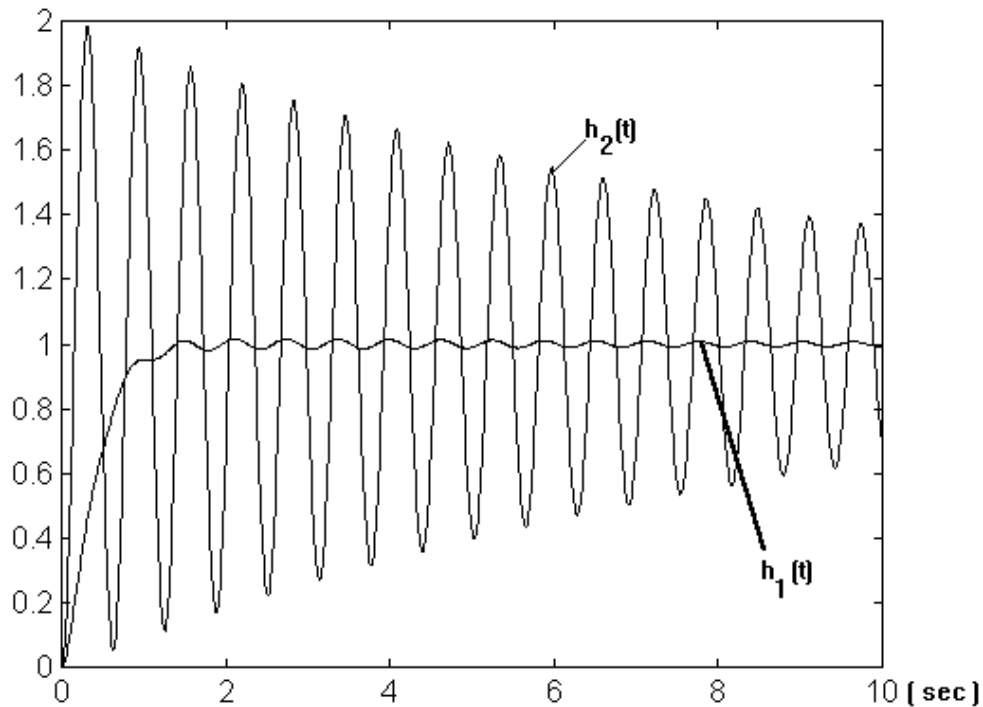
Die Übertragungsfunktion hierzu lautet

$$G_2(s) = K_2 \cdot \frac{s^2 + 10s + 23,79}{s^4 + 10,2s^3 + 126,1s^2 + 1004,9s + 2400,24}$$

Damit die zugehörige Sprungantwort  $h_2(t)$  für große Zeiten gegen den Grenzwert „1“ läuft, fordern wir:

$$G_2(s) = 100,89 \cdot \frac{s^2 + 10s + 23,79}{s^4 + 10,2s^3 + 126,1s^2 + 1004,9s + 2400,24}$$

Betrachten wir nun die beiden zugehörigen Sprungantworten:



**Bild 3.0:** Sprungantworten zu  $G_1(s)$  und  $G_2(s)$ . Gleiche Polstellenverteilung aber unterschiedliche Residuen infolge unterschiedlicher Nullstellenverteilungen

Mißt man in Bild 3.0 die Periodendauer einer Schwingungsperiode aus, so kommt man (egal welche der beiden Sprungantworten betrachtet wird) auf 16 (volle) Schwingungen in 10 sec. Das heißt auf  $f = 1,6$ . ( Hätten wir ganz genau abgelesen, wäre exakt  $f = 1,59$  Hz herausgekommen ). Nun gilt aber  $\omega = 2\pi f = 10,05$  Hz (exakt 10 Hz).

?

Ist Ihnen klar, daß wir damit auch (experimentell) den Imaginärteil des konjugiert komplexen Polpaares bestimmt haben ?  
Wenn nicht → VL Mathematik, Meßtechnik oder Systemtheorie.

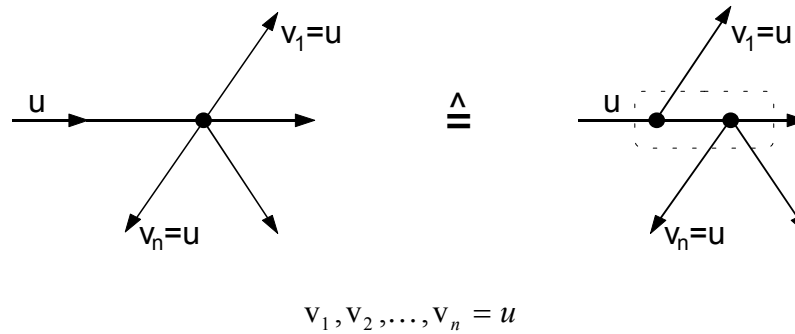
?

Können Sie sich vorstellen, wie man mit Hilfe von Bild 3.0 auch den Realteil des konjugiert komplexen Polpaares bestimmen kann ?  
Wenn nicht → VL Mathematik, Meßtechnik oder Systemtheorie.

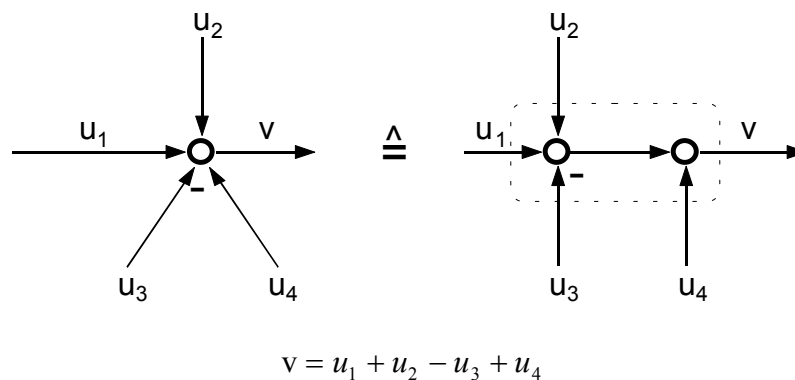
### 3.4 Bestimmung der Übertragungsfunktion $G(s)$ aus dem Strukturbild

Vorbemerkungen zu elementaren Blockumformungen:

a) Verzweigungspunkte: (ein Zugang; mehrere Abgänge)

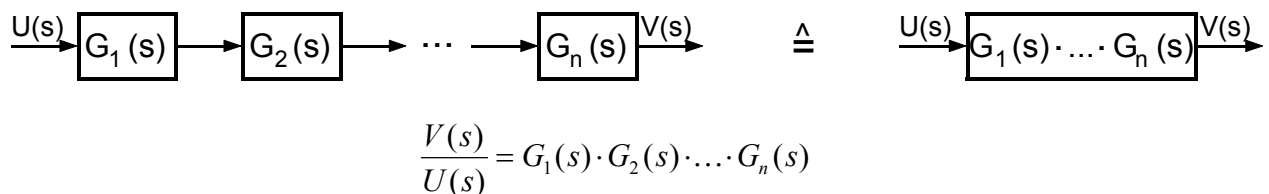


b) Summenpunkte: (mehrere Zugänge; ein Abgang)



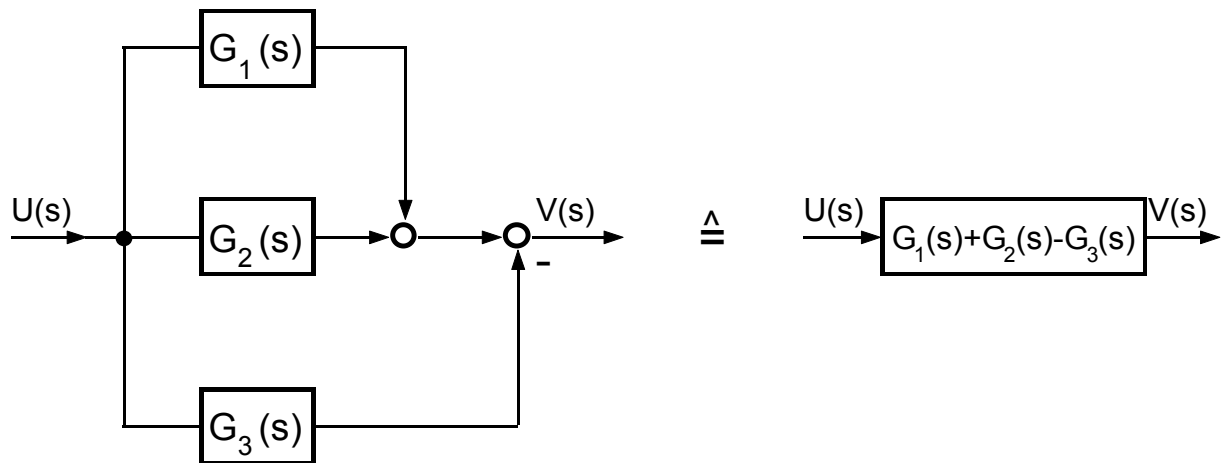
Vereinbarung: Minus-Zeichen rechts vom Pfeil  
Plus-Zeichen können i.d.R. weggelassen werden

c) Reihenschaltung:



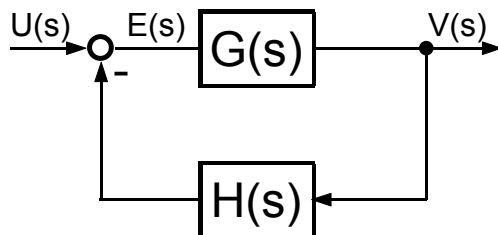
Dabei wird die Rückwirkungsfreiheit (vgl. VL „Systemtheorie“) der einzelnen Blöcke vorausgesetzt!

d) Parallelschaltung:

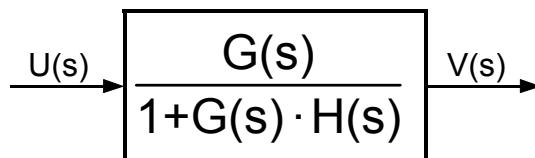


$$\frac{V(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) - G_3(s)$$

e) Gegenkopplung:



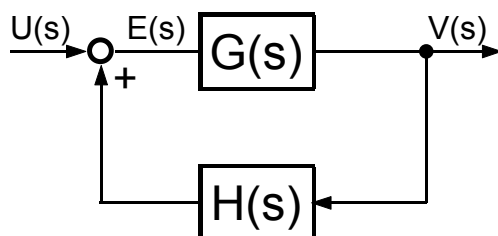
$$\begin{aligned} V(s) &= G(s) \cdot (U(s) - H(s) \cdot V(s)) \\ (1 + G(s) \cdot H(s)) \cdot V(s) &= G(s) \cdot U(s) \\ \frac{V(s)}{U(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} \end{aligned}$$



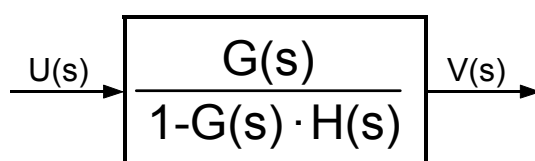
*Merkregel für Gegenkopplung:*

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{\text{Vorwärts}}{1 + \text{Kreis}}$$

f) Mitkopplung:



$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s) \cdot H(s)}$$

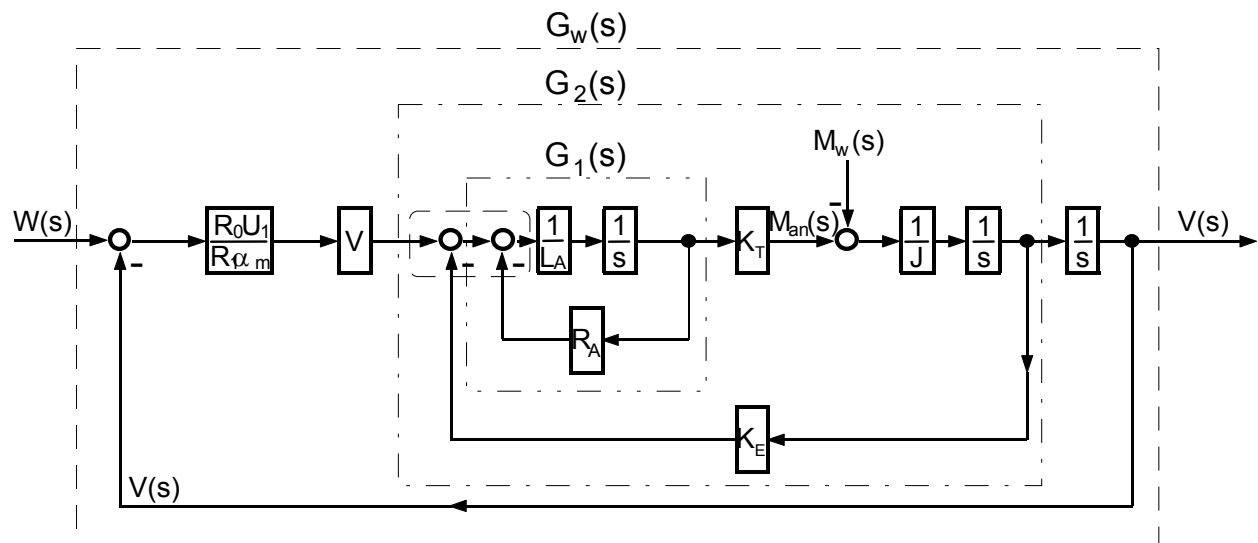


*Merkregel für Mitkopplung:*

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{\text{Vorwärts}}{1 - \text{Kreis}}$$



### 3.4.1 Anwendung auf das Einführungsbeispiel



**Bild 3.1:** Strukturbild des Einführungsbeispiels im Bildbereich der L-Transformation

Die in Bild 3.1 gestrichelt eingerahmten zwei Summenpunkte sind durch Auflösung eines Summenpunktes entstanden. (vgl. Strukturbild unter Abschnitt 2.3.)

Das Strukturbild wird jetzt durch Auflösung der Gegenkopplungen  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  vereinfacht:

$$G_1(s) = \frac{\frac{1}{L_A} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{R_A}{L_A} \cdot \frac{1}{s}} = \frac{1}{R_A + sL_A}$$

$$G_2(s) = \frac{\frac{1}{R_A + sL_A} \cdot K_T \cdot \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{K_T \cdot K_E}{R_A + sL_A} \cdot \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{s}} = \frac{K_T}{s(R_A + sL_A) \cdot J + K_T \cdot K_E} = \frac{K_T}{s^2 J L_A + s J R_A + K_T K_E} = G_{Motor}(s)$$

Mit den praktisch wichtigen Abkürzungen:  $\tau_{El} = \frac{L_A}{R_A}$  – Elektrische Zeitkonstante (sec)

und:  $\tau_M = \frac{J \cdot R_A}{K_E \cdot K_T}$  – mechanische Zeitkonstante (sec)

wird daraus:

$$G_{Motor}(s) = \frac{\frac{1}{K_E}}{s^2 \tau_M \cdot \tau_{El} + s \cdot \tau_M + 1} = \frac{\frac{\omega_0}{U_0}}{s^2 \tau_M \cdot \tau_{El} + s \cdot \tau_M + 1}$$

Vgl. Kapitel 2 Seite 8

Wir wollen diese (für die Antriebstechnik wichtigen Abkürzungen) hier nicht weiter verwenden. Vergleichen Sie aber bitte mit 3.4.2.

**Führungsübertragungsfunktion** (die Abkürzungen für die mechanische und elektrische Zeitkonstante werden jetzt nicht weiter verwendet):

$$G_w(s) = \frac{V(s)}{W(s)} \bigg|_{\substack{Z=0 \\ (M_w=0)}} = \frac{\frac{R_0}{R_1} \cdot \frac{U_1}{\alpha_m} \cdot V \cdot \left( \frac{K_T}{s^2 J L_A + s J R_A + K_T K_E} \right) \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{R_0}{R_1} \cdot \frac{U_1}{\alpha_m} \cdot V \cdot \left( \frac{K_T}{s^2 J L_A + s J R_A + K_T K_E} \right) \cdot \frac{1}{s}} = \frac{R_0 U_1 V K_T}{s(s^2 J L_A + s J R_A + K_T K_E) R_1 \alpha_m + R_0 U_1 V K_T}$$

$$G_w(s) = \frac{R_0 U_1 V K_T}{s^3 J L_A R_1 \alpha_m + s^2 J R_A R_1 \alpha_m + s K_E K_T R_1 \alpha_m + R_0 U_1 V K_T}$$

**Störübertragungsfunktion:**

$$G_z(s) = \frac{V(s)}{M_w(s)} \bigg|_{W=0} = \dots \quad (\text{als Übungsaufgabe selber rechnen!})$$

Wegen  $G_w(0)=1$  gilt ( bei Störung  $m_w=0$  ), daß aus  $w(t) = \hat{\alpha} \cdot \sigma(t)$  folgt:  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \hat{\alpha}$

Nachweis:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot V(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_w(s) \cdot \frac{\hat{\alpha}}{s} = \hat{\alpha} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} G_w(s) \stackrel{G_w(0)=1}{=} \hat{\alpha} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \hat{\alpha}$$

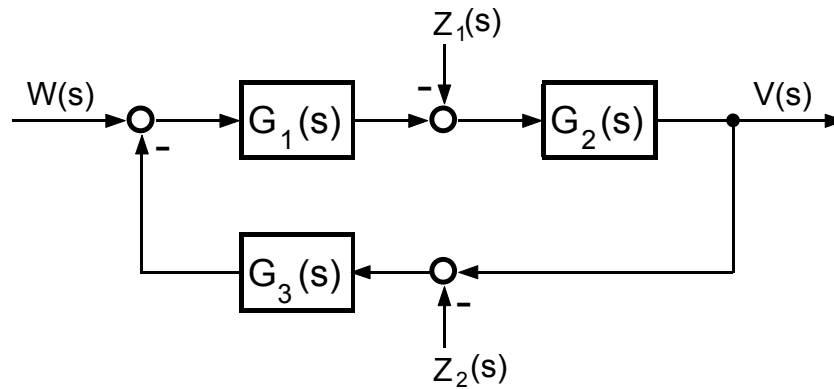
Die Grenzwertangabe gilt natürlich nicht, wenn das Regelsystem instabil sein sollte!

Da sich Führungs- und Störsignale ungestört überlagern (lineares System!) so gilt:

$$V(s) = G_w(s) \cdot W(s) + G_z(s) \cdot M_w(s)$$

**Einschub:**

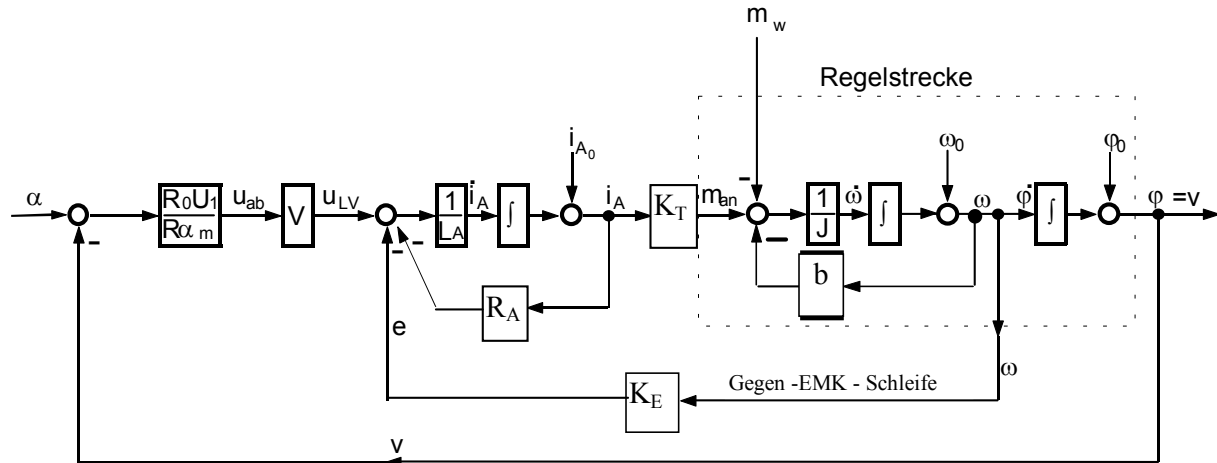
**Störsignale, Führungssignale die an verschiedenen Stellen des Regelkreises angreifen**



$$\left. \begin{aligned}
 G_w(s) &= \frac{V(s)}{W(s)} \bigg|_{\substack{Z_1=0 \\ Z_2=0}} = + \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)} \\
 G_{z_1}(s) &= \frac{V(s)}{Z_1(s)} \bigg|_{\substack{Z_2=0 \\ W=0}} = - \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)} \\
 G_{z_2}(s) &= \frac{V(s)}{Z_2(s)} \bigg|_{\substack{Z_1=0 \\ W=0}} = + \frac{G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{beachte :} \\ \text{gleicher Nenner !!!} \end{array}$$

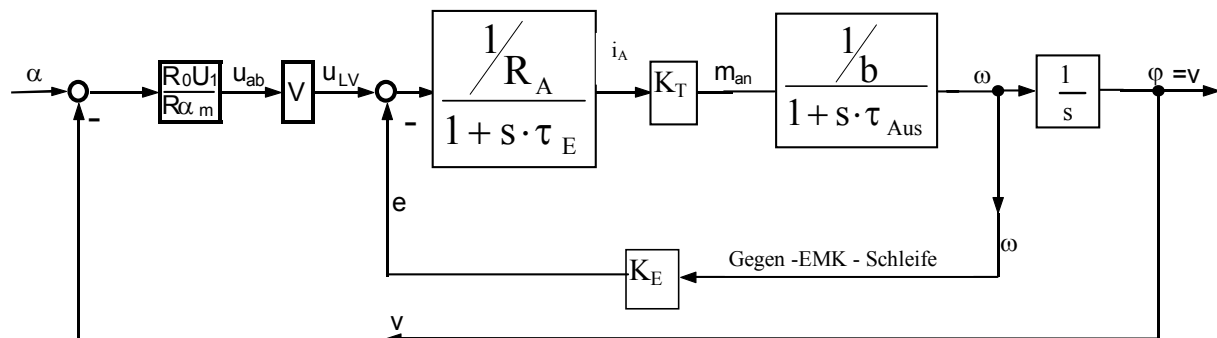
### 3.4.2 Nochmalige Berechnung von $G_w(s)$ unter Verwendung von praktisch gebräuchlichen Kenngrößen.

In die neuerliche Berechnung wird die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung mit einbezogen. Ausgangspunkt ist das folgende Strukturbild:



**Bild 3.2:** Strukturbild zum Einführungsbeispiel. Jetzt mit Berücksichtigung einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung.

Die Störgröße  $m_w$  sei jetzt wieder 0; ebenso die Anfangswerte. Die ersten Umformungen ergeben das folgende Strukturbild im Bildbereich der Laplacetransformation:



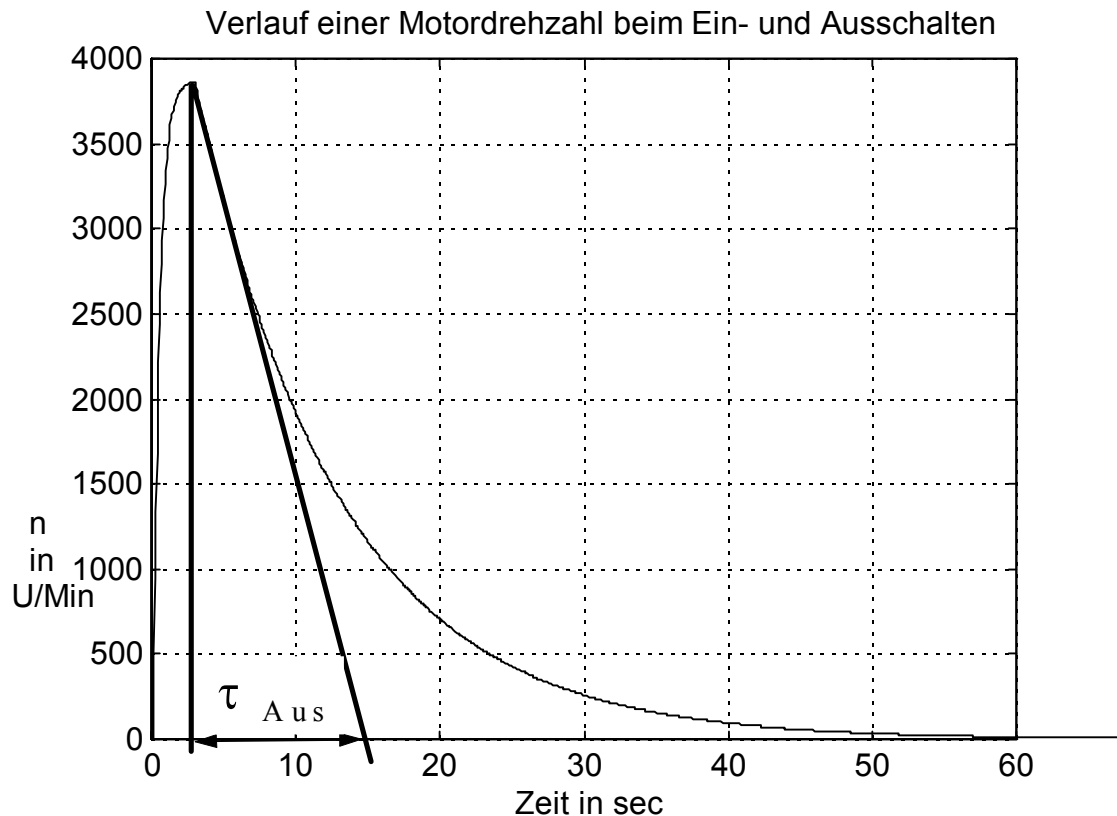
**Bild 3.3:** Wie Bild 3.2 Allerdings im Bildbereich der Laplacetransformation.  $m_w = 0$ .

Man nennt  $\frac{L_A}{R_A} = \tau_E$  — die elektrische Zeitkonstante  
(manchmal auch Ankerzeitkonstante  $\tau_A$ ) in sec.

$\frac{J}{b} = \tau_{Aus}$  — die Auslaufzeitkonstante in sec.

Die beiden Zeitkonstanten sind meßtechnisch sehr leicht erfaßbar:

- Die Auslaufzeitkonstante im Auslaufversuch. Man läßt den Motor auf seine Nenndrehzahl hochfahren und schaltet dann die Ankerspannung ab. Der Motor läuft ohne Ankerstrom (und folglich ohne Antriebsmoment) aus. Die Auslaufzeitkonstante wird dabei gemessen. Man vergleiche mit der nachstehenden Skizze.



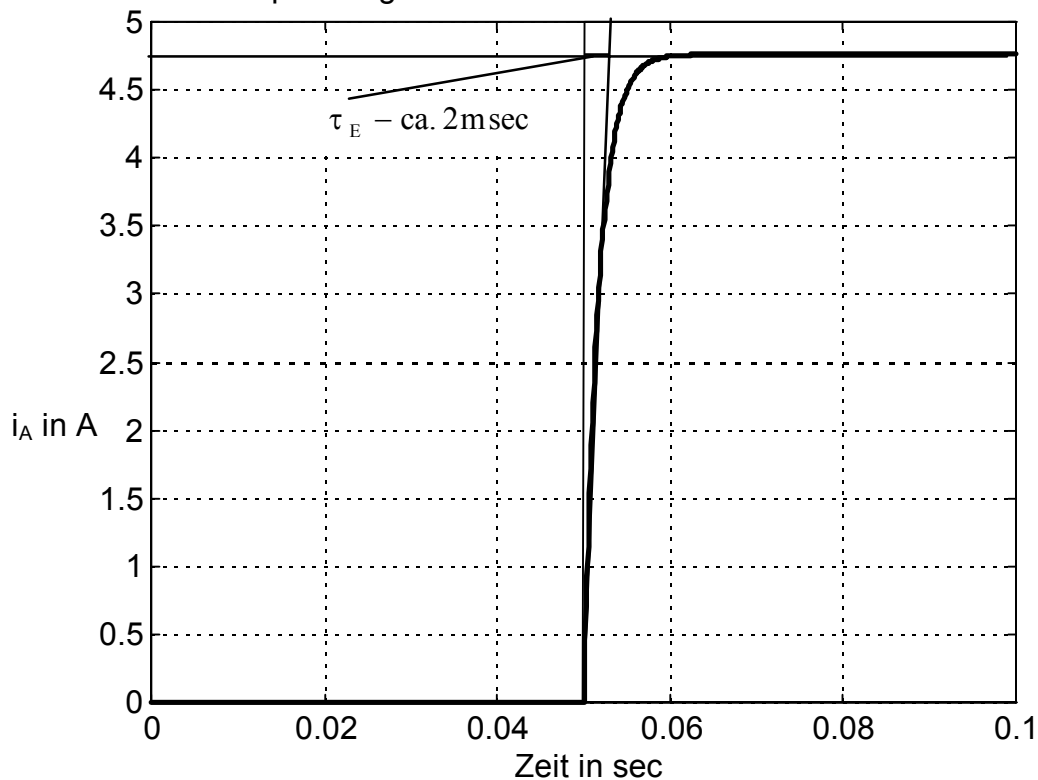
**Bild 3.4:** Verlauf Motordrehzahl. Auslaufzeitkonstante des Motors + Last nach Abschalten der Motorspannung. Damit liegt  $i_A = 0$  bzw.  $m_{an} = 0$  am mechanischen Teilsystem an.

Es sei hier in diesem Zusammenhang noch einmal auf die Motortabellen unter 2.3 verwiesen. Die elektrische Zeitkonstante ist dort jeweils angegeben - die Auslaufzeitkonstante allerdings nicht.

- Die elektrische Zeitkonstante im Kurzschlußversuch. Man bremst die Antriebswelle des Motors fest (blockiert also die Drehzahl) und gibt - bei abgeschalteter Regelung - einen „kleinen“ Spannungssprung auf die Klemmen des Ankerkreises. Am Ankerstromverlauf kann man die elektrische Zeitkonstante sofort herauslesen.

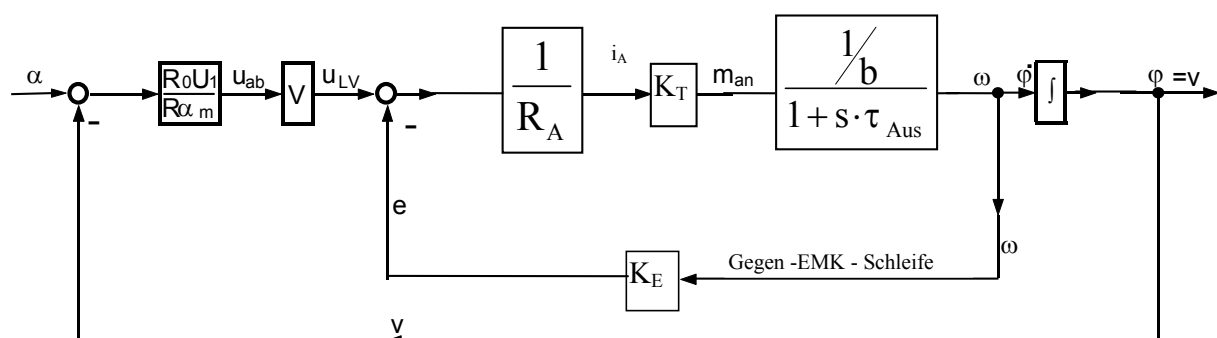
Man vergleiche mit der nachstehenden Skizze.

Ankerspannungs- und Stromverlauf beim Kurzschlußversuch



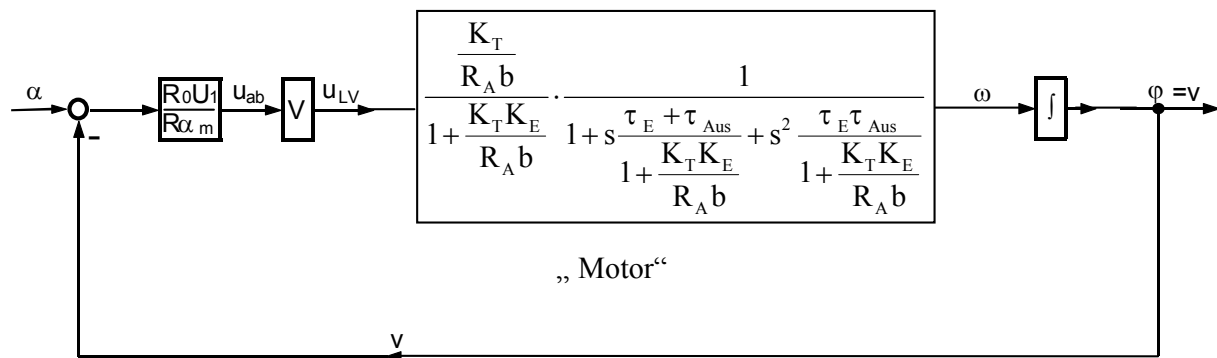
**Bild 3.5:** Verlauf des Motorstroms (dick ausgezeichnet) beim Kurzschlußversuch.

Die elektrische Zeitkonstante ist sehr viel kleiner als die Auslaufzeitkonstante. Nicht selten findet man deshalb eine alternative Darstellung zu 3.3:



**Bild 3.6:** Darstellung ähnlich wie in 3.3. Allerdings ist die (vergleichsweise) schnelle Dynamik des elektrischen Teilsystems gegenüber dem mechanischen Teilsystem vernachlässigt.

Ausgehend von der Darstellung in 3.3 kann man weiter zusammenfassen:



**Bild 3.7:** Wie Bild 3.3. Allerdings zusammengefaßt.

Es wurde schon bemerkt, daß  $\tau_E \ll \tau_{Aus}$  gilt. Man kann deshalb mit guter Näherung für den Motor mit  $u_{LV}$  als Eingang und  $\omega$  als Ausgang schreiben:

$$G_{\omega}(s) = \frac{\frac{K_T}{R_A b}}{1 + \frac{K_T K_E}{R_A b}} \cdot \frac{1}{1 + s \frac{\tau_{Aus}}{1 + \frac{K_T K_E}{R_A b}}}$$

Den Term  $\frac{\tau_{Aus}}{1 + \frac{K_T K_E}{R_A b}} = \frac{J/b}{1 + \frac{K_T K_E}{R_A b}}$  kürzt man ab als

$\tau_M$  - die mechanische Zeitkonstante (in sec).

$\tau_M$  - findet sich auch in den Motortabellen unter 2.3. Da normalerweise  $\frac{K_T K_E}{R_A b} \gg 1$  kann man in der Fachliteratur manchmal auch vereinfachend die Abkürzung

$$\tau_M = \frac{\tau_{Aus}}{\frac{K_T K_E}{R_A b}} = \frac{J R_A}{K_T K_E} \quad \text{finden.}$$

Man vergleiche z.B. mit Justus: "Dynamisches Verhalten el. Maschinen" Vieweg Verlag, oder Kenjo, Nagamori: „Permanent-Magnet and Brushless DC-Motors“, Clarendon Press Oxford, 1985. (In diesem Buch wird  $K = K_E = K_T$  gesetzt.)  
 oder „Die Technik der el. Antriebe (Grundlagen“) - VEM-Handbuch, VEB - Verlag Technik Berlin. ( In diesem Buch wird  $K_E = K_T = K_M \Phi_M$  gesetzt.)  
 oder Kindler, Pohl: „Kleines regelungstechnischesPraktikum“, VEB - Verlag Technik Berlin. ( Dort wird mit der von uns angegebenen Formel die „elektromechanische Zeitkonstante“ bezeichnet. Mit  $T_M$  wird in diesem Buch die Auslaufzeitkonstante bezeichnet.)

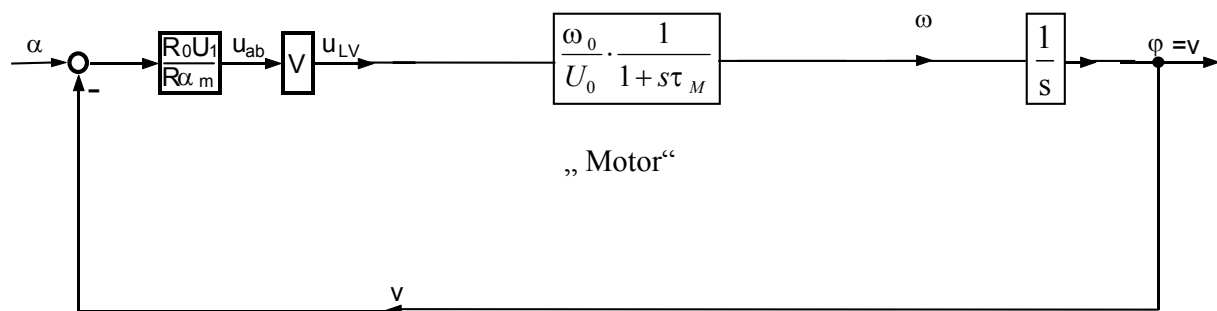
Nur für Interessierte: Der Verweis auf die mechanische Zeitkonstante fiel deshalb so umfangreich aus, weil es auch bekannte Fachbücher gibt, wo die mechanische Zeitkonstante etwas anders eingeführt wird. Dort wird sie durch normierte (also auf Nenngrößen bezogene) Größen gekennzeichnet.

Weiterhin handelt es sich bei  $\frac{\frac{K_T}{R_A b}}{1 + \frac{K_T K_E}{R_A b}} \approx \frac{1}{K_E}$  offenbar um die Winkelgeschwindigkeit im

Leerlauf (vgl. Ausführungen in 2.3) „ $\omega_0$ “ bezogen auf die Nennspannung „ $U_0$ “

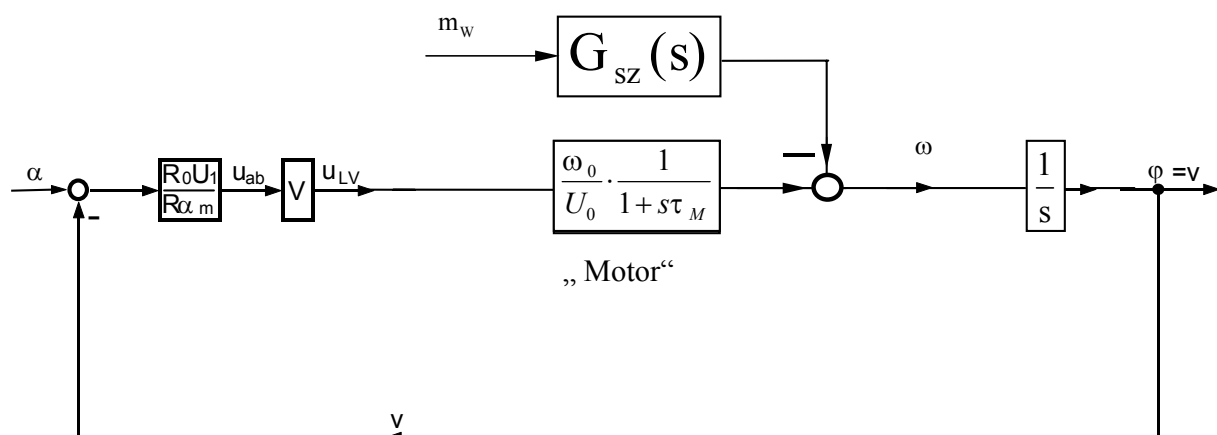
Dimension  $\left(\frac{\text{rad/sec}}{\text{Volt}}\right)$  bzw  $\left(\frac{\text{Umdr/sec}}{\text{Volt}}\right)$ .

Endlich gelangen wir zu der für den Praktiker nützlichen Enddarstellung:



**Bild 3.8:** Enddarstellung nach Vereinfachung bei Vorlage der Struktur von Bild 3.2  
Der Einfluß des Windmoments (Lastmoments) fehlt noch.

Die zusätzliche Berücksichtigung des Windmoments führt zu der folgenden vereinfachten Blockstruktur.



**Bild 3.9:** Enddarstellung nach Vereinfachung bei Vorlage der Struktur von Bild 3.2  
Der Einfluß des Windmoments wird durch  $G_{sz}(s)$  beschrieben.



Berechnen Sie  $G_{sz}(s)$  selber und verwenden Sie ausgehend von Bild 3.2 die bisher gebrauchten Abkürzungen!

### **3.4.3 Schlußbemerkungen**

Aus der VL Systemtheorie ist uns eine weitere Methode bekannt, wie man ausgehend vom Zustandsmodell die zugehörige Übertragungsfunktion  $G(s)$  berechnen kann.

Es gilt

$$G(s) = \underline{c}^T (\underline{sE} - \underline{A})^{-1} \underline{b} + d \quad \text{bzw. abgekürzt} \quad G(s) = \underline{c}^T \underline{\Phi}(s) \underline{b} + d \quad (3.0)$$

Für die Handrechnung ist die Formel (3.0) umständlich, wenn die  $\underline{A}$ -Matrix von höherer Ordnung als 3 ist.

Es geht auch ohne Handrechnung!

Zunächst sei auf MATLAB verwiesen. Unter Verwendung der Control System Toolbox kann man auf den Befehl „ss2tf“ verwenden. Dieser Befehl führt (3.0) aus.

Beispiel:  $[Zaehler, Nenner] = ss2tf(A,b,c,d,iu)$

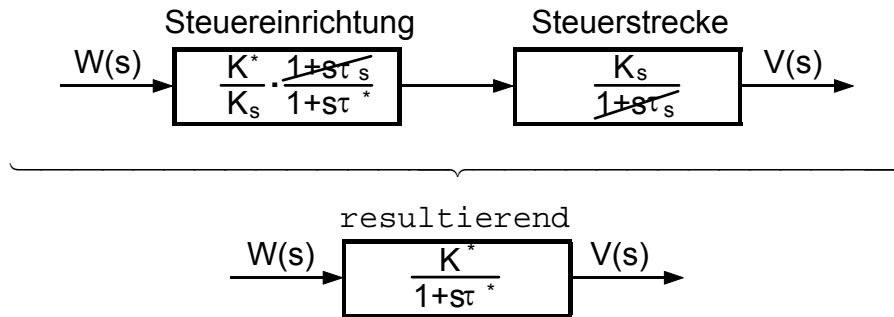
liefert das Zaehler- und Nennerpolynom der Übertragungsfunktion zum Zustandsmodell. „iu“ bezeichnet den „iu-ten“ Eingang, falls es sich bei „b“ nicht (wie bei uns üblich und dann ist  $iu=1$ ) um einen Vektor sondern um eine Matrix handelt.

Natürlich funktioniert die Berechnung von  $G(s)$  auf der Grundlage von Formel (3.0) auch dann wenn man symbolische Programmiersprachen wie MATCAD oder MATHEMATICA verwendet.

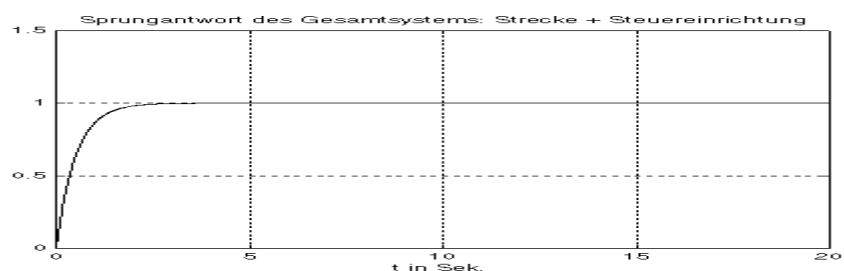
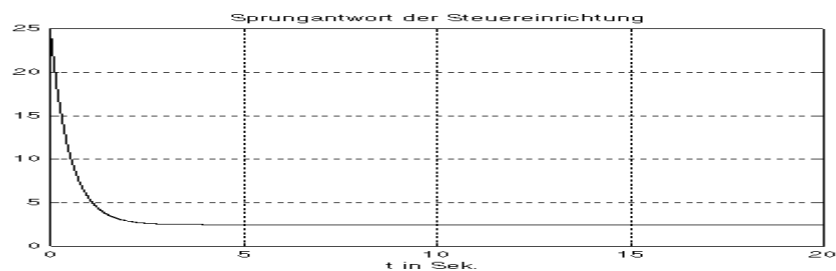
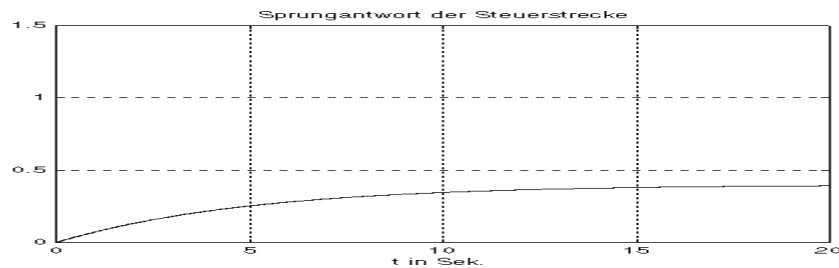
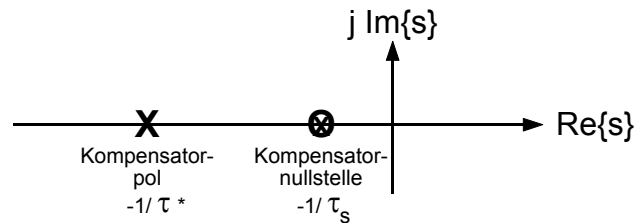
### 3.5 Anmerkungen zum Steuerungsproblem

(Kürzen von langsamen Polstellen der Steuerstrecke)

„Nun fängt mir an, fast selbst der Kopf zu schwanken“ Goethe, Faust I



Interpretation der Kürzung im P/N-Plan:

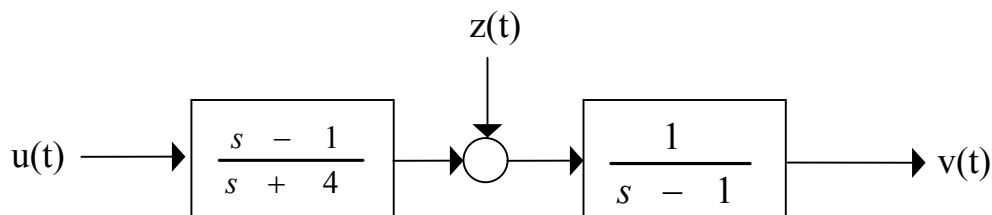




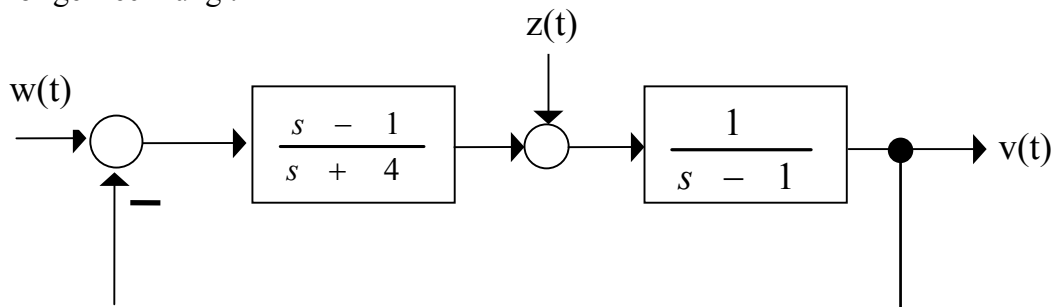
Das Kürzen von „instabilen“ Polen ( Pole mit  $\text{Re}\{s_{i\infty}>0\}$  ) ist sowohl beim Steuerungsproblem als auch beim Regelungsproblem verboten !

Nachweis:

Bei Steuerung wird zwar im Vorwärtszweig ( $u \rightarrow v$ ) der instabile Pol herausgekürzt, die (stets vorhandenen) Störungen am Streckeneingang „z“ werden durch den instabilen Streckenpol auf dem Übertragungsweg ( $z \rightarrow v$ ) angefacht.



Bei Regelung gilt dasselbe. Dies zeigt auch die Betrachtung an der Blockdarstellung und die zugehörige Rechnung :



Hier gilt: 
$$G_w(s) = \frac{(s-1) \cdot 1}{(s+4) \cdot (s-1)} = \frac{1}{s+5} \quad - \quad \text{stabiles Führungsverhalten}$$

$$G_z(s) = \frac{1}{1 + \frac{(s-1)}{(s+4)(s-1)}} = \frac{(s+4)}{(s+4) \cdot (s-1) + (s-1)} = \frac{(s+4)}{(s-1) \cdot (s+5)} \quad - \quad \text{instabiles Störverhalten}$$

Hier taucht der „instabile Pol“ wieder auf !

### 3.6. Zur schaltungstechnischen Realisierung von Übertragungsfunktionen (bzw. von Frequenzgängen = Systemfunktionen)

*Vorbemerkung:*

$G(s)$  gegeben  $\Rightarrow$  welches mathematische Modell gehört dazu? Man kann zeigen, daß es zu einem gegebenen  $G(s)$  unendlich viele Zustandsmodelle gibt. Eines - es ist besonders einfach strukturiert - soll nunmehr abgeleitet werden:

$$\frac{V(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) \cdot V(s) = (b_m s^m + \dots + b_0) \cdot U(s)$$



$$v^{(n)}(t) + a_{n-1} v^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 v(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

für schaltungstechnische Realisierungen *unbrauchbar*,  
da ggf. Eingangsgröße mehrfach differenziert.

$$\frac{V(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}; \quad V(s) = (b_m s^m + \dots + b_0) \cdot \underbrace{\left( \frac{U(s)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \right)}_{=: Z(s)}$$

$$\Rightarrow s^n Z(s) + a_{n-1} s^{n-1} Z(s) + \dots + a_0 Z(s) = U(s)$$

$$V(s) = b_m s^m Z(s) + \dots + b_0 Z(s)$$



$$z^{(n)}(t) + a_{n-1} z^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{z}(t) + a_0 z(t) = u(t)$$

$$v(t) = b_m z^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{z}(t) + b_0 z(t)$$

Diese Differentialgleichung n-ter Ordnung kann in ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung überführt werden. (Einführung von Zwischengrößen)

$$z_1(t) := z(t)$$

$$\dot{z}_1(t) =: z_2(t)$$

$$\dot{z}_2(t) =: z_3(t)$$

$$\dot{z}_3(t) =: z_4(t)$$

$\vdots$

$$\dot{z}_{n-1}(t) =: z_n(t)$$

$$\dot{z}_n(t) = -a_0 z_1(t) - a_1 z_2(t) - \dots - a_{n-1} z_n(t) + u(t)$$

$$v(t) = b_0 z_1(t) + b_1 z_2(t) + \dots + b_m z_{m+1}(t)$$

*Darstellung in Matrizenschreibweise:*

**Steuerbarkeitsnormalform ( I. Standardform )**

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \dot{z}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t)$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_{m+1}(t) \\ z_{m+2}(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} + d \cdot u(t)$$

$d \neq 0$ , falls  
 Zählergrad = Nennergrad  
 und  $d$  vorher abdividiert  
 wurde

Ein weiteres Modell, das  $G(s)$  realisiert, lautet (ohne Herleitung):

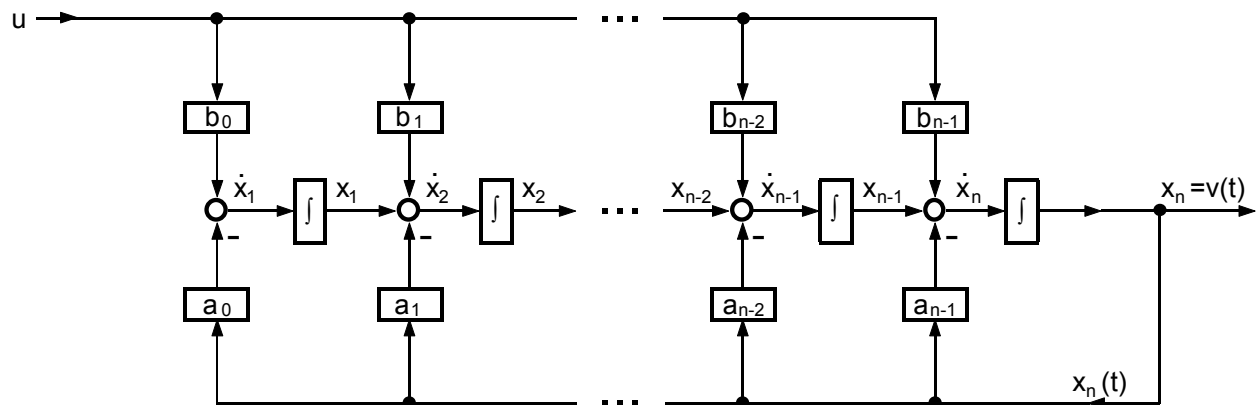
### Beobachtbarkeitsnormalform ( II. Standardform)

Diese entsteht formal durch Transposition der Steuerbarkeitsnormalform

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u(t)$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + d \cdot u(t)$$

$d \neq 0$ , falls  
Zählergrad = Nennergrad  
und  $d$  vorher abdividiert wurde



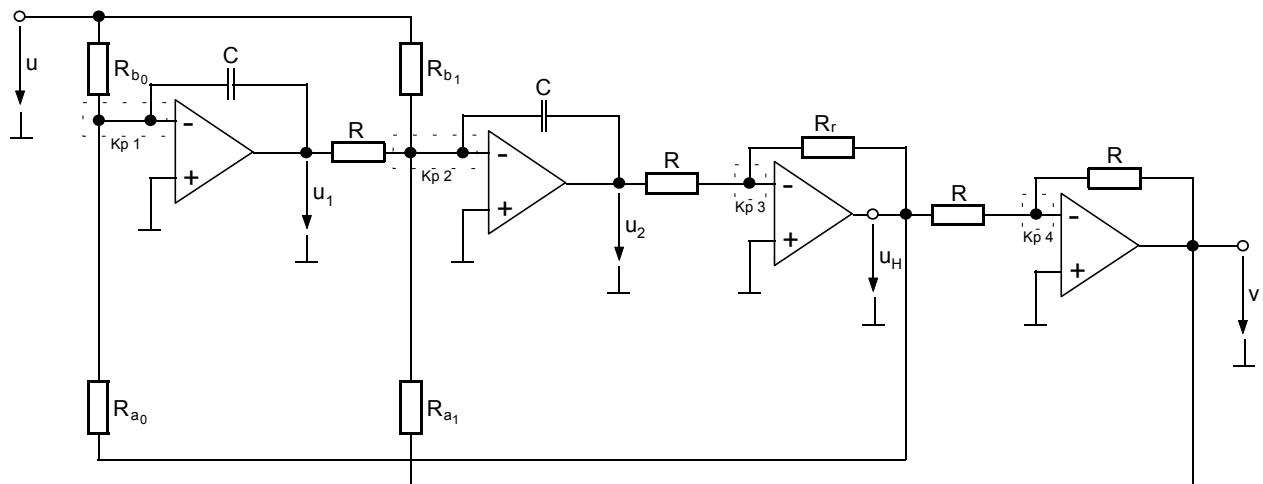
**Bild 3.10:** Strukturbild zur Beobachtbarkeitsnormalform:

Dieses Strukturbild kann sehr leicht schaltungstechnisch umgesetzt werden:

- Integrierer werden mittels Operationsverstärker realisiert.  
Die zwangsläufige Invertierung wird ebenfalls durch Operationsverstärker kompensiert.
- $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$  werden durch Widerstandsverhältnisse realisiert.

vgl. hierzu:

U. Tietze, Ch. Schenk; Halbleiterschaltungstechnik; 10. Auflage; Abb 14.42, Seite 444  
Dort: „Universalfilter zweiter Ordnung mit unabhängig einstellbaren Koeffizienten“

**Beispiel 1:**

**Bild 3.11:** Realisierung eines Strukturbildes in Beobachtbarkeitsnormalform durch OP's, Widerstände und Kondensatoren.

Berechnung hierzu:

Knotenpunkt 1:

$$i_{R_{b_0}} + i_{R_{a_0}} + i_{C_0} = 0$$

$$\frac{u}{R_{b_0}} + \frac{u_H}{R_{a_0}} + C \cdot \frac{du_1}{dt} = 0$$

$$u_1(t) = -\frac{1}{C} \cdot \int_0^t \left( \frac{u(\tau)}{R_{b_0}} + \frac{u_H(\tau)}{R_{a_0}} \right) \cdot d\tau$$

$$U_1(s) = -\frac{1}{sC} \cdot \left( \frac{U(s)}{R_{b_0}} + \frac{U_H(s)}{R_{a_0}} \right)$$

Knotenpunkt 2:

$$i_R + i_{R_{b_1}} + i_{R_{a_1}} + i_{C_1} = 0$$

$$\frac{u_1}{R} + \frac{u}{R_{b_1}} + \frac{v}{R_{a_1}} + C \cdot \frac{du_2}{dt} = 0$$

$$u_2(t) = -\frac{1}{C} \cdot \int_0^t \left( \frac{u_1(\tau)}{R} + \frac{u(\tau)}{R_{b_1}} + \frac{v(\tau)}{R_{a_1}} \right) \cdot d\tau$$

$$U_2(s) = -\frac{1}{sC} \cdot \left( \frac{U_1(s)}{R} + \frac{U(s)}{R_{b_1}} + \frac{V(s)}{R_{a_1}} \right)$$

Knotenpunkt 3:

$$U_H(s) = -\frac{R_r}{R} \cdot U_2(s)$$

Knotenpunkt 4:

$$V(s) = -U_H(s) = \frac{R_r}{R} \cdot U_2(s)$$

$$\Rightarrow V(s) = -\frac{R_r}{R} \cdot \frac{1}{sC} \cdot \left( \frac{U_1(s)}{R} + \frac{U(s)}{R_{b_1}} + \frac{V(s)}{R_{a_1}} \right)$$

$$\left(1 + \frac{R_r}{R_{a_1}} \cdot \frac{1}{sRC}\right) \cdot V(s) = -\frac{R_r}{R_{b_1}} \cdot \frac{1}{sRC} \cdot U(s) - \frac{R_r}{R} \cdot \frac{1}{sRC} \cdot U_1(s) = -\frac{R_r}{R_{b_1}} \cdot \frac{1}{sRC} \cdot U(s) + \frac{R_r}{R} \cdot \frac{1}{sRC} \cdot \frac{1}{sC} \cdot \left(\frac{U(s)}{R_{b_0}} - \frac{V(s)}{R_{a_0}}\right)$$

$$\left(1 + \frac{R_r}{R_{a_1}} \cdot \frac{1}{sRC} + \frac{R_r}{R_{a_0}} \cdot \left(\frac{1}{sRC}\right)^2\right) \cdot V(s) = \left(-\frac{R_r}{R_{b_1}} \cdot \frac{1}{sRC} + \frac{R_r}{R_{b_0}} \cdot \left(\frac{1}{sRC}\right)^2\right) \cdot U(s)$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{-\frac{R_r}{R_{b_1}} \cdot \left(\frac{1}{sRC}\right) + \frac{R_r}{R_{b_0}} \cdot \left(\frac{1}{sRC}\right)^2}{1 + \frac{R_r}{R_{a_1}} \cdot \left(\frac{1}{sRC}\right) + \frac{R_r}{R_{a_0}} \cdot \left(\frac{1}{sRC}\right)^2} \cdot \frac{s^2}{s^2} = \frac{-\frac{R_r}{R_{b_1}} \cdot \left(\frac{1}{RC}\right) \cdot s + \frac{R_r}{R_{b_0}} \cdot \left(\frac{1}{RC}\right)^2}{s^2 + \frac{R_r}{R_{a_1}} \cdot \left(\frac{1}{RC}\right) \cdot s + \frac{R_r}{R_{a_0}} \cdot \left(\frac{1}{RC}\right)^2}$$

Typ:  $G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$

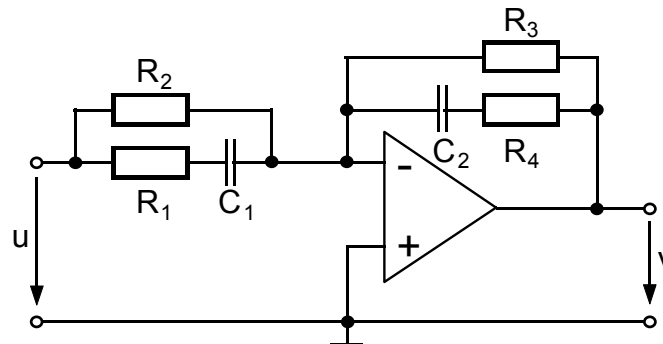
$R_r, R, C$  fest

$$R_{b_1} \rightarrow b_1 \quad R_{b_0} \rightarrow b_0 \quad R_{a_1} \rightarrow a_1 \quad R_{a_0} \rightarrow a_0$$



**Beispiel 2:** Alternative zu Beispiel 1

Auch die nachfolgende Schaltung realisiert eine Übertragungsfunktion mit Zählergrad = 2 und Nennergrad = 2.



$$\underline{Z}_v = R_2 \parallel R_1, C_1 \quad \underline{Z}_r = R_3 \parallel R_4, C_2$$

Für invertierend geschaltete (ideale) Operationsverstärker gilt immer:

$$\text{Frequenzgang: } G(j\omega) = -\frac{\underline{Z}_r}{\underline{Z}_v}$$

$$\underline{Z}_v = \frac{R_2 \left( R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right)}{R_2 + \left( R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right)} = \frac{R_2 (1 + j\omega C_1 R_1)}{1 + j\omega C_1 (R_1 + R_2)}$$

$$\underline{Z}_r = \frac{R_3 (1 + j\omega C_2 R_4)}{1 + j\omega C_2 (R_3 + R_4)}$$

$$G(j\omega) = -\frac{R_3 (1 + j\omega C_2 R_4) (1 + j\omega C_1 (R_1 + R_2))}{(1 + j\omega C_2 (R_3 + R_4)) R_2 (1 + j\omega C_1 R_1)}$$

$$G(s) = -\frac{R_3 (1 + s R_4 C_2) (1 + s C_1 (R_1 + R_2))}{(1 + s C_2 (R_3 + R_4)) R_2 (1 + s R_1 C_1)}$$

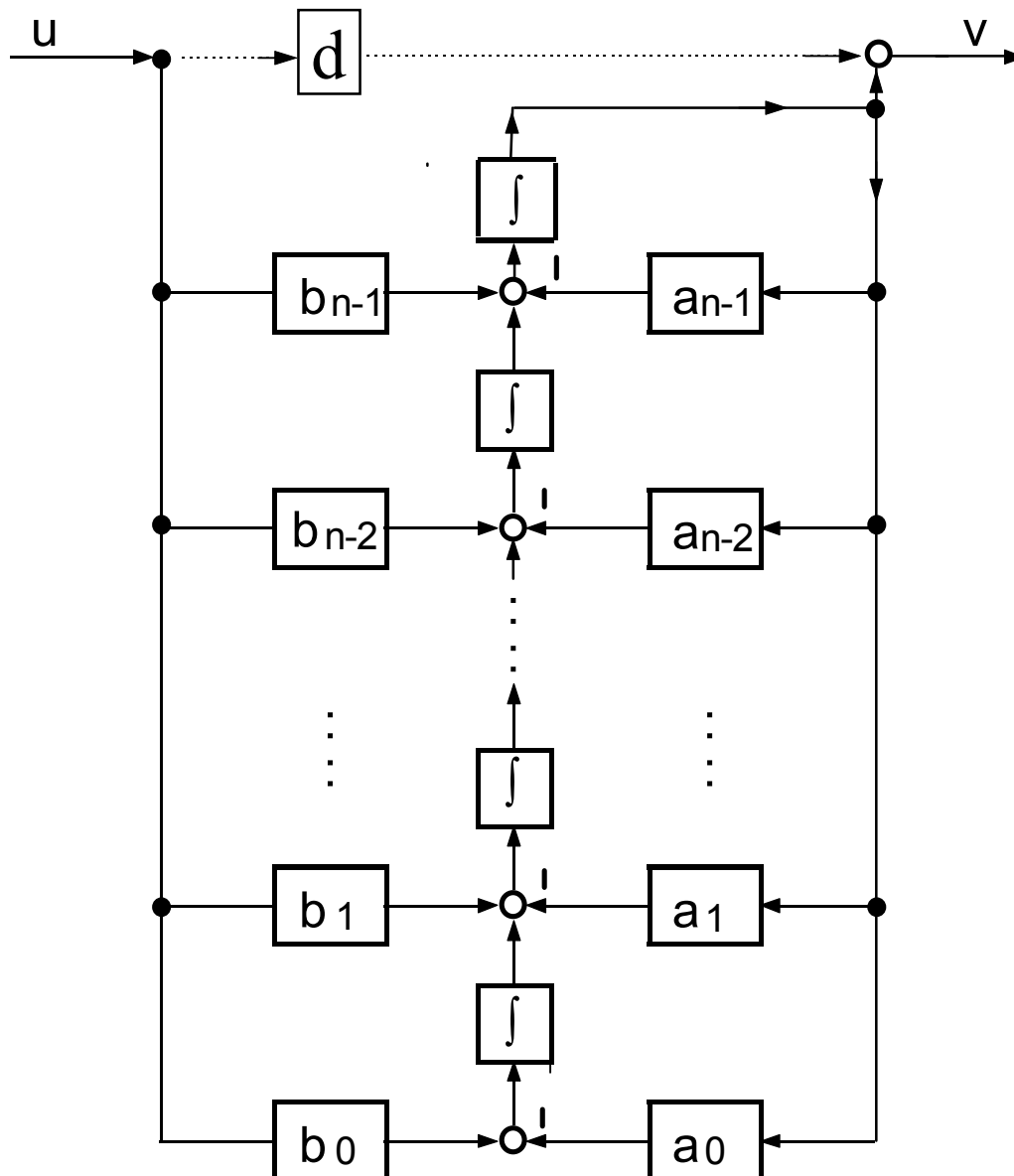
$$G(s) = -\frac{R_3 \left[ s^2 (C_1 C_2 R_4 (R_1 + R_2)) + s (R_4 C_2 + (R_1 + R_2) C_1) + 1 \right]}{R_2 \left[ s^2 (C_1 C_2 R_1 (R_3 + R_4)) + s (R_1 C_1 + (R_3 + R_4) C_2) + 1 \right]}$$

*Vergleich mit Schaltung aus Beispiel 1:*

- ändert man in der Alternative einen Widerstand, dann ändert sich, im Gegensatz zum Beispiel 1, die komplette Übertragungsfunktion  $G(s)$  und damit das P/N-Diagramm
- bei der "aufwendigeren" Schaltung aus Beispiel 1 erhält man bei Änderung eines Widerstandes ggf. nur die gezielte Änderung *eines* Koeffizienten der Übertragungsfunktion

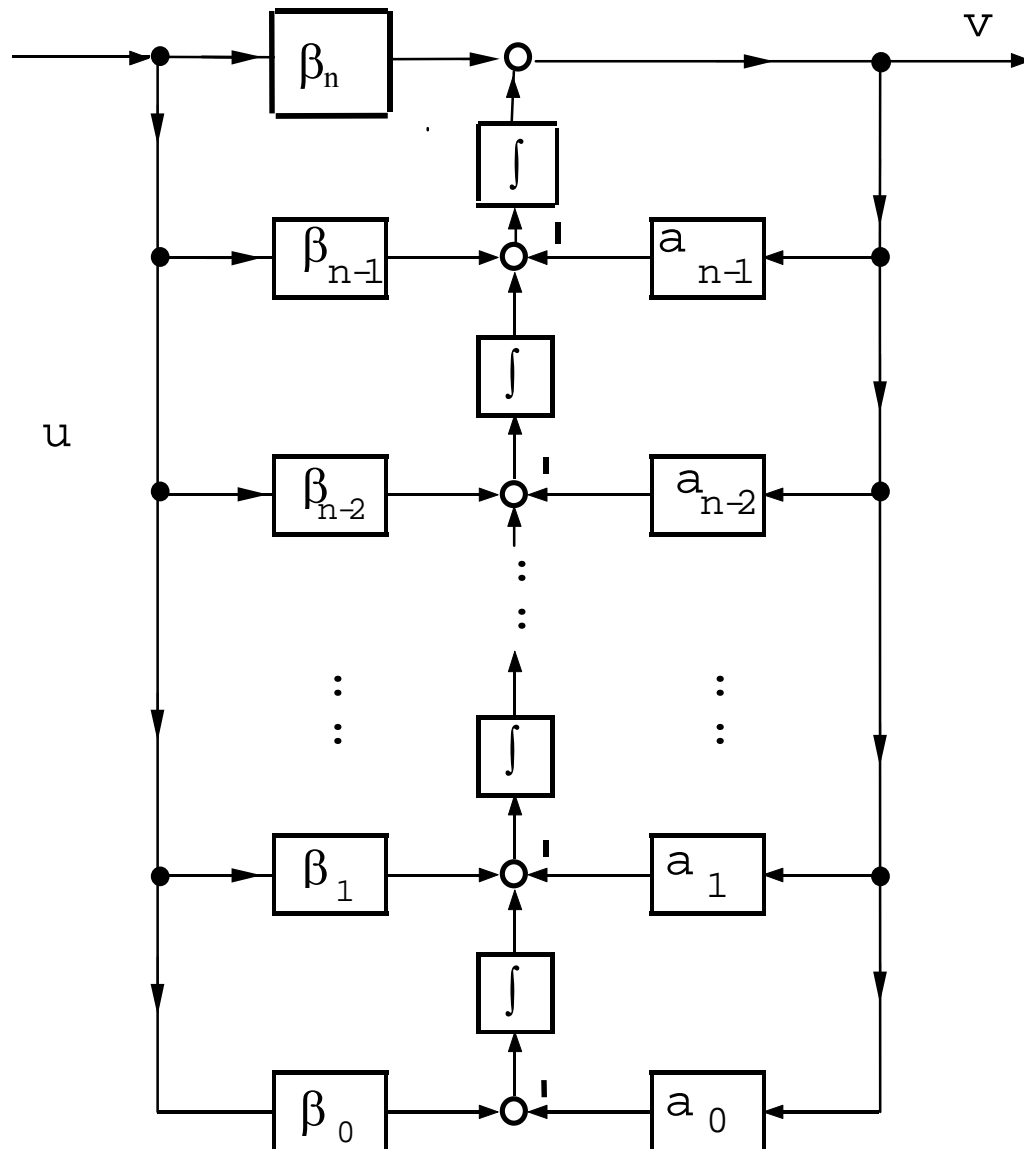
**Schlußbemerkungen:**

Das Strukturbild zur Beobachtbarkeitsnormalform werde etwas anders dargestellt:



**Bild 3.12:** Strukturbild zur Beobachtbarkeitsnormalform

Diese umgezeichnete Darstellung der Beobachtbarkeitsnormalform z.B. erinnert an eine Darstellung die auch aus Filterhandbüchern unter dem Namen „**1. kanonische Direktform**“ bekannt ist. Man betrachte hierzu Bild 3.13.



**Bild 3.13:** „1. kanonische Direktform“ einer Filter-Systemfunktion

Für den Fall, daß  $\mathbf{bn} = \mathbf{0}$  gilt sind die beiden Blockstrukturen natürlich äquivalent.

Im Fall, daß  $\mathbf{bn} \neq \mathbf{0}$  ist, kann man ein Zustandsmodell in I. oder II. Standardform nur gewinnen wenn man vorher den Zähler durch den Nenner dividiert. Dann kommt man immer auf Blockstrukturen wie in Bild 3.12 ( mit  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$  ). Dividiert man aber vorher nicht ab, so überzeugt man sich (durch Nachrechnen), daß die **1. kanonische Direktform** ebenfalls die vorgelegte Übertragungsfunktion realisiert.

In gleicher Weise kann man die Steuerbarkeitsnormalform ( I. Standardform) als Strukturbild darstellen. Geschickt umgezeichnet erkennt man dann (wenn gilt:  $\mathbf{bn} = \mathbf{0}$ ) sofort auch die in Filterhandbüchern sogenannte „**2. kanonische Direktform**“.

### 3.7 Weitere Beispiele

„Wenn du nicht irrst, kommst du nicht zu Verstand!“, Goethe, Faust II

**1.Beispiel:** Es ist eine Filterschaltung gesucht, bei der zunächst zwei analoge Zeitsignale  $u_1$  und  $u_2$  voneinander subtrahiert werden. Die Spannungsdifferenz ist in bestimmter Art zu filtern: Und zwar soll eine bestimmte Frequenz (z.B. 50 Hz) aus dem Signal vollständig herausgefiltert werden („Notchfilterung“). Weiterhin ist der im Differenzsignal enthaltene Gleichanteil herauszusieben. Anschließend ist das Signal noch ab einer bestimmten Grenzfrequenz (z.B. ab 200 Hz) zu unterdrücken („Tiefpaßfilterung“). Eine entsprechende Schaltung ist anzugeben.

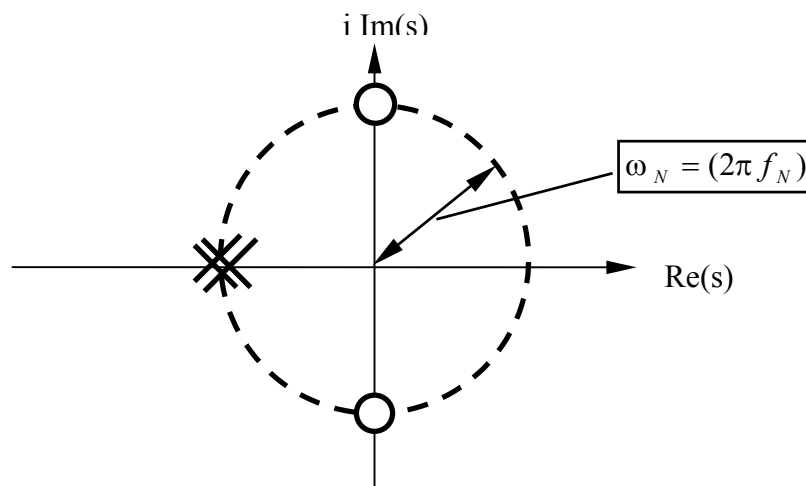
**Lösung:** Entscheidend ist die Filterung einer bestimmten Frequenz ( hier  $f_N = 50 \text{ Hz}$  ) durch ein sogenanntes Notch-Filter (Lochfilter). Dieses soll durch die Übertragungsfunktion

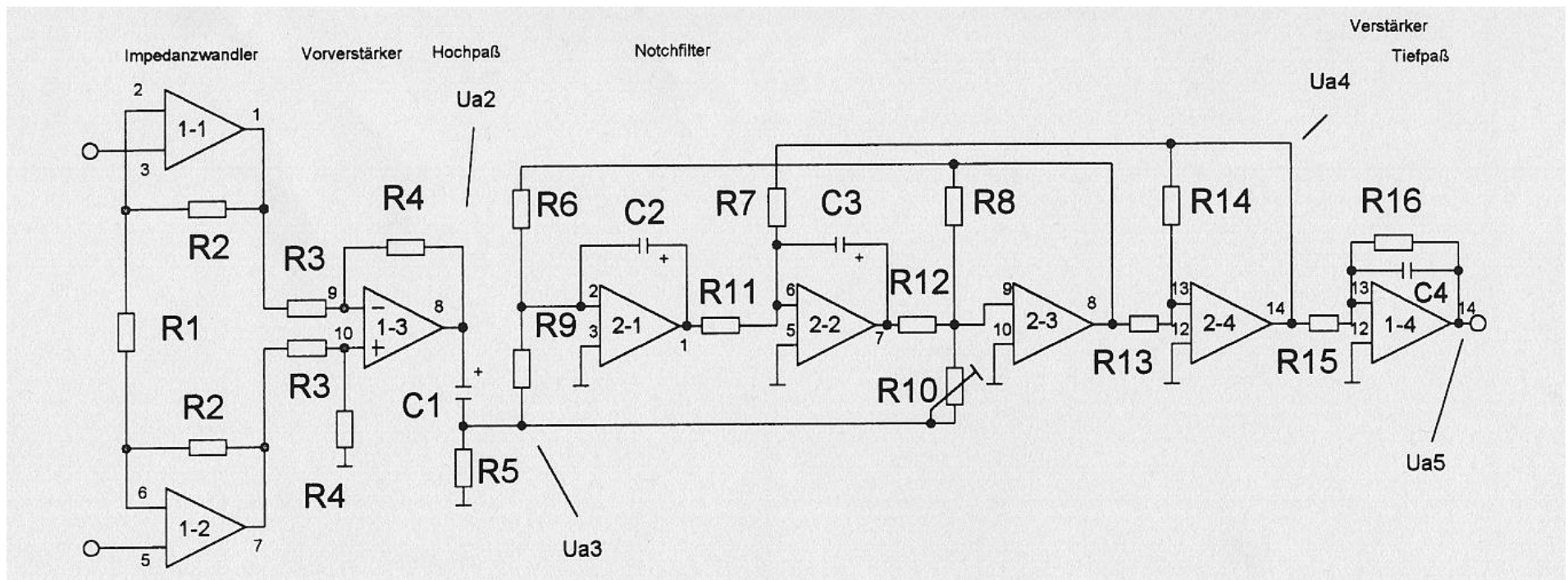
$$G_N(s) = \frac{s^2 + (2\pi f_N)^2}{(s + 2\pi f_N)^2} = \frac{s^2 + (2\pi f_N)^2}{s^2 + 2 \cdot (2\pi f_N) \cdot s + (2\pi f_N)^2}$$

mit konjugiert imaginären Nullstellen und einem reellen Doppelpol schaltungstechnisch realisiert werden.

Bild 3.14 zeigt die Schaltung ausführlich. Man erkennt zwei Impedanzwandler zur Aufnahme der Meßgrößen selbst. Ihr Eingangswiderstand ist so hochohmig (theoretisch gegen unendlich), sodaß das Meßobjekt selber nicht belastet wird. Nach Differenzbildung und Hochpaßfilterung kommt das Notchfilter. Man vergleiche diesen Teil der Gesamtschaltung mit Bild 3.11 und der dazugehörigen Berechnung. Die Übertragungsfunktion des abschließenden Tiefpasses berechne man wie in Beispiel 2 von 3.6

Nachstehende Skizze zeigt den PN-Plan des Notchfilters. Warum gerade diese und keine andere PN-Konfiguration günstig ist, wird letztlich erst bei der Betrachtung zum BODE-Diagramm klar. Hier sei auf das 5. Kapitel verwiesen.





**Bild 3.14:** Vollständiger Schaltungsvorschlag zu Aufgabe 1.

Notchfilter:  $U_{a3} \rightarrow U_{a4}$

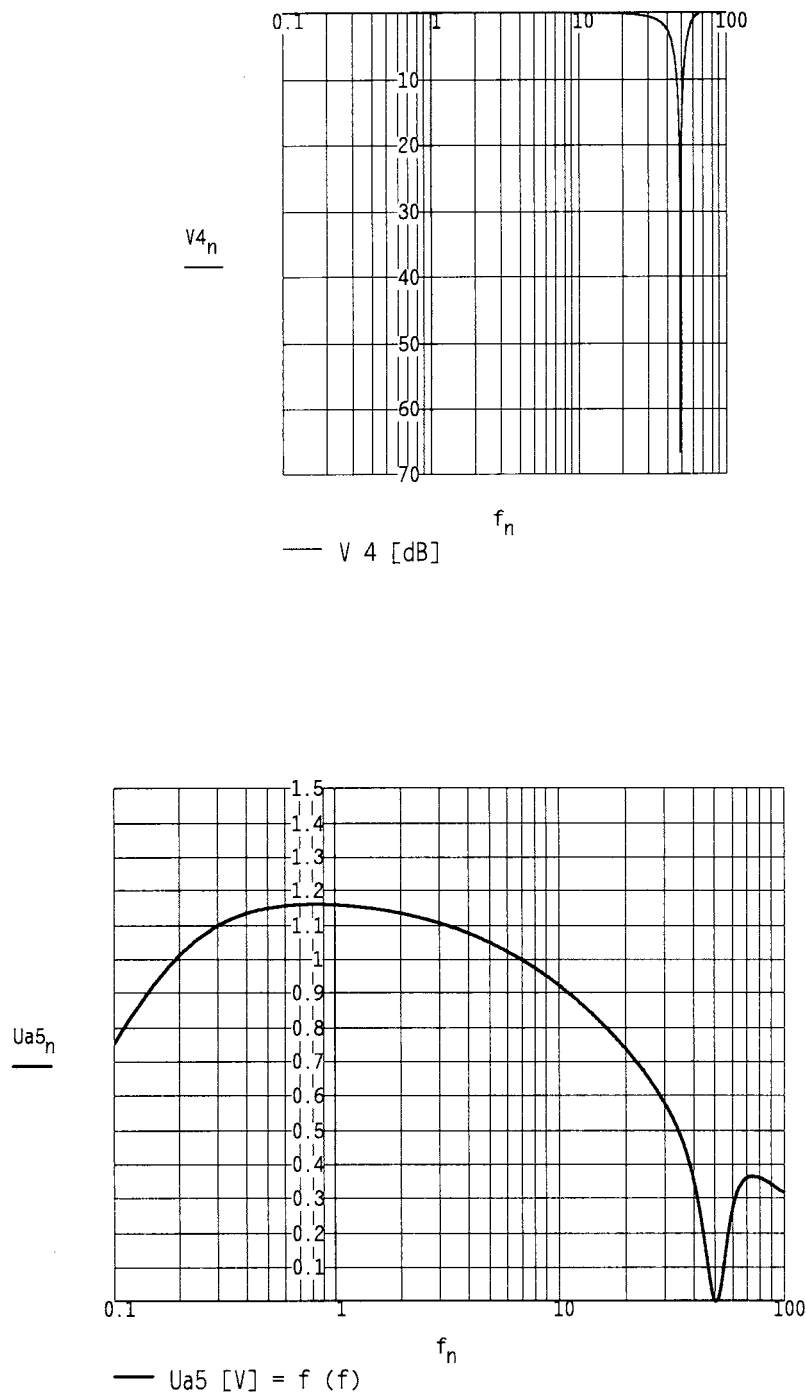
Verwendete Bauteile:

$R1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R4 = 10 \text{ k}\Omega$   
 $R5 = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R6 = 68 \text{ k}\Omega$ ,  $R7 = 6,8 \text{ k}\Omega$ ,  $R8 = 100 \text{ k}\Omega$   
 $R9 = 6,8 \text{ k}\Omega$ ,  $R10 = 64 \text{ k}\Omega$ ,  $R11 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R12 = 10 \text{ k}\Omega$   
 $R13 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R14 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R15 = 4,7 \text{ k}\Omega$ ,  $R16 = 470 \text{ k}\Omega$

$C1 = 220 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $C2 = 1 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $C3 = 1 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $C4 = 0,01 \text{ }\mu\text{F}$

IC = TL 084

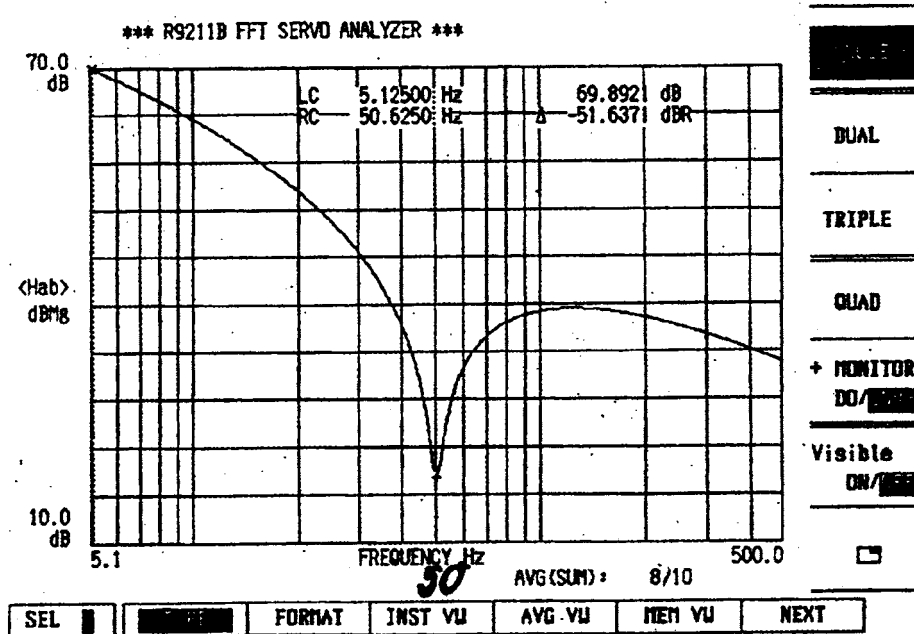
Betrachten wir zunächst die Ergebnisse der Rechnungen:



**Bild 3.15:** Verlauf des gerechneten Amplitudengangs vom Notchfilter alleine (im dB-Maßstab s. oben) und der absoluten Ausgangsspannung der gesamten Schaltung. Die Rechnung erfolgte mit einem Schaltungssyntheseprogramm.

Die Schaltung wurde aufgebaut und es wurde der tatsächliche Amplitudengang mit den Ergebnissen der Rechnung ( 2. Bild von Bild 3.16) verglichen.

Der Vergleich von Rechnung und Messung ( mittels FFT-Analysator ) ergab:



**Bild 3.16:** Verlauf der tatsächlichen (gemessenen) Amplitudengangs aufgrund der nach Bild 3.14 aufgebauten Schaltung.  
( Hardcopy der Darstellung auf dem FFT-Analysator;  
Frequenzbereich  $f = 5 \text{ Hz} - f = 500 \text{ Hz}$  ).

**2. Beispiel:** Es ist eine OP-Schaltung gesucht, die ( möglichst ) sämtliche Frequenzen mindestens um den Faktor 100 unterdrückt, aber Signale von der Frequenz 1234 Hz durchläßt. Die Schaltung ist zu entwerfen, zu parametrieren und der vollständige Schaltplan ist anzugeben.

**Lösung:** Klar! Die weiteren Ausführungen hierzu bleiben Ihnen überlassen.  
( Sprechstunden beachten ).

„Arbeit die zur Freude wird, hört auf Pflicht zu sein.“ I. Kant

### 3.8 Das Wurzelortungsverfahren

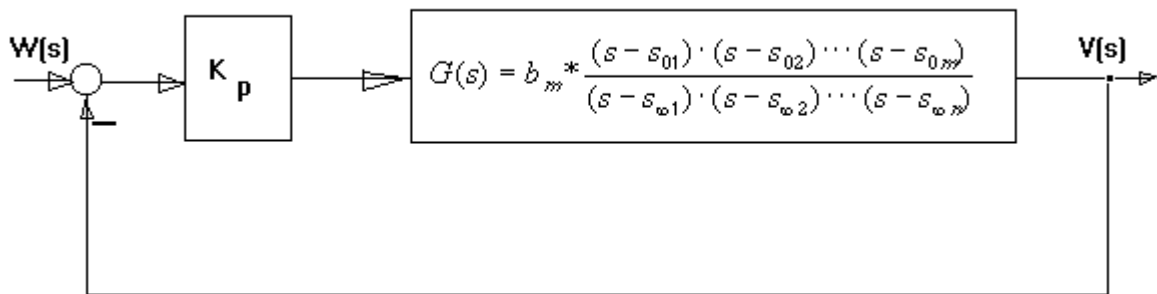
„Was diese Wissenschaft betrifft,  
Es ist so schwer den falschen Weg zu meiden,  
Es liegt in ihr soviel verborgenes Gift  
Und von der Medizin ist's kaum zu unterscheiden.“  
Goethe, Faust I

#### 3.8.1 Die K-Normalform

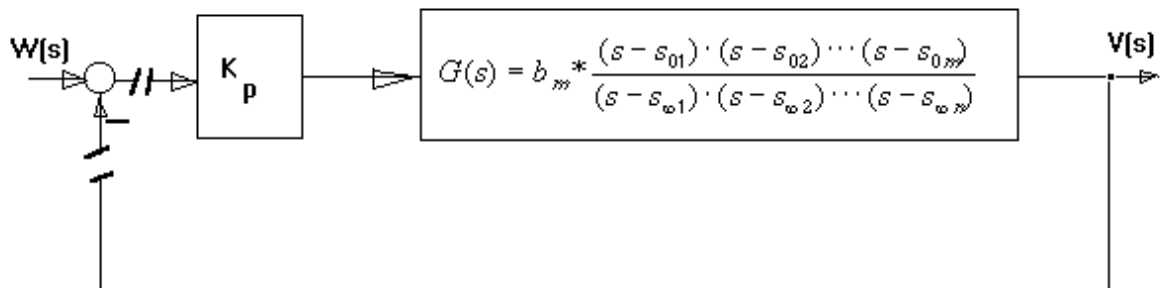
Ausgehend von der Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$  erhält man

$$G(s) = b_m \cdot \frac{(s - s_{01}) \cdot (s - s_{02}) \cdots (s - s_{0m})}{(s - s_{\infty 1}) \cdot (s - s_{\infty 2}) \cdots (s - s_{\infty n})}$$

Diese Übertragungsfunktion sei als Streckenübertragungsfunktion Teil eines Regelkreises:



Schneidet man den Regelkreis an den nachstehend bezeichneten Stellen auf,



kürzt ab  
Schleife

$G_o(s) = K_p \cdot G(s)$  - Übertragungsfunktion der offenen

und weiter :

$$K = K_p \cdot b_m$$

so lautet

$$G_o(s) = K \cdot \frac{(s - s_{01}) \cdot (s - s_{02}) \cdots (s - s_{0m})}{(s - s_{\infty 1}) \cdot (s - s_{\infty 2}) \cdots (s - s_{\infty n})}$$



Dies werde als die **K-Normalform** der offenen Regelschleife bezeichnet.

Natürlich läßt sich die K-normalform der offenen Schleife auch dann angeben, wenn der Regler komplizierter als ein reiner P-Regler ausfällt:

Bei Vorlage von  $G_R(s) = \frac{\beta_k s^k + \dots + \beta_0}{\alpha_1 s^1 + \dots + \alpha_0}$  und von

$$G_S(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

lautet die zugehörige K-Normalform von

$$G_o(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) = \frac{\beta_k \cdot b_m}{\alpha_1 \cdot a_n} \cdot \frac{(s - s_{01}) \cdot (s - s_{02}) \cdots (s - s_{0m+k})}{(s - s_{\infty 1}) \cdot (s - s_{\infty 2}) \cdots (s - s_{\infty n+1})}$$

wobei  $\frac{\beta_k \cdot b_m}{\alpha_1 \cdot a_n} =: K$

### **3.8.2 Die Ausgangsgleichungen für das Wurzelortsverfahren**

Ausgehend von  $G_w(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{K \cdot (s - s_{01}) \cdots (s - s_{0m})}{(s - s_{\infty 1}) \cdots (s - s_{\infty n}) + K \cdot (s - s_{01}) \cdots (s - s_{0m})}$

soll **die Frage nach den Pol- und Nullstellen des Regelkreises in Abhängigkeit von den Pol- und Nullstellen der offenen Schleife und dem Wert von K** geklärt werden.

Die Frage nach den Nullstellen von  $G_w(s)$  klärt sich sofort:

**die Nullstellen von  $G_w(s)$  sind die Nullstellen von  $G_o(s)$ .**

Die Frage nach den Polstellen von  $G_w(s)$  ist schwieriger zu beantworten: Die Polstellen von  $G_w(s)$  hängen offenbar von den Nullstellen von  $G_o(s)$ , den Polstellen von  $G_o(s)$  und zusätzlich vom Wert von K ab. Betrachten wir also den Nenner von  $G_w(s)$  genauer. Es sei  $s^*$  eine Polstelle von  $G_w(s)$ . Dann gilt

$$(s^* - s_{\infty 1}) \cdot (s^* - s_{\infty 2}) \cdots (s^* - s_{\infty n}) + K \cdot (s^* - s_{01}) \cdot (s^* - s_{02}) \cdots (s^* - s_{0m}) = 0$$

bzw. umgeschrieben:

$$-K = \frac{(s^* - s_{\infty 1}) \cdot (s^* - s_{\infty 2}) \cdots (s^* - s_{\infty n})}{(s^* - s_{01}) \cdot (s^* - s_{02}) \cdots (s^* - s_{0m})}$$

Die komplexen Terme  $(s^* - s_{\infty 1}) \dots (s^* - s_{0m})$  durch Betrag und Phase ausgedrückt:

$$-K = \frac{\left| (s^* - s_{\infty 1}) \right| e^{j \arg(s^* - s_{\infty 1})} \cdot \left| (s^* - s_{\infty 2}) \right| e^{j \arg(s^* - s_{\infty 2})} \dots \left| (s^* - s_{\infty n}) \right| e^{j \arg(s^* - s_{\infty n})}}{\left| (s^* - s_{01}) \right| e^{j \arg(s^* - s_{01})} \cdot \left| (s^* - s_{02}) \right| e^{j \arg(s^* - s_{02})} \dots \left| (s^* - s_{0m}) \right| e^{j \arg(s^* - s_{0m})}}$$

bzw.:

$$-K = \frac{\left| (s^* - s_{\infty 1}) \right| \cdot \left| s^* - s_{\infty 2} \right| \dots \left| (s^* - s_{\infty n}) \right|}{\left| (s^* - s_{01}) \right| \cdot \left| (s^* - s_{02}) \right| \dots \left| (s^* - s_{0m}) \right|} \cdot e^{j(\arg(s^* - s_{\infty 1}) + \dots + \arg(s^* - s_{\infty n}) - \arg(s^* - s_{01}) - \dots - \arg(s^* - s_{0m}))}$$

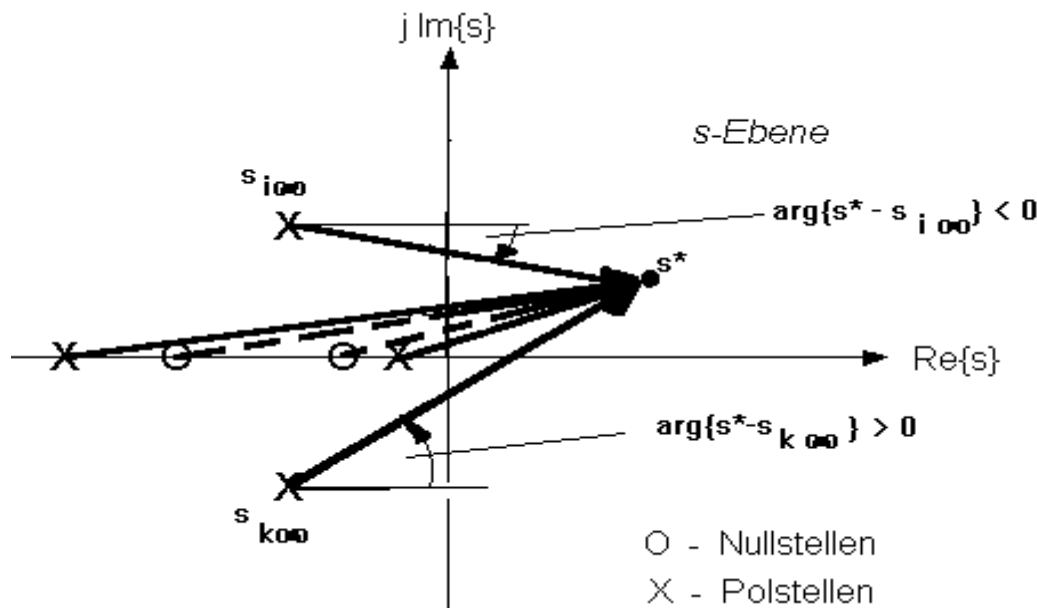
Damit ergeben sich die zwei **Hauptformeln für die Wurzelortskurven-Theorie:**

$$\arg(s^* - s_{\infty 1}) + \dots + \arg(s^* - s_{\infty n}) - \arg(s^* - s_{01}) - \dots - \arg(s^* - s_{0m}) = \begin{cases} 180^\circ & \text{falls } K > 0 \\ 0^\circ & \text{falls } K < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

und

$$|K| = \frac{\left| (s^* - s_{\infty 1}) \right| \cdot \left| s^* - s_{\infty 2} \right| \dots \left| (s^* - s_{\infty n}) \right|}{\left| (s^* - s_{01}) \right| \cdot \left| (s^* - s_{02}) \right| \dots \left| (s^* - s_{0m}) \right|} \quad (3.2)$$

Die beiden Hauptformeln der Wurzelortskurventheorie lassen sich geometrisch interpretieren wenn man bedenkt, daß sich Terme vom Typ  $(s^* - s_{ov}) \dots (s^* - s_{0\mu})$  durch komplexe Zeiger in der Zahlenebene darstellen lassen:



Für Formel ( 3.1 ) kann man sagen: Wenn  $s^*$  eine komplexe Zahl ist, die zum Wurzelort (also für irgend ein „K“ Pol von  $G_w$  ist) gehört, dann gilt:

„Summe der Zeigerargumente der Zeiger von den Polstellen (von  $G_o$ ) zu  $s^*$ “ —  
 „Summe der Zeigerargumente der Zeiger von den Nullstellen (von  $G_o$ ) zu  $s^*$ “ =  $180^\circ$   
 falls  $K > 0$

bzw:

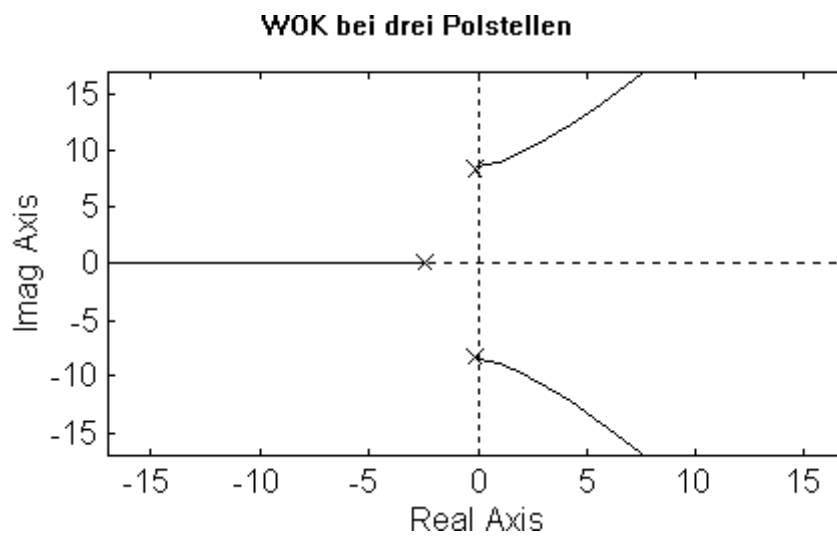
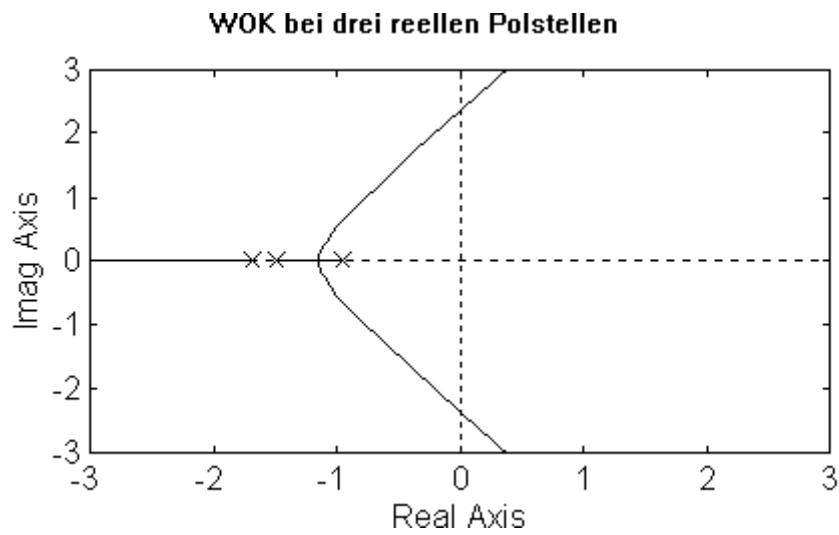
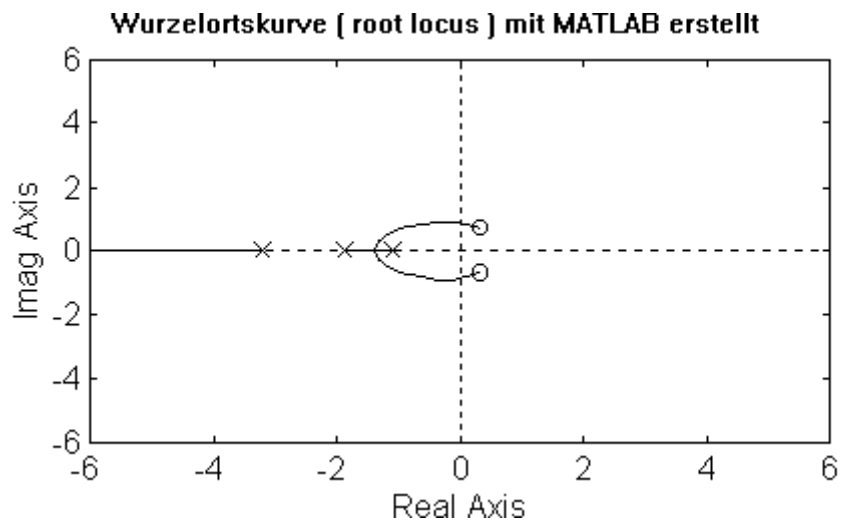
„Summe der Zeigerargumente der Zeiger von den Polstellen ( von  $G_o$  ) zu  $s^*$ “ —  
 „Summe der Zeigerargumente der Zeiger von den Nullstellen ( von  $G_o$  ) zu  $s^*$ “ =  $0^\circ$   
 falls  $K < 0$

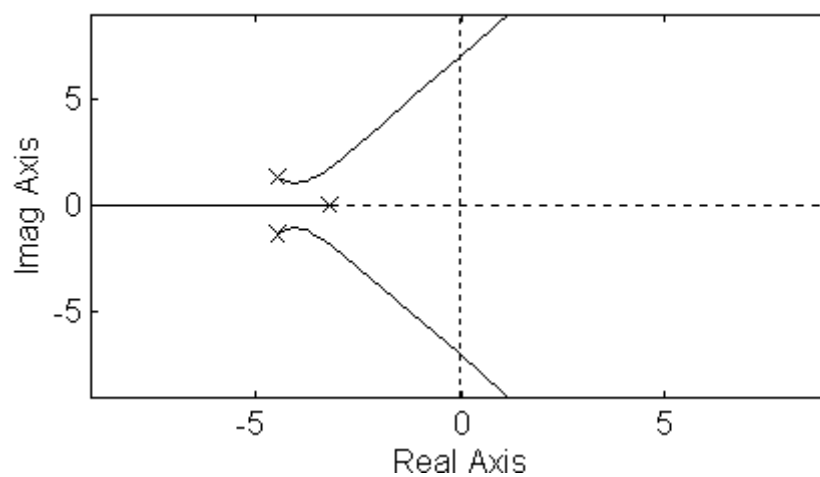
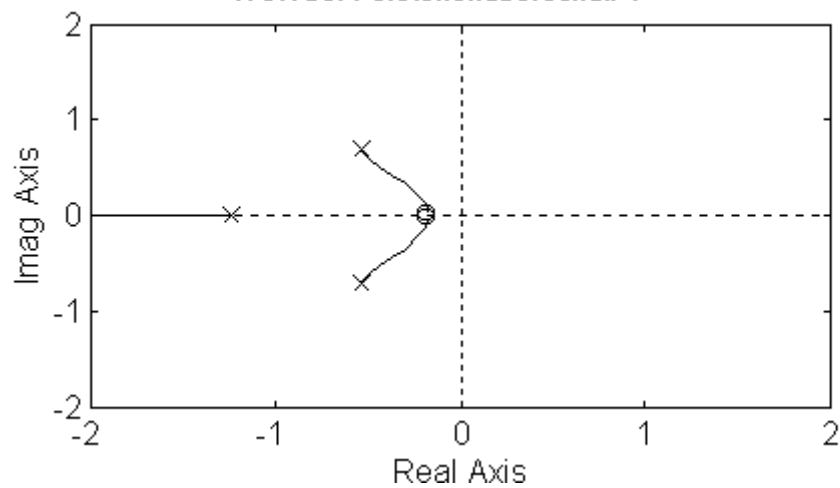
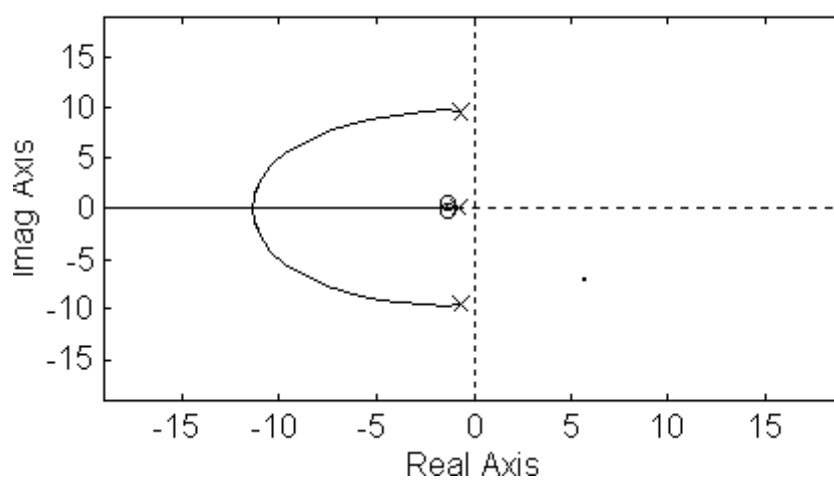
Man beachte, daß die Zeigerargumente mathematisch positiv („gegen den Uhrzeigersinn“) aber auch mathematisch negativ („mit dem Uhrzeigersinn“) sein können.

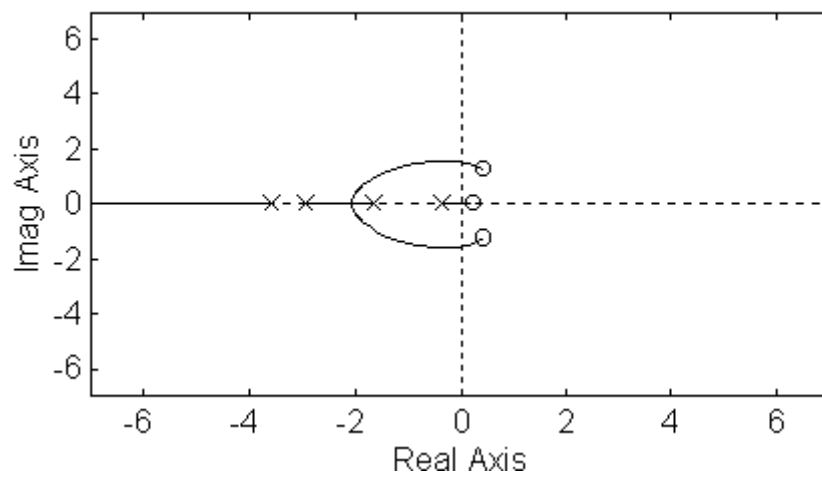
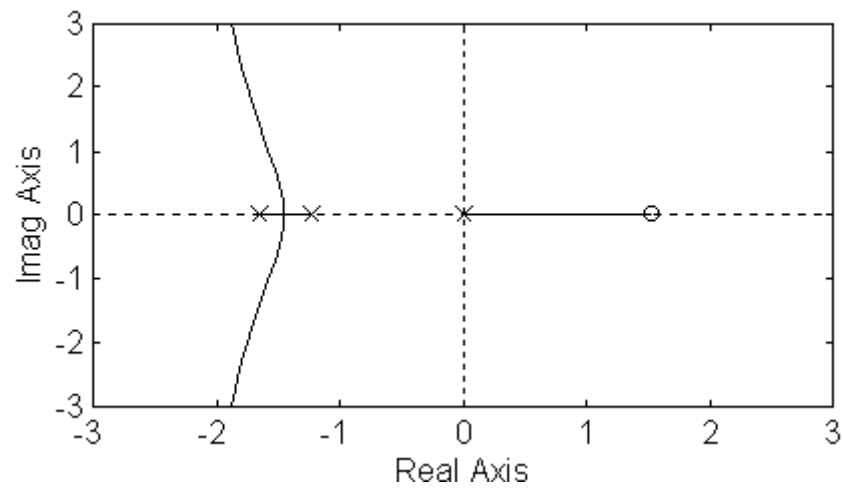
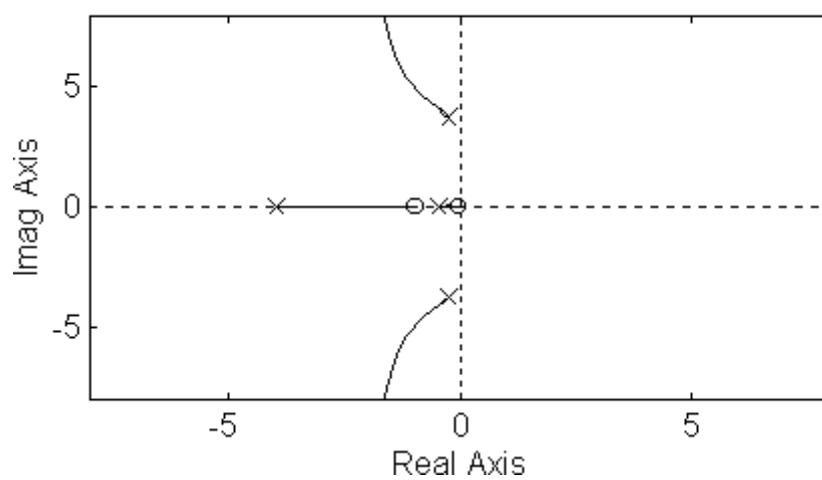
Für Formel (3.2):  $|K| = \frac{\text{Produkt der Zeiger von den Polstellen zum Aufpunkt } s^*}{\text{Produkt der Zeiger von den Nullstellen zum Aufpunkt } s^*}$

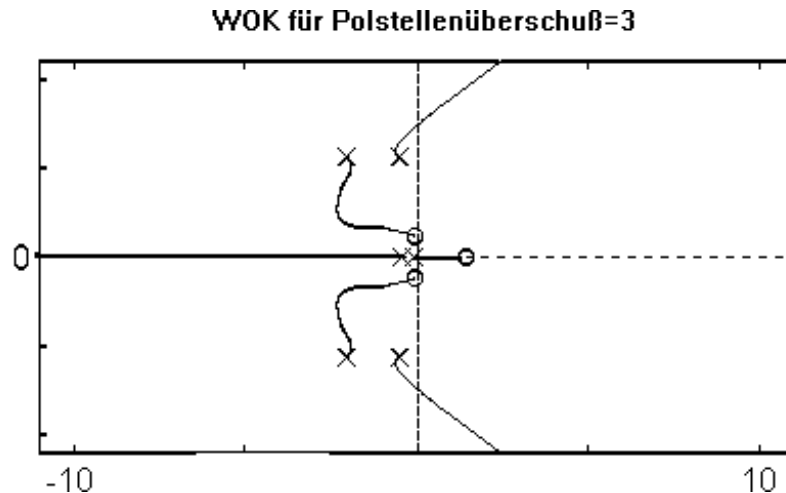
Es folgen einige Beispiele von Wurzelortskurven

( MATLAB-Befehl „`rlocus(Z,N,K)`“, wenn die offene Schleife als Übertragungsfunktion  $G_o = Z(s)/N(s)$  bzw „`rlocus(A,B,C,D,K)`“, wenn die offene Schleife als Zustandsmodell vorliegt.) Es sind nur die Äste für  $K > 0$  eingezeichnet.



**WOK bei drei Polstellen****WOK bei Polstellenüberschuß 1****WOK bei Polstellenüberschuß 1**

**WOK bei Polstellenüberschuß 1****WOK bei Polstellenüberschuß 2****WOK bei Polstellenüberschuß 2**



Um eine Systematik in die scheinbar verwirrende Vielfalt der Wurzelortskurven zu bringen, sollen jetzt die wichtigsten Konstruktionsregeln für das Zeichnen der Wurzelortskurven gegeben werden.

### 3.8.3 Wichtige Konstruktionsregeln für das Zeichnen der WOK's

**WO1:** Die Zweige des Wurzelorts starten für  $K = \frac{+}{-} 0$  aus den Polen von  $G_0(s)$  und enden

für  $K \Rightarrow \frac{+}{-} \infty$  in den Nullstellen von  $G_0(s)$ ; die überschüssigen Pole von  $G_0$  laufen auf Asymptoten ins Unendliche.

**WO2:** Seien  $m$  - der Zählergrad von  $G_0$  und  $n$  - der Nennergrad von  $G_0$ . Dann laufen  $2 \cdot (n - m)$  Zweige des Wurzelortes ins Unendliche. Ihre Asymptoten schneiden sich

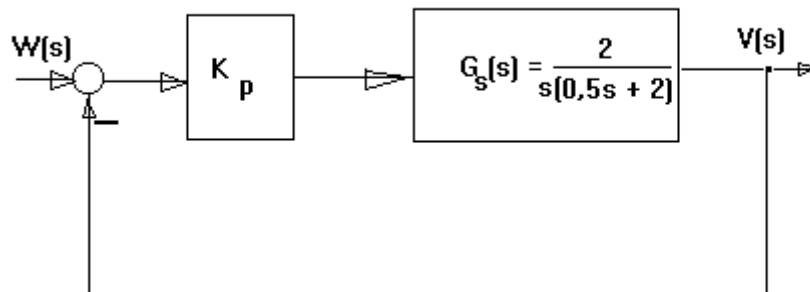
$$\text{alle auf der reellen Achse bei } \delta = \frac{\sum_{v=1}^n \operatorname{Re}(s_{\infty,v}) - \sum_{\mu=1}^m \operatorname{Re}(s_{0,\mu})}{n-m}.$$

**WO3:** Benachbarte Asymptoten schneiden sich unter dem Winkel  $\Psi = \frac{180^\circ}{n-m}$  wobei sich die Asymptoten für  $K > 0$  und  $K < 0$  abwechseln.

**WO4:** Die reelle Achse ist immer ein Teil der Wurzelortskurve. Die WOK ist immer symmetrisch zur reellen Achse.

### 3.8.4 Rechenbeispiele zur Reglersynthese mit dem Wurzelortungsverfahren

**1. Beispiel:** Vorgelegt sei der folgende Regelkreis mit P-Regler.



Der P-Regler ist nach dem Betragsoptimum einzustellen.

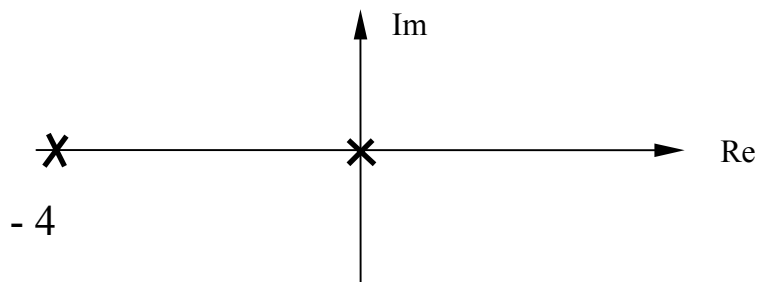
Eine Anmerkung hierzu. Die Reglereinstellung nach Betragsoptimum wird ausführlich erst im 7. Kapitel dieses Skripts abgehandelt. Im Vorgriff darauf sei ( vereinfachend ) folgendes angemerkt: Bei der Reglereinstellung nach dem Betragsoptimum versucht man mit ( etwa vorhandenen ) Reglernullstellen die „störenden“ Streckenpole („langsame“ Pole denen also große Streckenzeitkonstanten entsprechen) herauszukürzen. Die verbleibenden Streckenpole sollen durch Einstellung der Reglerverstärkung so plziert werden, daß für das Regelsystem ein ( für das Zeitverhalten ) dominierendes Polstellenpaar entsteht. Bei diesem dominierenden Polstellenpaar soll es sich um ein Paar konjugiert komplexer Pole handeln, für die gilt „Re“ = „Im“. Eventuell weitere Pole von  $G_w$  sollen entweder „weit links“ vom dominierenden Polpaar liegen oder diese Pole sollen durch nahebei liegende Nullstellen ein hinreichend kleines Residuum haben.

**Lösung:** Die Lösung des vorgelegten Problems beinhaltet einige Schritte die exemplarisch für jede Lösung sind, wenn das WOK-Verfahren herangezogen wird.

#### **1. K-Normalform von $G_o$ erstellen.**

$$\text{Es ist } G_o(s) = \frac{2K_p}{s(0,5s + 2)} = \frac{2K_p}{0,5} \cdot \frac{1}{s(s + 4)} = K \frac{1}{s(s + 4)}$$

#### **2. PN-Plan von $G_o$ zeichnen .**

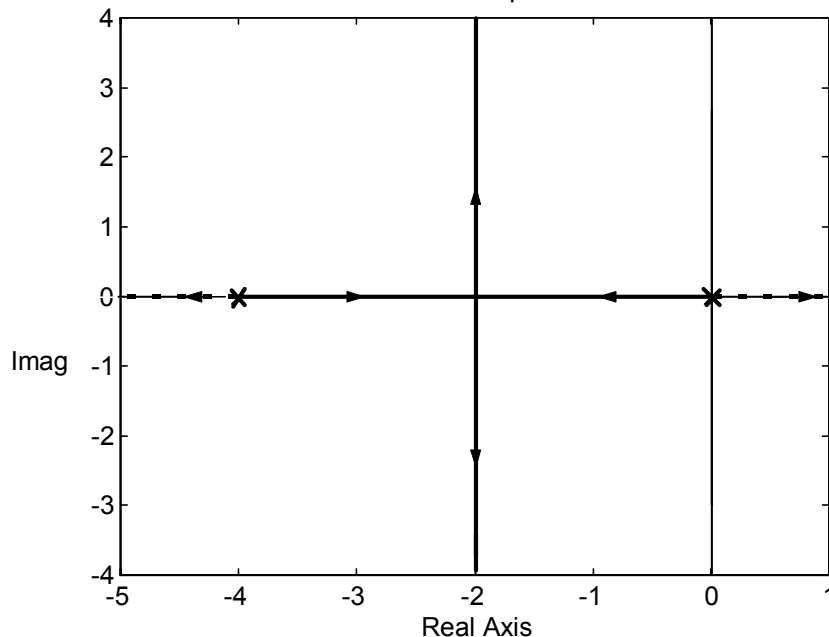




### 3. Wurzelortskurve zeichnen.

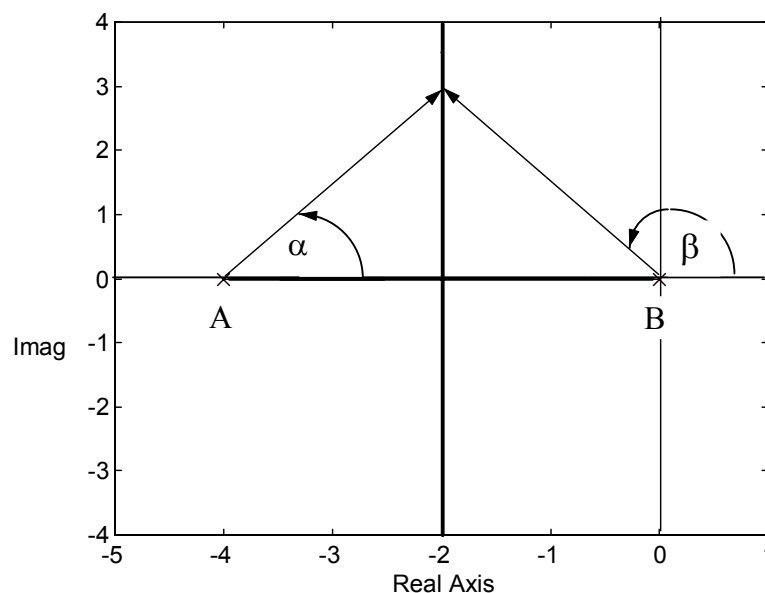
Jetzt kommen die Regeln WO1 - WO4 zur Anwendung.

WOK zum 1. Beispiel für  $K > 0$



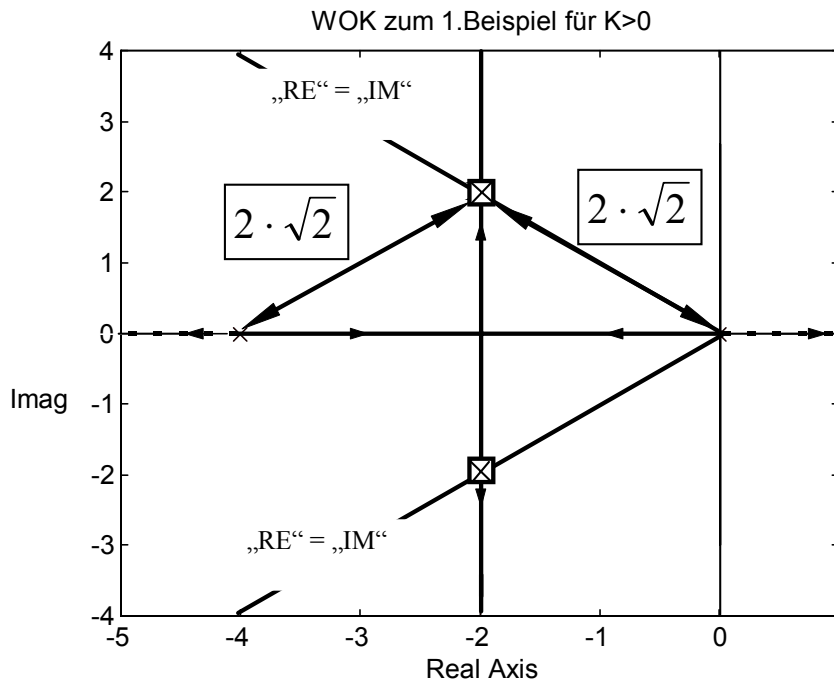
**Bild 3.17:** WOK zu Beispiel 1. Die Äste der WOK wurden mit Hilfe des MATLAB-Programms BEISP\_1.M gezeichnet und sind für  $K > 0$  dick ausgeführt. Pfeilorientierung im Sinne wachsender  $K$ -Werte. Die Äste der WOK für  $K < 0$  wurde von Hand nachgetragen und sind gestrichelt gezeichnet.

Die Wurzelortskurve zu diesem Beispiel ist leicht von Hand zu zeichnen. Man braucht eigentlich nur zu wissen, daß die Winkelsumme in einem Dreieck  $180^\circ$  ist. Bild 3.18 dient zur Erläuterung:



**Bild 3.18:** Zur graphischen Bestimmung der WOK für  $K > 0$ . Man erkennt, daß die Winkelsumme  $\alpha + \beta = 180^\circ$  für alle Strahlen von A und B aus zu Punkten der Mittelsenkrechten von  $\overline{AB}$  hin ist.

Endlich kann man den Wert von „K“ herauslesen. Hierzu zeichne man sich Hilfslinien für die „RE“ = „IM“ gilt in die Wurzelortskurve ein.



**Bild 3.19:** An den Schnittpunkten der Hilfslinie „RE“ = „IM“ mit den Ästen der Wurzelortskurve für  $K > 0$  liegen die gesuchten Pole des geschlossenen Kreises.

Der notwendige K -Wert für die geforderten Pole des geschlossenen Kreises errechnen sich entsprechend der Formel:

$$|K| = \frac{\text{Produkt der Zeiger von den Polstellen zum Aufpunkt } s^*}{\text{Produkt der Zeiger von den Nullstellen zum Aufpunkt } s^*}$$

Im vorliegenden Fall, wo keine Nullstellen der offenen Schleife auftauchen:

$$|K| = \frac{\text{Produkt der Zeiger von den Polstellen zum Aufpunkt } s^*}{1}$$

$$\text{zu } K = (2 \cdot \sqrt{2}) \cdot (2 \cdot \sqrt{2}) = 8.$$

4.  $K_p$  - berechnen: Ausgehend von der Beziehung  $\frac{2K_p}{0,5} = K$  berechnet sich  $K_p$  zu

$$K_p = \frac{8 \cdot 0,5}{2} = 2$$

Zusammenfassung: Für eine Reglerverstärkung von  $K_p=2$  stellt sich für den geschlossenen Regelkreis ein (dominierendes) Polstellenpaar ein. Dieses liegt bei  $s_\infty = -2 + j2$  bzw.  $s_\infty = -2 - j2$ .

Schlußbemerkungen zu diesem Beispiel:

Bemerkung1: Das Zeichnen dieser WOK's kann man durch den MATLAB-Befehl „rlocus“ realisieren. Die gesamten Anweisungen für das Zeichnen von Bild 3.17 steht auf den nächsten Zeilen:

```
% Wurzelortsberechnung für das Beispiel 1 aus dem Skript REGELUNGSTECHNIK
% Kapitel 3.8
ZO = [1];
NO =[1 4 0];
rlocus(ZO,NO), axis([-5. 1. -4. 4.]),title('WOK zum 1.Beispiel für K>0 ')
```

Bemerkung2: Die Berechnung der notwendigen Reglerverstärkung  $K_p$  und des sich dazu einstellenden dominierenden Polstellenpaares ist noch leicht von Hand durchzuführen.

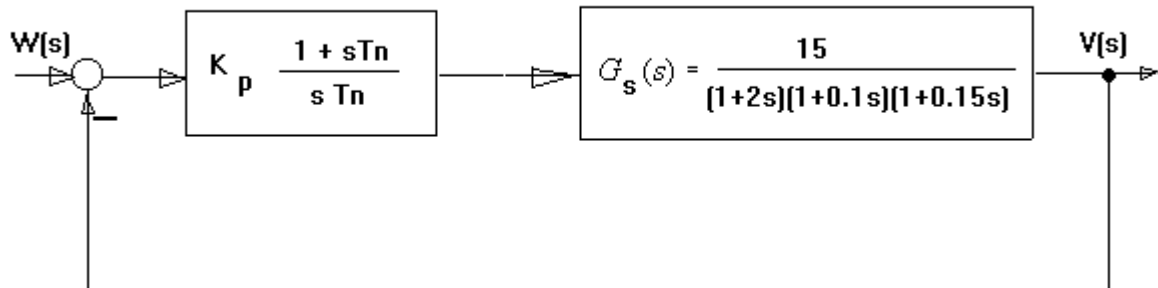
Ausgehend von  $G_o(s) = \frac{2K_p}{s(0,5s + 2)}$  erhält man  $G_w(s) = \frac{2K_p}{0,5s^2 + 2s + 2K_p}$ . Die Pole von

$G_w(s)$  liegen sodann bei  $s_{\infty 1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 0,5 \cdot 2K_p}}{2 \cdot 0,5}$ . Konjugiert komplexe Pole

mit „RE“ = „IM“ erhält man indem man verlangt:

$$\sqrt{4 - 4K_p} = j2 \quad \text{entsprechend} \quad 4 - 4K_p = -4 \quad \text{und folglich} \quad K_p = 2$$

Demzufolge liegen die Pole von  $G_w$  bei  $-2 \pm j2$ . Die Handrechnung ging nur deshalb so leicht durchzuführen, weil ein Polynom 2. Grades zu berechnen war. Bei Polynomen höheren Grades ist die Handrechnung wesentlich schwieriger (bis unmöglich  $\mapsto$  N.H.Abel, 1802-1829 und E. Galois, 1811-1832).

**2. Beispiel:** Vorgelegt sei der folgende Regelkreis mit PI-Regler.

Der PI-Regler ist nach dem Betragsoptimum einzustellen.

Hier gelten die Anmerkungen wie zu Beispiel 1: Bei der Reglereinstellung nach dem Betragsoptimum versucht man mit ( etwa vorhandenen ) Reglernullstellen die „störenden“ Streckenpole ( = „langsame“ Pole denen also große Streckezeitkonstanten entsprechen) herauszukürzen. Die verbleibenden Streckenpole sollen durch Einstellung der Reglerverstärkung so plziert werden, daß für das Regelsystem ein ( für das Zeitverhalten ) dominierendes Polstellenpaar entsteht. Bei diesem dominierenden Polstellenpaar soll es sich um ein Paar konjugiert komplexer Pole handeln für die gilt „Re“ = „Im“.

**Lösung:****1. K-Normalform von  $G_o$  erstellen.**

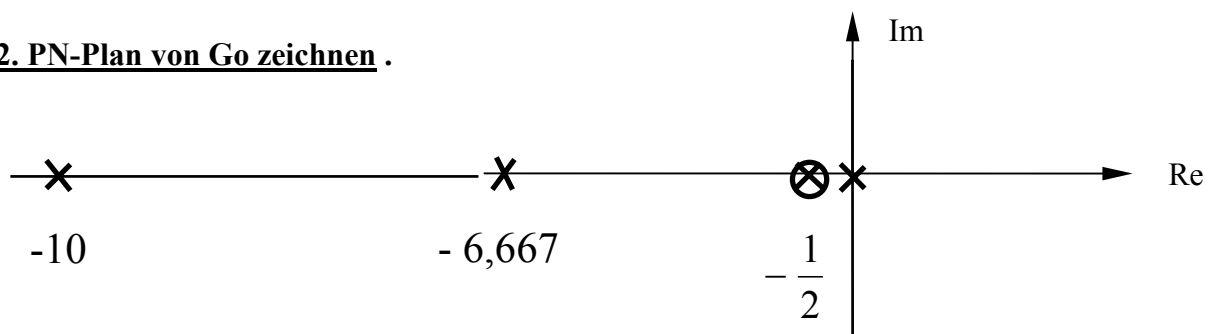
Natürlich wird man für die Nachstellzeit der Reglers setzen:  **$T_n = 2 \text{ sec}$**

Es ist sodann:

$$G_o(s) = \frac{15 \cdot K_p}{T_n} \cdot \frac{1 + sT_n}{s \cdot (1 + 2s) \cdot (1 + 0.1s) \cdot (1 + 0.15s)} \stackrel{T_n=2(\text{sec})}{=} G_o(s) = \frac{15 \cdot K_p}{2 \cdot s} \cdot \frac{1}{(1 + 0.1s) \cdot (1 + 0.15s)}$$

$$\text{Und daraus: } G_o(s) = \frac{15 \cdot K_p}{2} \cdot \frac{1 \cdot 10 \cdot 6,667}{s \cdot (10 + s) \cdot (6,667 + s)} = K \cdot \frac{1}{s \cdot (s + 10) \cdot (s + 6,667)}$$

wobei  $K = 500 \cdot K_p$ .

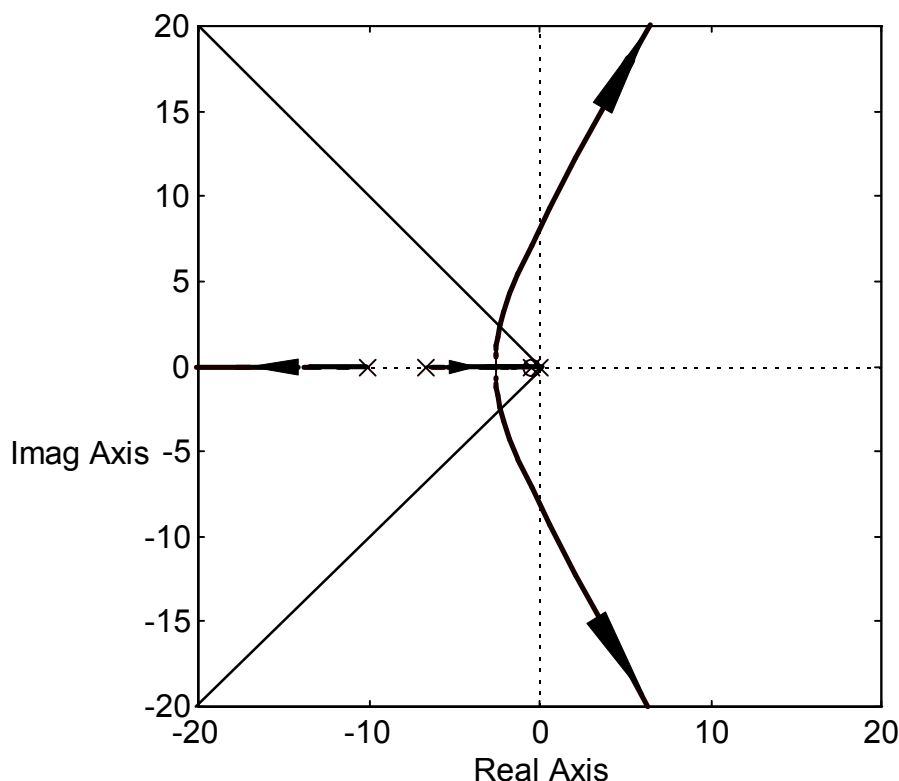
**2. PN-Plan von  $G_o$  zeichnen .**

### 3. Wurzelortskurve zeichnen.

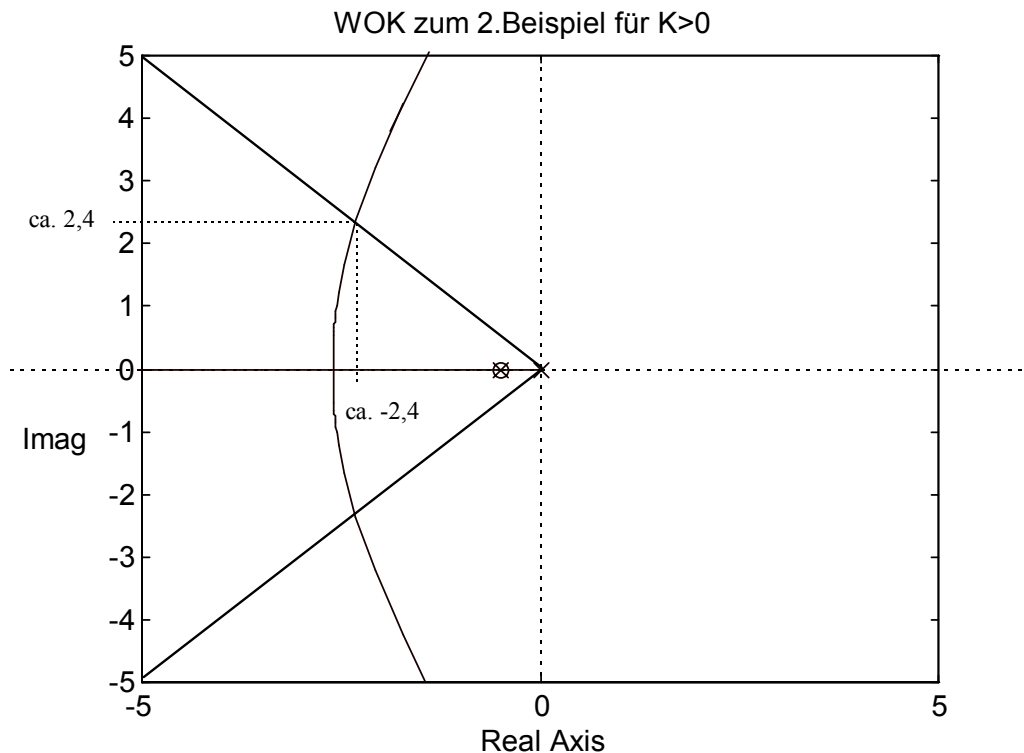
Hier ist das Zeichnen der Wurzelortskurve (von Hand) schwieriger, da keine einfachen geometrischen Zusammenhänge (wie im Beispiel 1) ausgenutzt werden können. Mit Hilfe der vorhandenen Software (die Control-Toolbox von MATLAB) geht es natürlich sofort. Zunächst der Quellcode:

```
% Wurzelortsberechnung für das Beispiel 2 aus dem Skript REGELUNGSTECHNIK
% Kapitel 3.8
Tn=2;
ZR = [Tn 1]; % Polynomkoeffizienten nach fallenden Potenzen in "s" geordnet.
NR = [Tn 0];
Zs = [15];
Ns1 =[2 1];
Ns2 =[0.1 1];
Ns3 =[0.15 1];
Ns12 = conv(Ns1,Ns2); % Polynommultiplikation
Ns = conv(Ns12,Ns3); % Polynommultiplikation
ZO = conv(ZR,Zs);
NO = conv(NR,Ns);
rlocus(ZO,NO), axis('square'),title('WOK zum 2.Beispiel für K>0 ');
```

Plot hierzu:



**Bild 3.20:** WOK zu Beispiel 2. Die Äste der WOK wurden mit Hilfe des obigen MATLAB Programms gezeichnet und sind für  $K > 0$  dick ausgeführt. Pfeilorientierung im Sinne wachsender  $K$ -Werte. Die Geraden „RE“ = „IM“ sind zusätzlich eingezeichnet.



**Bild 3.21:** WOK zu Beispiel 2. Ausschnitt von Bild 3.20

Der notwendige K -Wert für die geforderten Pole des geschlossenen Kreises errechnet sich nach Ablesen aus Bild 3.12 bzw. aus Bild 3.21 zu

$$K = \frac{\sqrt{2,4^2 + 2,4^2} \cdot \sqrt{(6,667 - 2,4)^2 + 2,4^2} \cdot \sqrt{(10 - 2,4)^2 + 2,4^2}}{1} = 132,42$$

**4. Kp - berechnen:** Ausgehend von der Beziehung  $500 \cdot K_p = K$  berechnet sich  $K_p$  zu  **$K_p = 0,2648$**

Zusammenfassung: Für eine Reglerverstärkung von  **$K_p = 0,2648$**  und  **$T_n = 2$  sec** stellt sich für den geschlossenen Regelkreis ein (dominierendes) Polstellenpaar ein. Dieses liegt (im Rahmen der Ablesegenauigkeit ) bei

$$s_\infty = -2,4 + j2,4 \quad \text{bzw.} \quad s_\infty = -2,4 - j2,4.$$

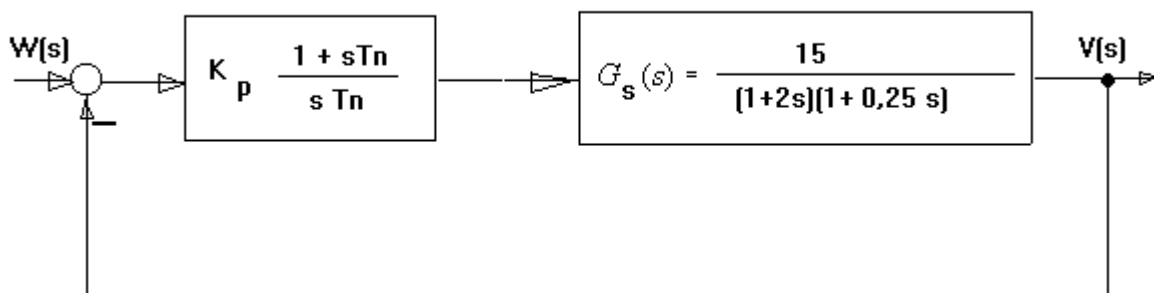
Ein weiterer, „schneller“ Pol liegt „weit links“. Die Rechnung liefert diesen dritten Pol bei  $s_\infty = -12,04$

**Schlußbemerkungen zu diesem Beispiel:**

Bemerkung1: Beim vorliegenden Beispiel läßt sich eine Besonderheit ablesen, die in der Praxis oft vorliegt und die bei Praktikern mit Vorteil (auch beim Wurzelortsverfahren) genutzt wird. Bei der erwähnten Besonderheit handelt es sich um folgendes: Die Regelstrecke wird durch eine Übertragungsfunktion beschrieben die eine „große“ Zeitkonstante (2 sec) und mehrere „kleine Zeitkonstanten“ (0,1 sec und 0,15 sec) enthält. Ganz allgemein wird für Regelstrecken die aus Zeitkonstanten bestehen, die sich ausschließlich in „große Zeitkonstanten“ - nennen wir sie  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j$  - und in „kleine Zeitkonstanten“ - nennen wir sie  $\tau_k, \tau_l, \dots, \tau_s$  einteilen lassen, die Summenzeitkonstante  $\tau_\Sigma$  eingeführt. Es soll dann gelten

$$\tau_\Sigma = \tau_k + \tau_l + \dots + \tau_s \quad \text{und} \quad \tau_1 \gg \tau_\Sigma \dots \tau_j \gg \tau_\Sigma$$

Im vorliegenden Beispiel ist  $\tau_\Sigma = 0,1 \text{ sec} + 0,15 \text{ sec} = 0,25 \text{ sec}$ . Damit kann man unser Beispiel 2 noch einmal von Hand rechnen. Es sei wieder mit der Skizze aus der Aufgabenstellung begonnen. Im Gegensatz zur ursprünglichen Skizze ist jetzt die Summenzeitkonstante eingetragen.



Die Lösung kann jetzt wieder mit dem Wurzelortsverfahren bestimmen. Der Lösungsweg unterscheidet sich nun nichtmehr von der Vorgehensweise aus dem ersten Beispiel. Das WOK-Verfahren bzw. die Handrechnung liefern (bitte nachprüfen!):

**$T_n = 2 \text{ sec}$  und  $K_p = 0,2667$**

Das dominierende Polpaar des geschlossenen Kreises liegt nach dieser Näherungsrechnung bei  $s_{\infty 1,2} = -2 \pm j 2$ . Der schnelle Pol taucht in der Rechnung gar nicht auf.

Für die Summenzeitkonstante kann man folgende Plausibilitätserklärung angeben. Hierzu betrachte man noch einmal die kleinen Zeitkonstanten:

$$\frac{1}{(1 + s\tau_k) \cdot (1 + s\tau_l) \cdots (1 + s\tau_s)} =$$

$$\frac{1}{1 + s(\tau_k + \tau_l + \dots + \tau_s) + s^2(\tau_k\tau_l + \dots + \tau_l\tau_s) + s^3(\tau_k\tau_l\tau_m + \dots) + \dots} \approx$$

$$\frac{1}{1 + s(\tau_k + \tau_l + \dots + \tau_s)} = \frac{1}{1 + s\tau_\Sigma}$$

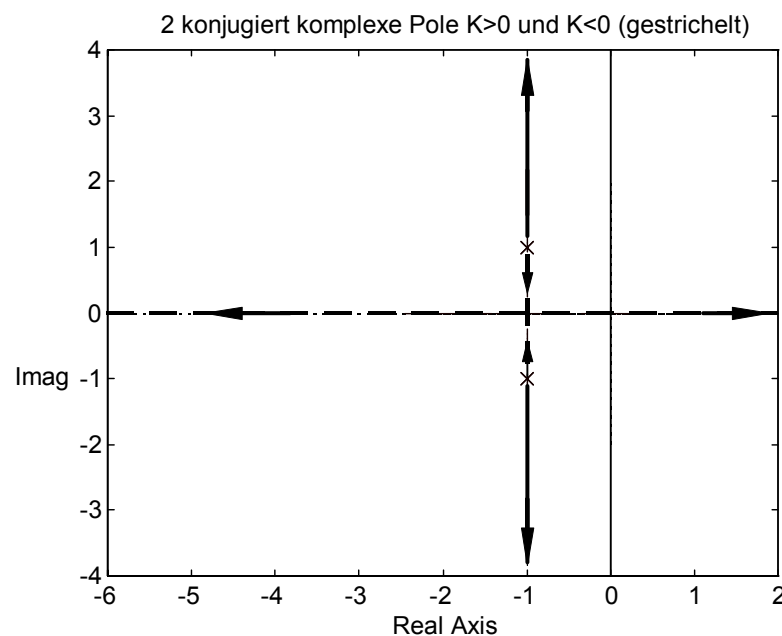
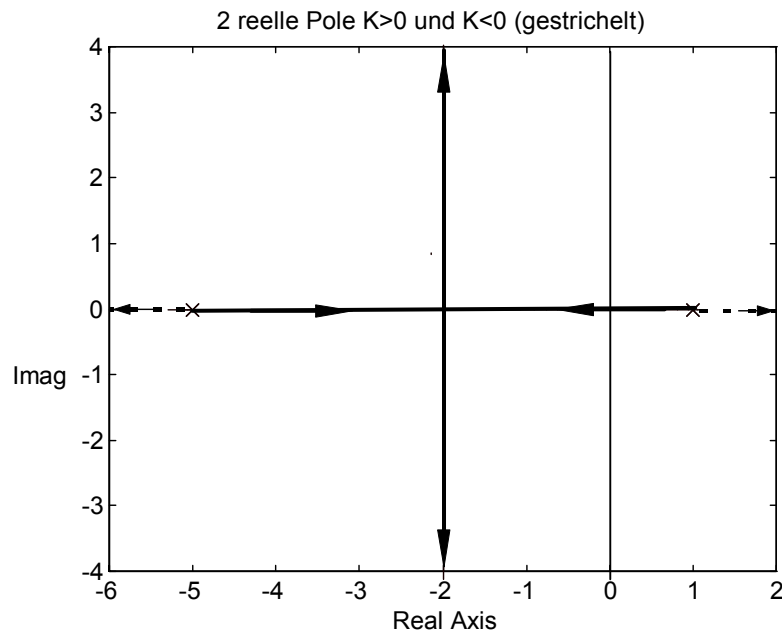
Man nimmt also an, daß die „kleinen“ Zeitkonstanten vernachlässigbar werden, wenn diese als Produkte bzw. Mehrfachprodukte auftreten.



Bemerkung2: Der Vorteil der WOK-Methoden ist es natürlich, daß man sich relativ schnell eine Vorstellung vom PN-Plan des Reglers und damit vom benötigten Regler selbst machen kann. Eine grobe Skizze der zu erwartenden Wurzelortskurve sollte stets mit wenigen Bleistiftstrichen durchzuführen sein. Um hier eine größere Fertigkeit auf diesem Gebiet zu erlangen werden einige Ergänzungen zu Wurzelortskurven gemacht. Diese betreffen

- a) einen Katalog von wichtigen Standard - Wurzelortskurven
- b) Anmerkungen zum Zeichnen der Wurzelortskurven im Großen und im Kleinen.
- a) **Ein Katalog von wichtigen Standard - Wurzelortskurven**

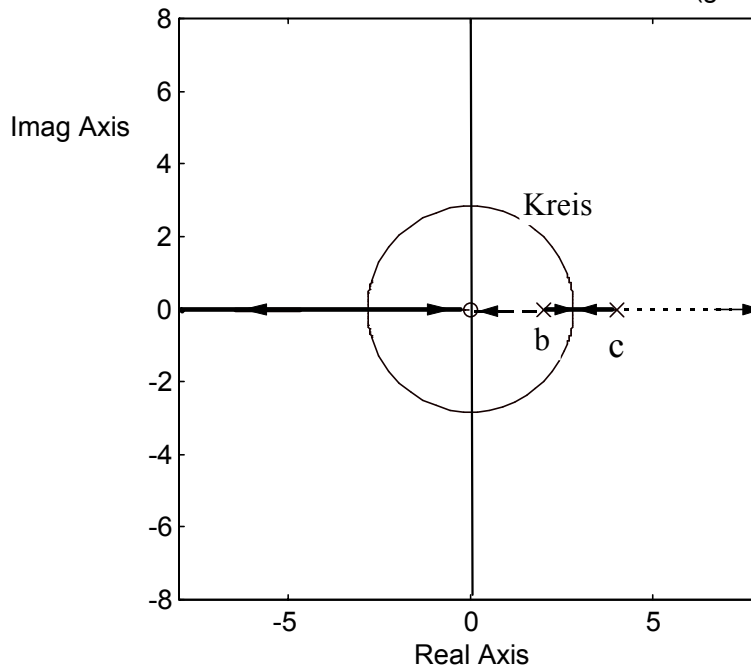
i) **zwei Pole allein:**



**ii) zwei Pole und eine Nullstelle:**

**- die reellen Pole liegen (bei „b“ und „c“) rechts von der Nullstelle (diese bei „0“)**

2 reelle Pole und eine Nullstelle  $K>0$  und  $K<0$  (gestrichelt)

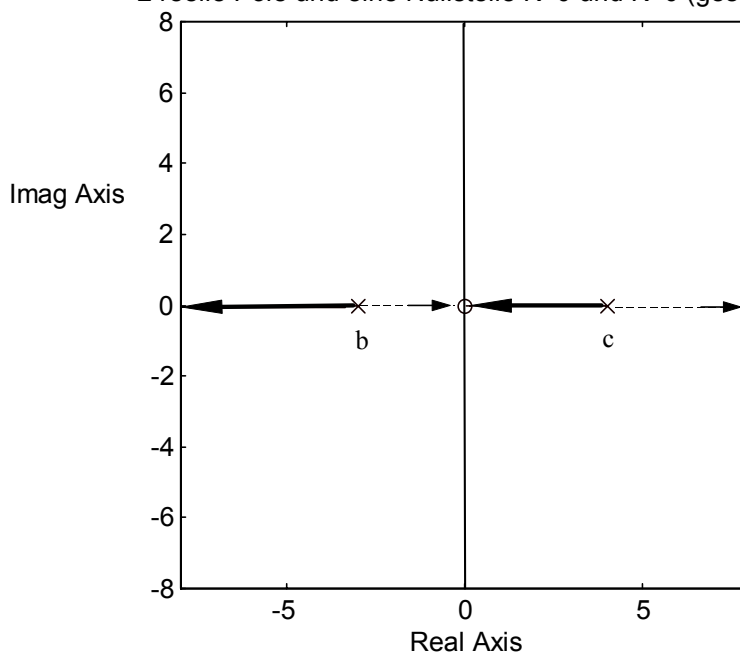


Der Kreis wird durch die Gleichung  $x^2 + y^2 = b \cdot c$  beschrieben.

Achtung: Wenn die Nullstelle nicht bei „0“ liegt, so denke man sich eine y-Achse durch diese Nullstelle gelegt und messe von da aus die Werte „b“ und „c“ ab. Bezüglich dieser „verschobenen“ y-Achse gilt wieder die angegebene Kreisgleichung.

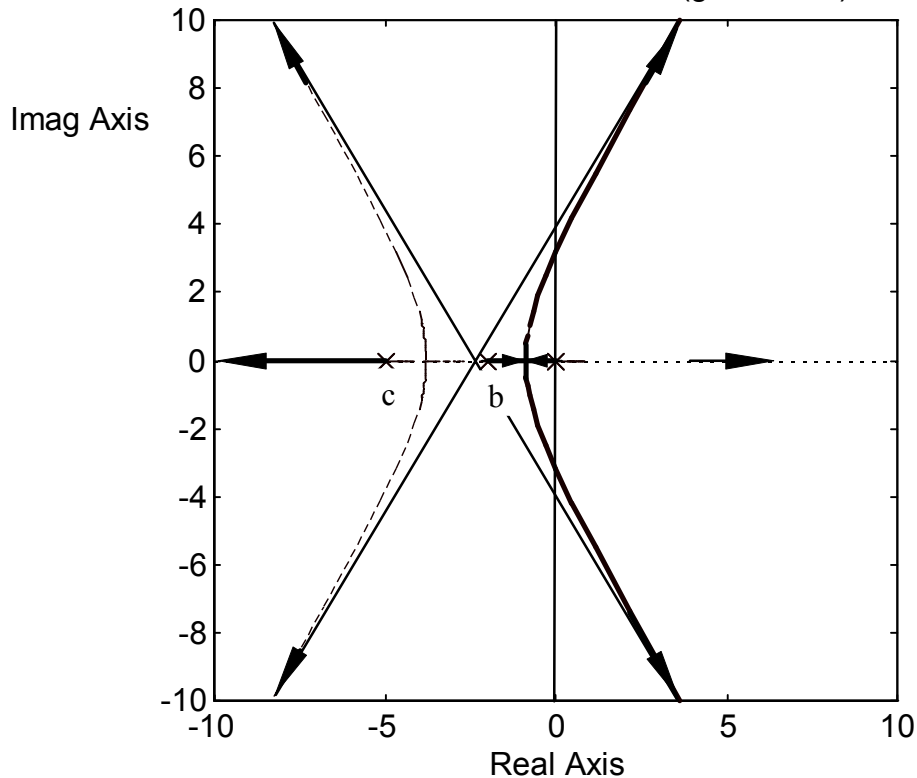
**- die Nullstelle liegt zwischen den reellen Polen ( diese bei „b“ und „c“ )**

2 reelle Pole und eine Nullstelle  $K>0$  und  $K<0$  (gestrichelt)

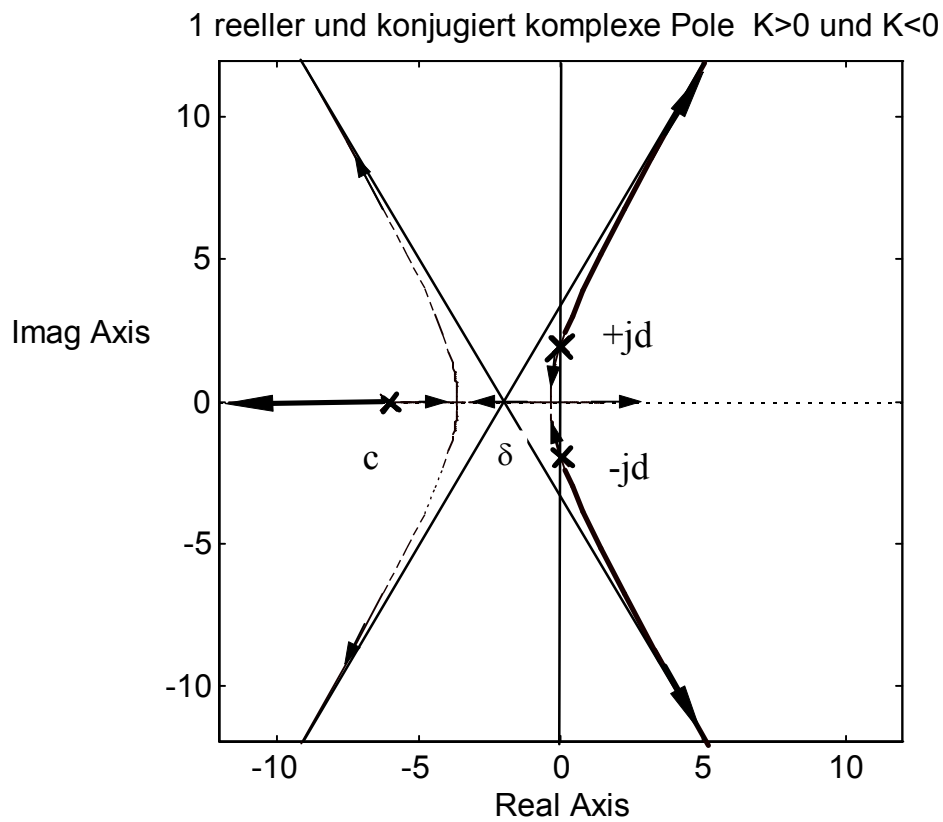


iii) **drei Pole**

- zwei reelle Pole liegen (bei „b“ und „c“) und einer bei „0“

3 reelle Pole  $K > 0$  und  $K < 0$  (gestrichelt)Hyperbelgleichung:  $3x^2 - 2(b+c)x - y^2 + bc = 0$ Asymptotenschnittpunkt:  $\delta = \frac{b+c}{3}$ Verzweigungspunkte bei:  $\frac{b+c}{3} \pm \frac{\sqrt{(b+c)^2 - 3 \cdot bc}}{3}$

- ein reeller Pol und ein Paar konjugiert komplexer Pole (diese liegen unterhalb der Asymptoten)



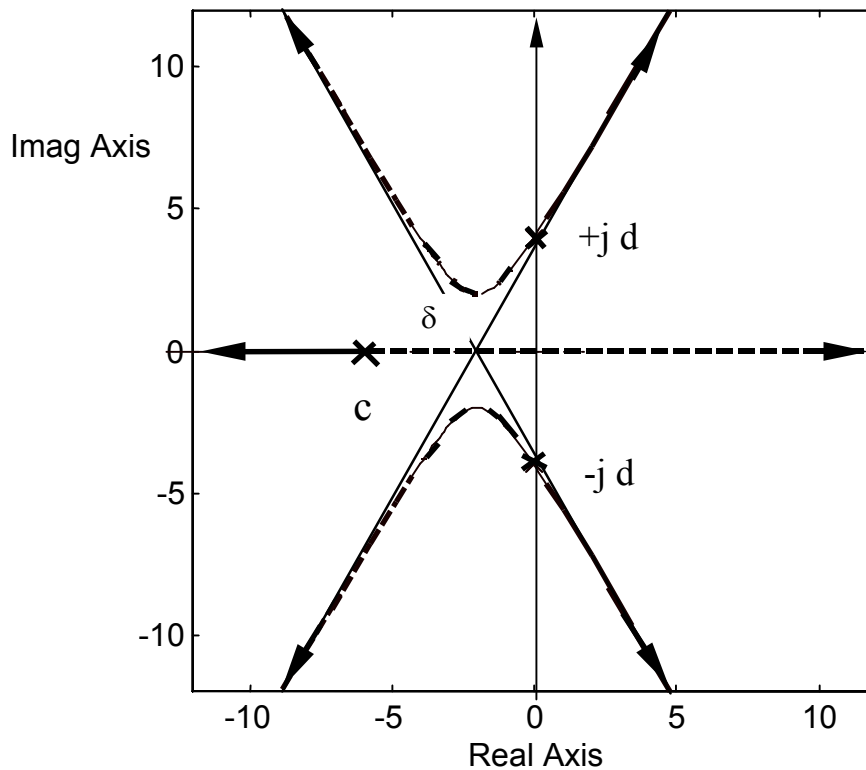
Hyperbelgleichung: 
$$\left(x - \frac{c}{3}\right)^2 - \frac{y^2}{3} = \frac{c^2 - 3 \cdot d^2}{9}$$

Asymptotenschnittpunkt: 
$$\delta = \frac{c}{3}$$

Scheitelpunkt bei: 
$$x_s = \frac{c}{3} \pm \frac{\sqrt{(c)^2 - 3 \cdot d^2}}{3}$$

- ein reeller Pol und ein Paar konjugiert komplexer Pole (diese liegen oberhalb der Asymptoten)

1 reeller und konjugiert komplexe Pole  $K>0$  und  $K<0$



Hyperbelgleichung: 
$$\left(x - \frac{c}{3}\right)^2 - \frac{y^2}{3} = \frac{c^2 - 3 \cdot d^2}{9}$$

Asymptotenschnittpunkt: 
$$\delta = \frac{c}{3}$$

Scheitelpunkt bei: 
$$y_s = \pm \sqrt{d^2 - \frac{c^2}{3}}$$

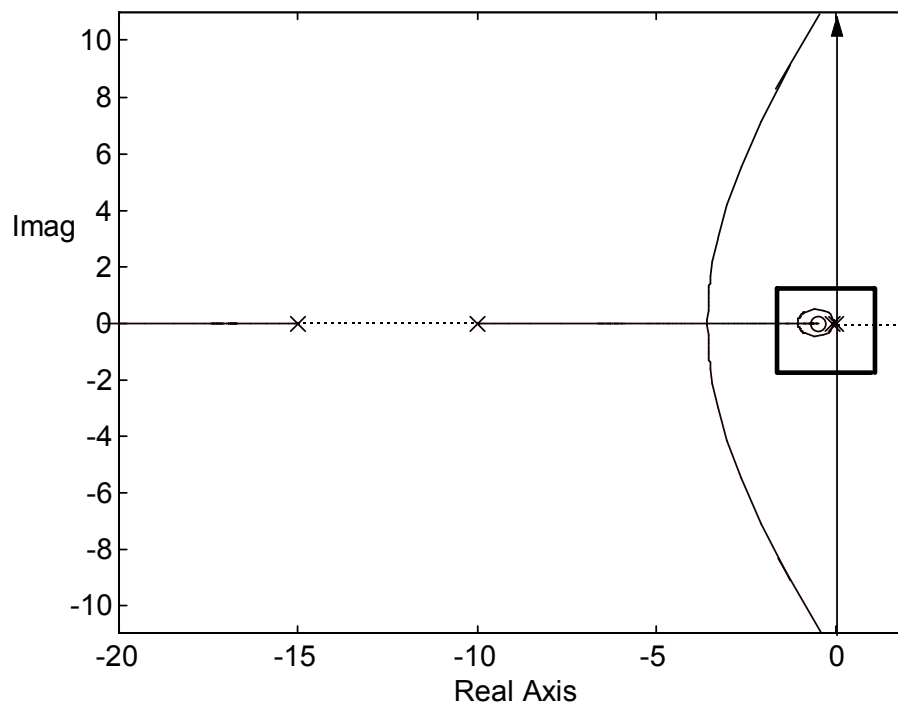
**b) Anmerkungen zum Zeichnen der Wurzelortskurven im Großen und im Kleinen.**

Das Zeichnen im Großen und im Kleinen erlaubt es oft, eine „komplizierte“ WOK auf mehrere einfache Katalogfälle zurückzuführen. Dies soll an einem Beispiel demonstriert werden.

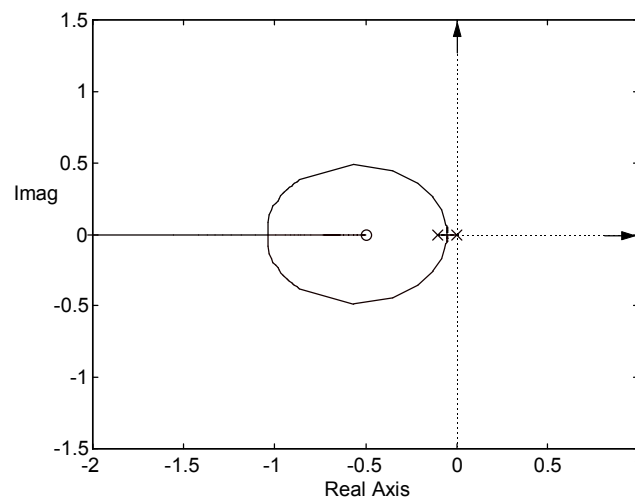
Die Übertragungsfunktion einer offenen Regelschleife sei gegeben als:

$$G_O(s) = K \cdot \frac{(s + 0,5)}{s \cdot (s + 0,1) \cdot (s + 10) \cdot (s + 15)}$$

Die zugehörige WOK für  $K > 0$  fällt nicht mehr unter die Katalogfälle. Mit Hilfe von MATLAB erhält man:

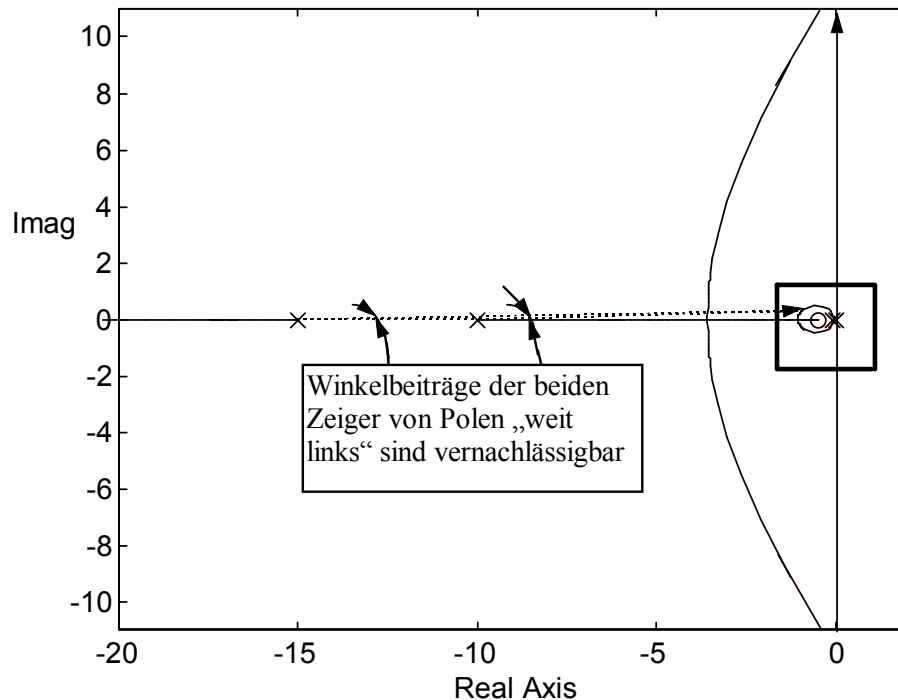


**Bild 3.22:** WOK zum vorgelegten Beispiel. Die Äste für  $K > 0$  sind als durchgezogene Kurven und Geraden dargestellt. Das stark eingerahmte Detail wird im nächsten Bild vergrößert.



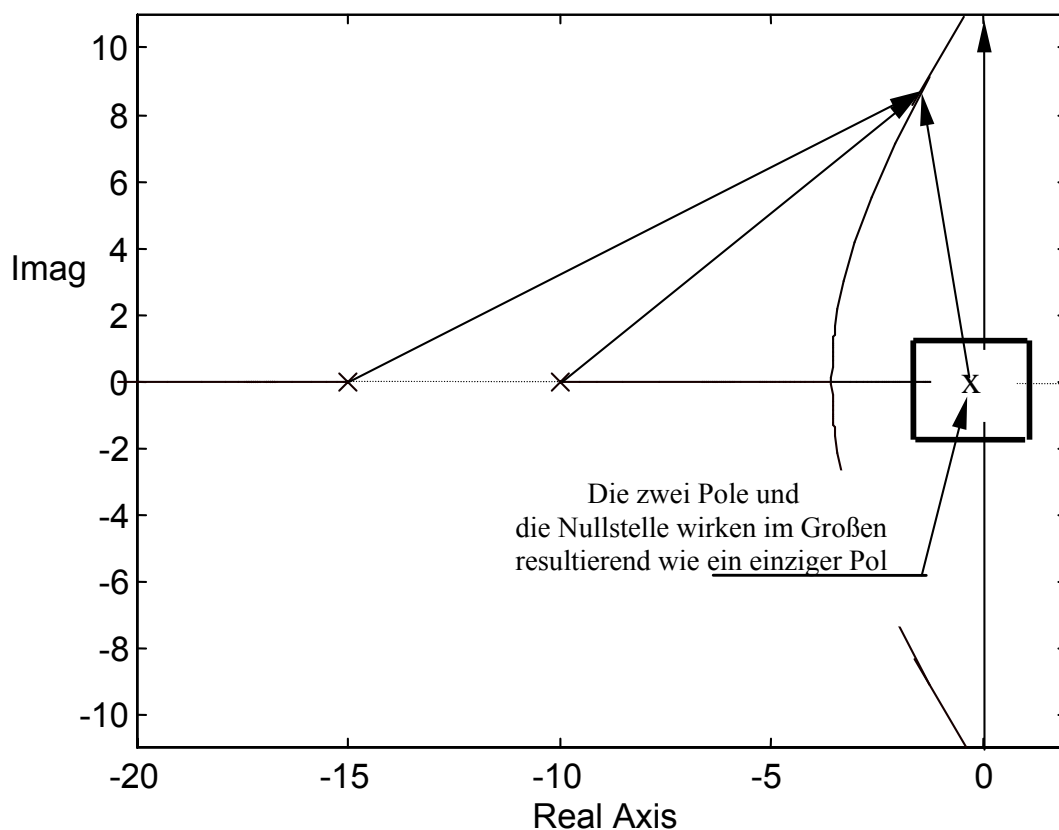
**Bild 3.23:** Ausschnitt aus Bild 3.22 (Darstellung im Kleinen).

Man erkennt in Bild 3.23 unschwer den Katalogfall ii) „zwei reelle Pole und eine Nullstelle“. In der Tat tragen die beiden „weit entfernten Pole“ bei  $s_{\infty} = -10$  und  $s_{\infty} = -15$  kaum zur Winkelbilanz in der Umgebung der betrachteten Ausschnitts der s-Ebene bei. Die größten Beiträge für die Winkelbilanz liefern die Pole und Nullstellen aus dem Gebiet des Ausschnitts. Die nachstehende Skizze soll diesen Sachverhalt erläutern.



**Bild 3.24:** Verschwindender Anteil der weit entfernten Pole (und ggf. Nullstellen) auf den Wurzelortskurvenverlauf „im Kleinen“.

Betrachtet man umgekehrt den Verlauf der Wurzelortskurve in weiter Entfernung des stark eingerahmten Details von Bild 3.22 so stellt man fest, daß für die dann notwendige Winkelbilanz das „Nest“ - bestehend aus den nahe beieinander liegenden Polen und Nullstellen (in unserem Fall die Pole bei  $s_{\infty} = 0$  und  $s_{\infty} = -0,1$  sowie der Nullstelle bei  $s_0 = -0,5$ ) - nur soviel beiträgt wie der Pol-Nullstellen-Überschuß ist. Im vorliegenden Fall beeinflußt das Nest aus 2 Polen und einer Nullstelle den Wurzelort im Großen so, als ob resultierend nur eine einzige Polstelle vorhanden wäre. Die nachstehende Skizze (Bild 3.25) soll diesen Sachverhalt erläutern.



**Bild 3.24:** Wurzelortskurvenverlauf „im Großen“.

Zum Schluß kehren wir noch einmal zum Beispiel 2 zurück. Wir hatten das Problem mit Hilfe des Wurzelorts auf zwei verschiedene Arten gelöst:

- 1.) Mit Hilfe des Befehls „rlocus“ aus der Control-Toolbox von MATLAB.
- 2.) Näherungsweise mit Hilfe der Ersatzzeitkonstanten.

Jetzt können wir das Problem auch noch einmal exakt lösen, denn es liegt ein Katalogfall vor. Und zwar **der Fall von drei reellen Polen**. Ausgegangen wird von der bereits berechneten K-Normalform der offenen Regelschleife:

$$G_o(s) = \frac{15 \cdot K_p}{2} \cdot \frac{1 \cdot 10 \cdot 6,667}{s \cdot (10 + s) \cdot (6,667 + s)} = K \cdot \frac{1}{s \cdot (s + 10) \cdot (s + 6,667)}$$

Man identifiziere also in der Hyperbelgleichung aus dem zugehörigen Katalogfall

$$3x^2 - 2(b + c)x - y^2 + bc = 0$$

$b = -6,667$  und  $c = -10$

und erhält:

$$3x^2 + 2 \cdot 16,667x - y^2 + 66,67 = 0$$

Das ist die Gleichung für die WOK. Verlangt man schließlich noch (Betragsoptimum!):

„RE“ = „IM“, entsprechend  $x = y$ , so erhält man:  $2x^2 + 2 \cdot 16,667x + 66,67 = 0$ .

Damit liegt das dominierende Polpaar exakt bei  $s_\infty = 2,325 \pm j \cdot 2,325$ .

Wir hatten im Rahmen der Ablesegenauigkeit bisher festgestellt:  $s_\infty = 2,4 \pm j \cdot 2,4$ .

Die Berechnung der exakten Werte von K und  $K_p$  bleibt dem Leser überlassen.



### 3.8.5 Vorgabe von Dominanzgebieten

Bisher hatten wir uns mit der Vorgabe einer Polverteilung für Regelsysteme begnügt, bei denen die Führungsübertragungsfunktion stets ein dominierendes Polpaar aufwies. Für dieses sollte gelten „Realteil“ = „Imaginärteil“. Dazu gehört eine Sprungantwort mit einem Überschwingfaktor von ca. 4%.

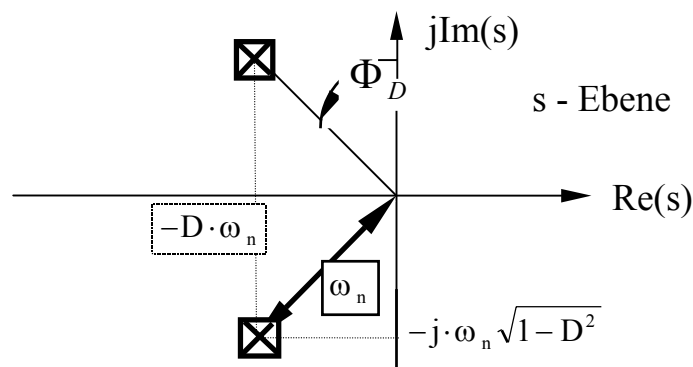
Diese Vorgehensweise soll etwas erweitert werden. Im Vorgriff auf das 6. Kapitel betrachten wir ein schwingungsfähiges PT2-Glied. Damit ist ein Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot D \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}; \quad 0 \leq |D| < 1 \quad (*)$$

gemeint.

Bezeichnung : „D“ - Dämpfungsfaktor, „ $\omega_n$ “ - Kreisfrequenz des ungedämpften Systems.

Die Pole von obigem G(s) liegen (vgl. Skizze) bei  $s_{\infty 1,2} = -D \cdot \omega_n \pm j \cdot \omega_n \sqrt{1 - D^2}$

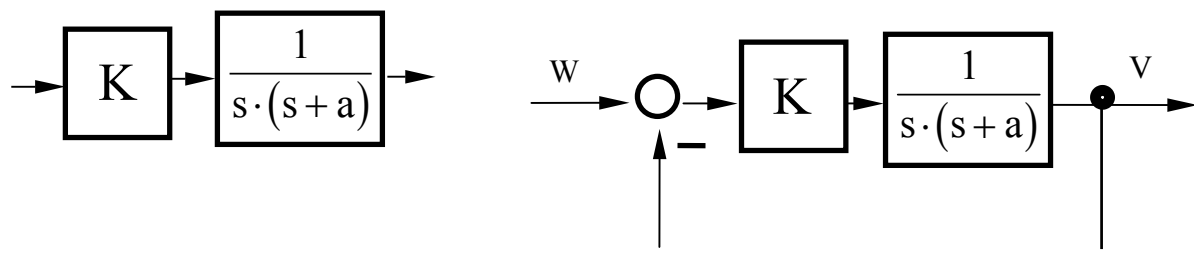


**Bild 3.25:** Skizze zur Polstellenverteilung eines schwingungsfähigen PT2-Gliedes.

Man liest sofort ab:  $\sin(\Phi_D) = D$ . Man nennt „ $\Phi_D$ “ - den Dämpfungswinkel.

$\omega_n$  ist - geometrisch interpretiert- der radiale Abstand eines Poles vom Ursprung.

Auch offene Regelschleifen (obwohl selber keine schwingungsfähigen PT2-Glieder) verhalten sich manchmal nach Rückkopplung, als Regelsystem, wie schwingungsfähige PT2-Glieder. Betrachten wir die nachfolgenden Anordnungen:



offenen Schleife ...

... nach Rückkopplung

Nach Rückkopplung haben wir:  $G_w(s) = \frac{K}{s^2 + as + K} = \frac{K}{s^2 + 2 \cdot \left(\frac{a}{2 \cdot \sqrt{K}}\right) \cdot \sqrt{K} \cdot s + K}$

und mit den Abkürzungen  $\sqrt{K} \rightarrow \omega_n$ ;  $\left(\frac{a}{2 \cdot \sqrt{K}}\right) \rightarrow D$  erhält man die obige Form (\*) der Führungsübertragungsfunktion.

Die zugehörige Sprungantwort lautet sodann:

$$h(t) = \left[ 1 - \frac{e^{-D \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \cos\left(\omega_n \sqrt{1 - D^2} \cdot t - \arcsin(D)\right) \right] \cdot \sigma(t) \quad (3.3)$$

Man nennt

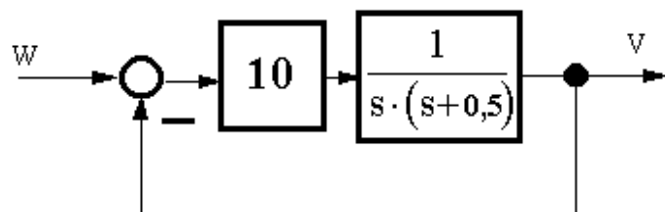
$$\frac{1}{D \cdot \omega_n} =: \tau_{ab} \quad \text{die \underline{Abklingzeitkonstante}} \quad \text{und}$$

$$\frac{h_p - h(\infty)}{h(\infty)} =: \ddot{u}; \quad (h_p - \text{Spitzenwert bzw. "Peakwert"}) - \text{den \underline{Überschwingfaktor}}$$

Die Kenngrößen „ $\ddot{u}$ “ und „ $\tau_{ab}$ “ lassen sich sowohl im Zeitverlauf der Sprungantwort als auch im PN-Plan von  $G_w(s)$  identifizieren und werden dadurch zu sinnvollen Kenngrößen bei der Reglersynthese nach dem WOK-Verfahren.

Wir werden später zeigen (Kap.6), daß gilt:  $D = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ln(\ddot{u})}\right)^2}} \quad (3.4)$

Betrachten wir nun ein Beispiel 1:



Die Führungsübertragungsfunktion lautet in diesem Fall:

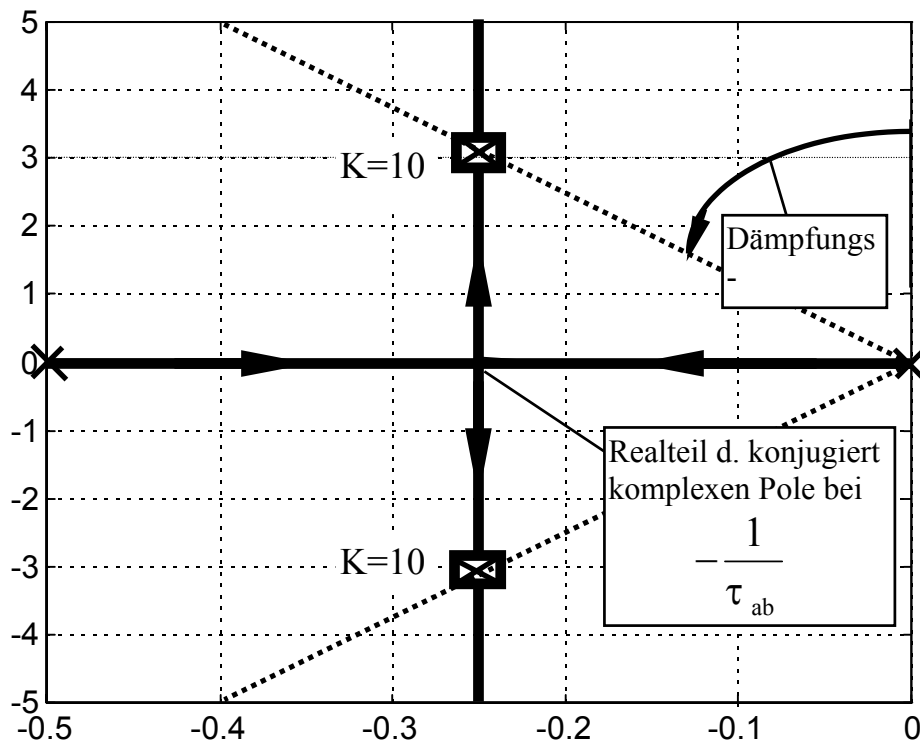
$$G_w(s) = \frac{10}{s^2 + 0,5 \cdot s + 10} = \frac{(\sqrt{10})^2}{s^2 + 2 \cdot \left(\frac{0,5}{2\sqrt{10}}\right) \cdot \sqrt{10} \cdot s + (\sqrt{10})^2} ;$$

$$\rightarrow \omega_n = \sqrt{10}$$

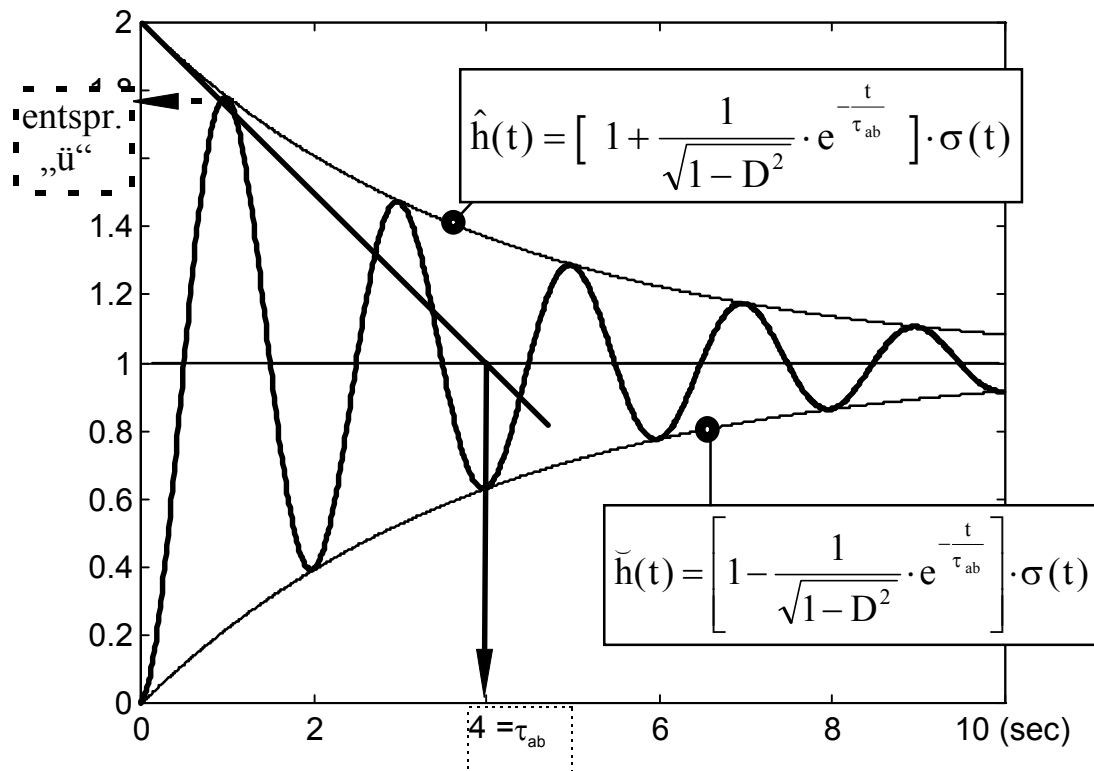
$$\rightarrow D = \frac{0,5}{2\sqrt{10}} = 0,079 ;$$

$$\rightarrow \tau_{ab} = \frac{1}{D \cdot \omega_n} = 4 \text{ (sec)}$$

Darstellung der WOK:



Während man den Realteil der konjugiert komplexen Pole von  $G_w$  sofort mit  $-\frac{1}{\tau_{ab}}$  identifiziert, rechnet man nach, daß wie behauptet gilt:  $\sin \Phi = D$ .

Darstellung der Sprungantwort zu  $G_w(s)$ :

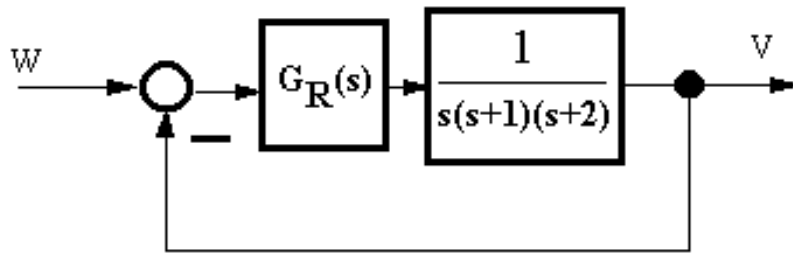
Die Abklingzeitkonstante (bzw. der Realteil) des konjugiert komplexen Polpaares ist also ein Maß dafür, wie schnell sich die Einhüllende der Sprungantwort gegen den Endwert „einschnürt“.

Aus dem Winkel  $\Phi$  eines Strahles vom Koordinatenursprung gegen das Polpaar haben wir  $D$  und daraus die Überschwingweite abgeleitet.  $\Phi_D$  ist also ein Maß dafür, wie stark die Sprungantwort überschwingt.

Beide Kenngrößen kann man sowohl im Zeitbereich ( für  $h(t)$  ) als auch in der WOK feststellen.

Das nachfolgende Rechenbeispiel soll uns zeigen, daß wir nun schon ganz professionell einen Regler synthetisieren können.

Beispiel 2: Vorgelegt ist eine Regelstrecke entsprechend nachstehender Skizze.



Geben Sie den Regler so an, daß für die Führungssprungantwort des Regelsystems gilt:

- $\ddot{u} = 0,20$
- $\tau_{ab} = 1,8 \text{ sec}$

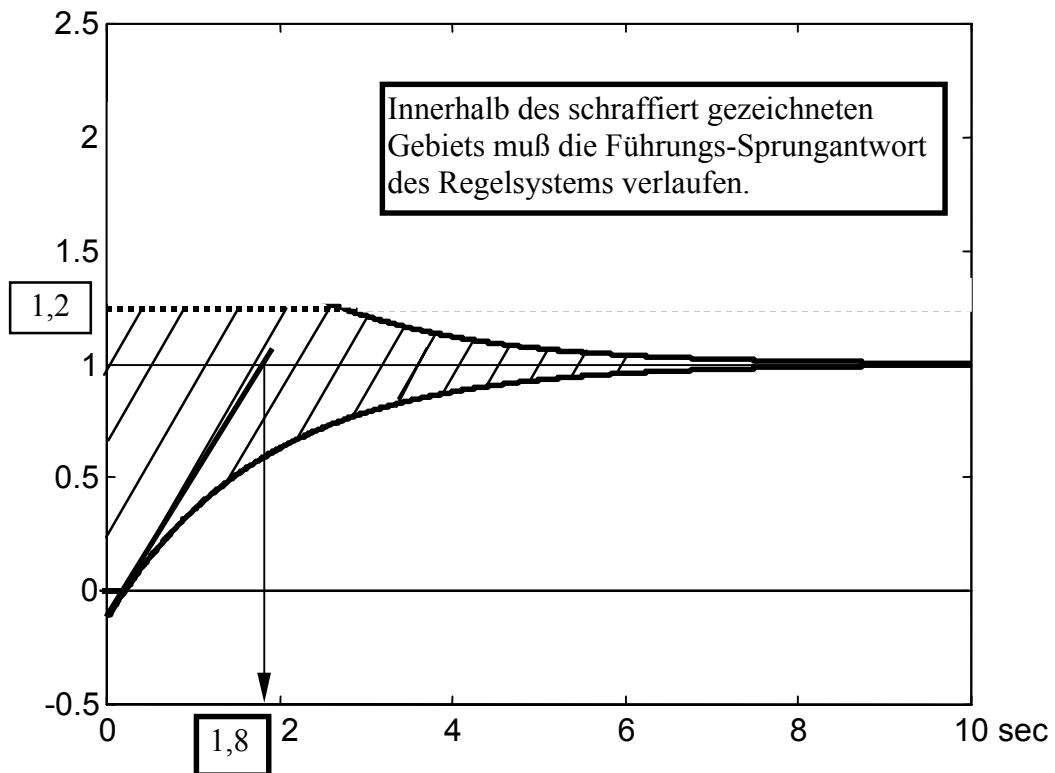
Lösung: Die beiden Vorgaben im Zeitbereich an  $h(t)$  der Führungsübertragungsfunktion

$\tau_{ab} = 1,8 \text{ sec}$  und  $\ddot{u} = 0,2$  definieren zusammen mit  $D$  (aus  $\ddot{u}$  abgeleitet

nach der Formel (3.4) 
$$D = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi}{\ln(\ddot{u})} \right)^2}} = 0.456$$

für  $h(t)$  ein Gebiet innerhalb dessen die Sprungantwort des Regelsystems verlaufen muß.

Es sieht folgendermaßen aus:

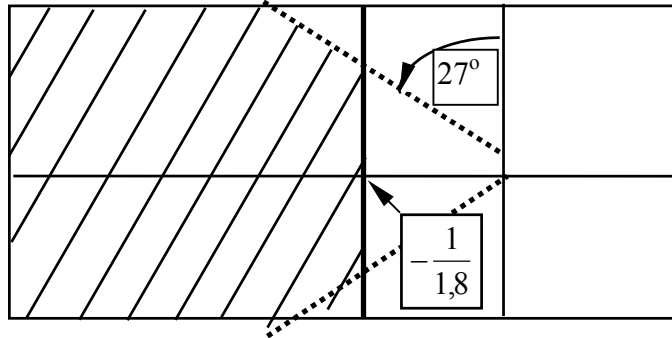


Diese beiden Vorgaben  $\ddot{u}$  und  $\tau_{ab}$  lassen sich auch in den Bildbereich der Laplacetransformation übertragen und bilden so die Vorgaben für einen Regelerentwurf mit Hilfe von WOK's.

$$\tau_{ab} = 1,8 \text{ sec und } D = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi}{\ln(\ddot{u})} \right)^2}} = 0.456 \rightarrow \Phi_D = \arcsin(0,456) = 27^\circ$$

definieren uns im PN-Plan ein Dominanzgebiet

(vgl. Skizze):



Innerhalb des schraffiert gezeichneten Gebietes der s-Ebene muß ein dominierendes Polpaar von  $G_w(s)$  liegen.

Hier sollte man verschiedene WOK's durchprobieren. Klar ist, daß ein P-Regler nicht in Frage kommt. Wir brauchen Nullstellen, um die WOK nach „links“ zu ziehen. Schauen wir uns das MATLAB-Programmlisting und die davon gezeichneten WOK's an.

```
% Wurzelortskurvenberechnung für das Beispiel 2
% von Kapitel 3.8.5 "Vorgabe von Dominanzgebieten"
% Path C:\kap3\K3_51-60\BSP2.M
```

```
% Regelstrecke:
```

```
Zs=[1];
Ns=[1 3 2 0];
```

```
% Regler:
```

```
% Regler 1:
Zr1 = [1 0.5];
Nr1 = [1 6];
```

```
% Regler 2:
Zr2 = [1 0.13];
Nr2 = [1 0.026];
```

```
% Offene Schleife:
Zo1 = conv(Zs,Zr1);
Zo = conv(Zo1,Zr2);
```

```
No1 = conv(Ns,Nr1);
No = conv>No1,Nr2);
```

```
% WOK - zeichnen:
```

```
% Zuerst im Großen...
```

```
rlocus(Zo,No),AXIS('square'),title('WOK zum 2. Beispiel von 3.8.5 im Großen')
pause
clc

% Dann im Kleinen...
rlocus(Zo,No),AXIS([-1. 1. -1. 1.]),title('WOK zum 2. Beispiel von 3.8.5 im Kleinen'),...
grid;
pause
clc

% Übersichtlicher Maßstab...
rlocus(Zo,No),AXIS([-3. 3. -3. 3.]),title('WOK zum 2. Beispiel von 3.8.5'),...
grid;

% Graphik anhalten um die Strahlen gegen die Imag-Achse und die Parallele
% zur Imagachse bei -1/tau_ab zu zeichnen
hold on
z = 0:0.1:3;
% 27° gegen die Imag-Achse sind 63° gegen die Re-Achse; tan(63°)=2.356
x = -z;
Phi = 2.356*x;
y1 = Phi;
y2 = -Phi;
plot(x,y1,x,y2)
%
tau_ab = 4. % sec

for I = 1:31
    parall(I) = -1/tau_ab;
end

plot(parall,y1,parall,y2)
pause

hold off
clc

K_aktuell= 26.31;

% Rückkopplung berechnen:
% CLOOP steht für closed loop. "-1" für Gegenkopplung

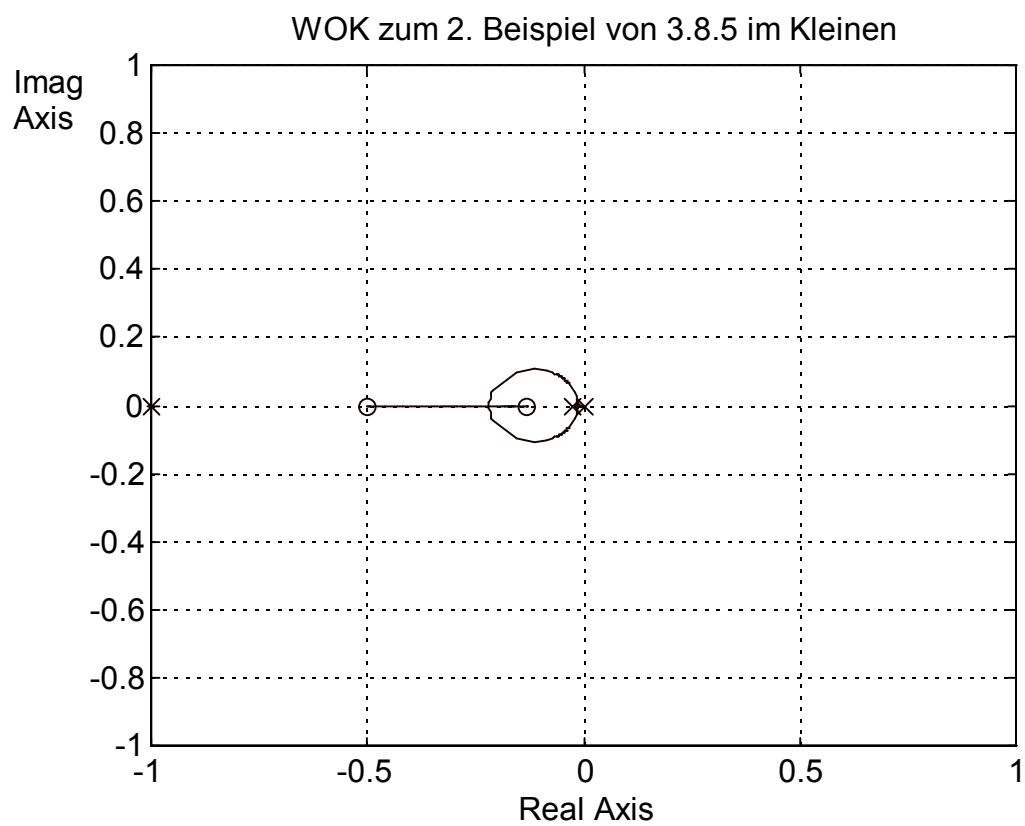
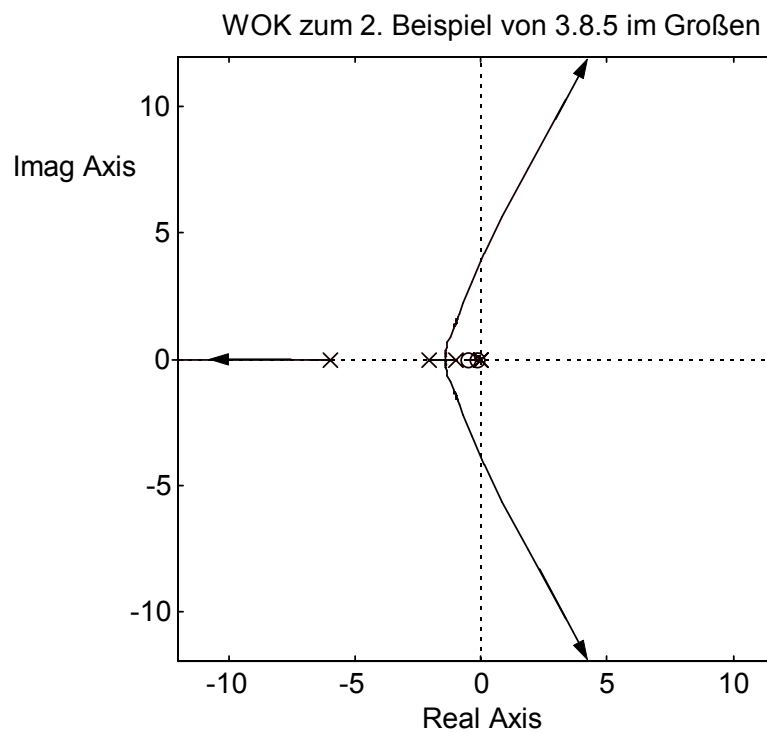
[Zw,Nw] = CLOOP(K_aktuell*Zo,No,-1);

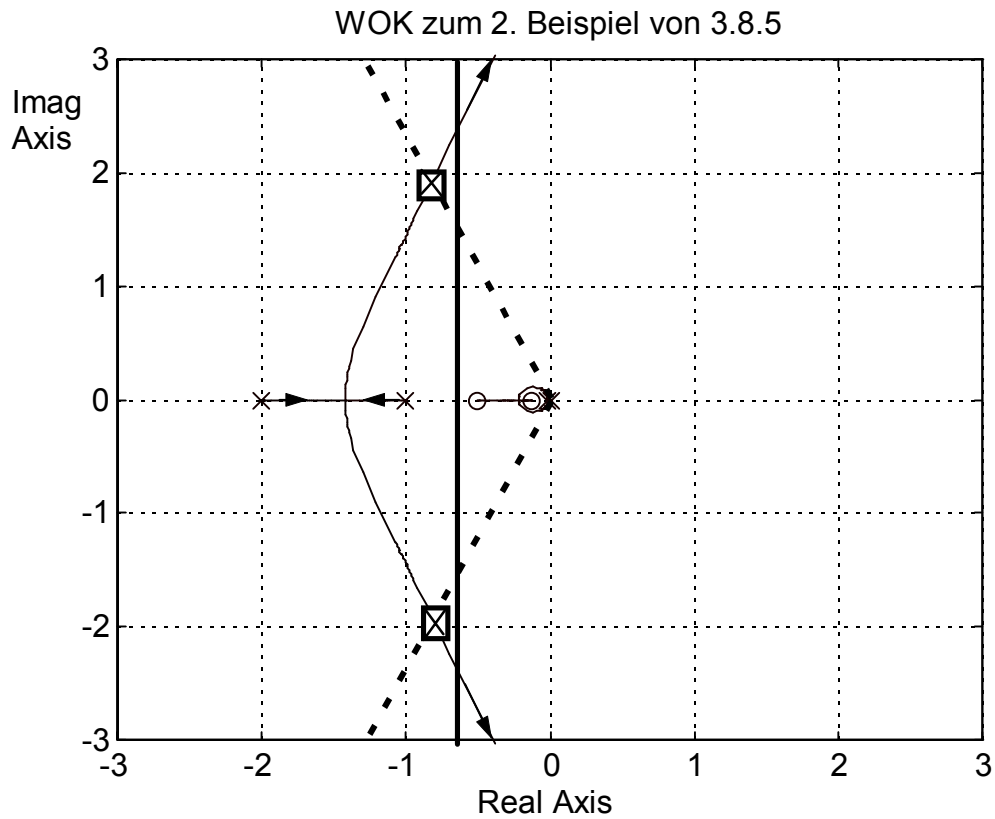
% Führungssprungantwort des Regelsystems
t=0:0.01:10;
plot(t,step(Zw,Nw,t)),title('Sprungantwort zur Regelsystem nach Beispiel 2'),...
xlabel('Zeit in sec'),grid;
clc
```



```
% Nochmals Führungssprungantwort mit Einhüllenden - Test, ob Tau-ab eingehalten wird.  
oben=1+(1/sqrt(1-0.456*0.456))*exp(-t*0.733);  
unten=1-(1/sqrt(1-0.456*0.456))*exp(-t*0.733);  
plot(t,step(Zw,Nw,t),t,oben,t,unten),title('Sprungantwort mit eingezeichneten  
Einhüllenden'),...  
xlabel('Zeit in sec'),grid;  
clc
```

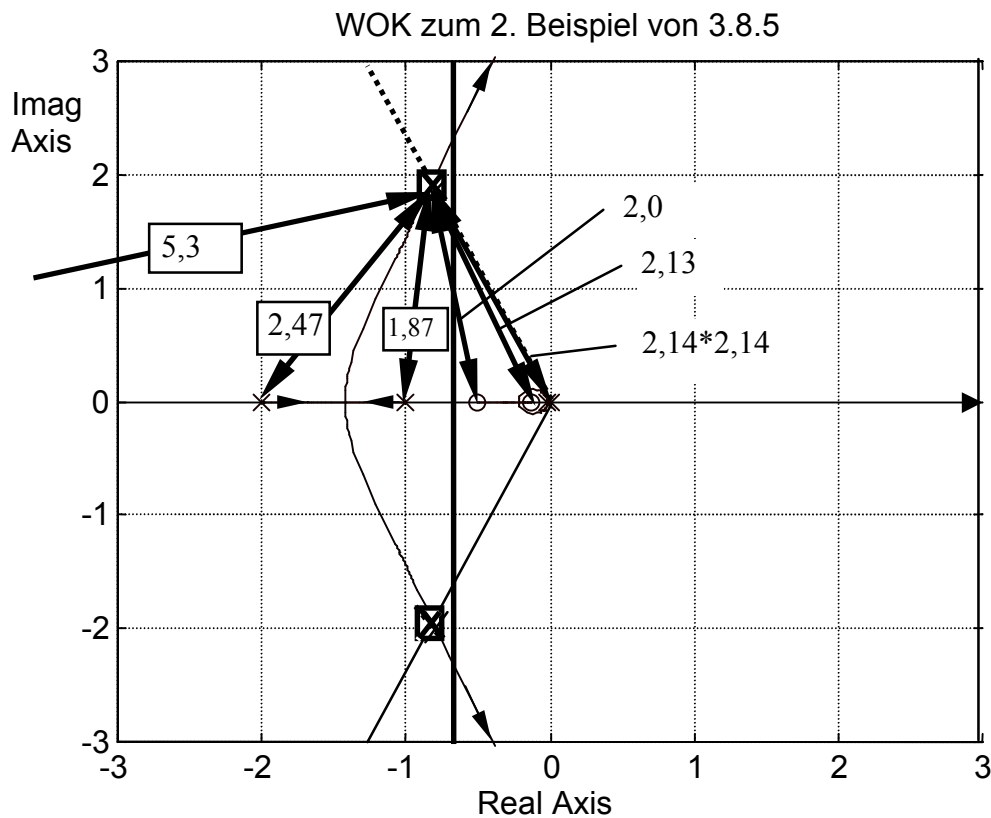
Ergebnisse der Simulation:



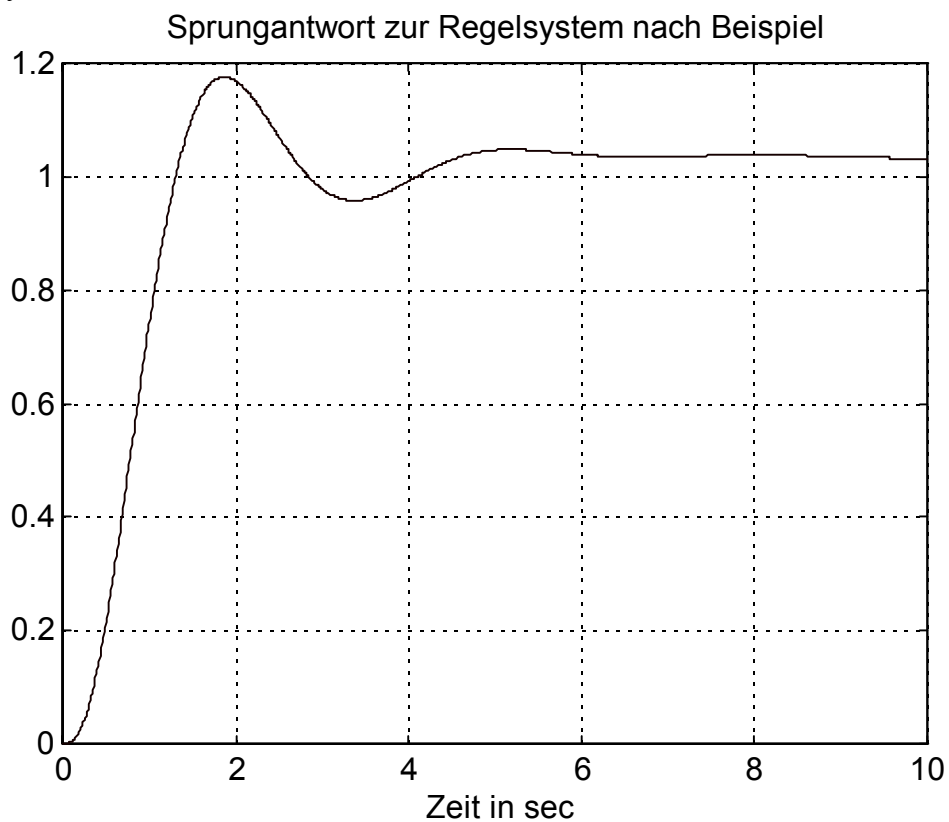


Aus der letzten Zeichnung liest man ab, daß das dominierende Polpaar von  $G_w$  bei ca.  $s_{\infty 1,2} = -0,7337 \pm j1,867$  liegt.

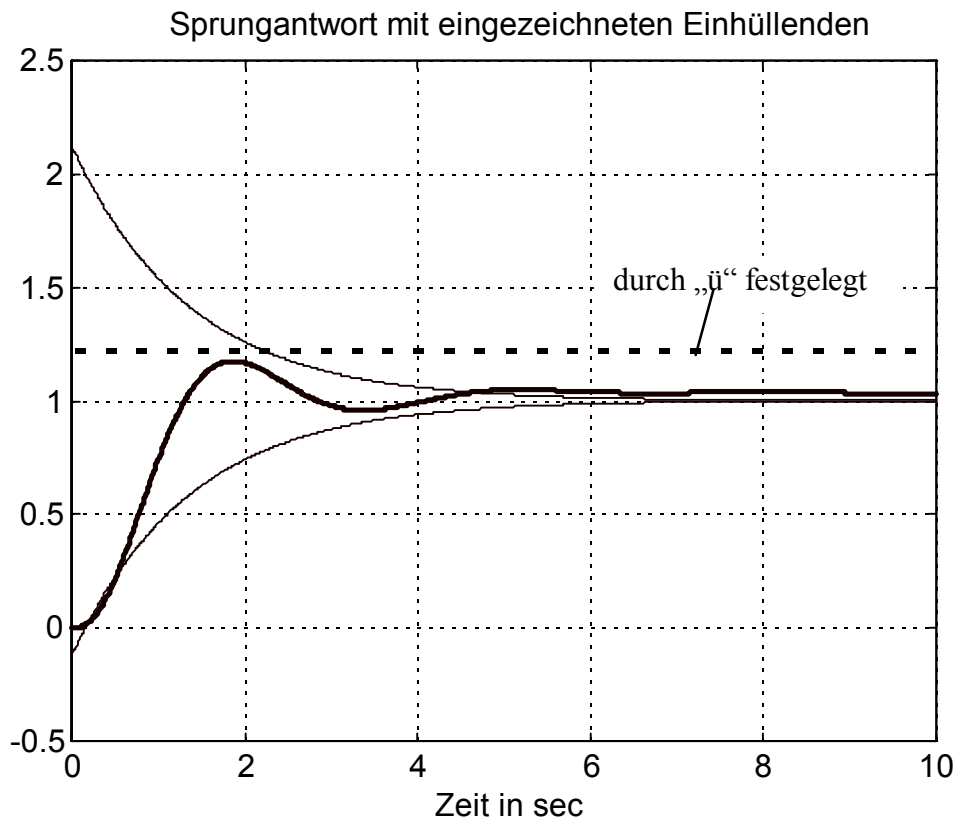
In diese letzte Zeichnung kann man auch die Abstände der Pole und Nullstellen der offenen Schleife zum dominierenden Polpaar ausmessen und  $K$  daraus berechnen:



Aus der WOK mißt man ab:  $K = 26,31$ . Damit erhält man folgende Sprungantwort für das Regelsystem:

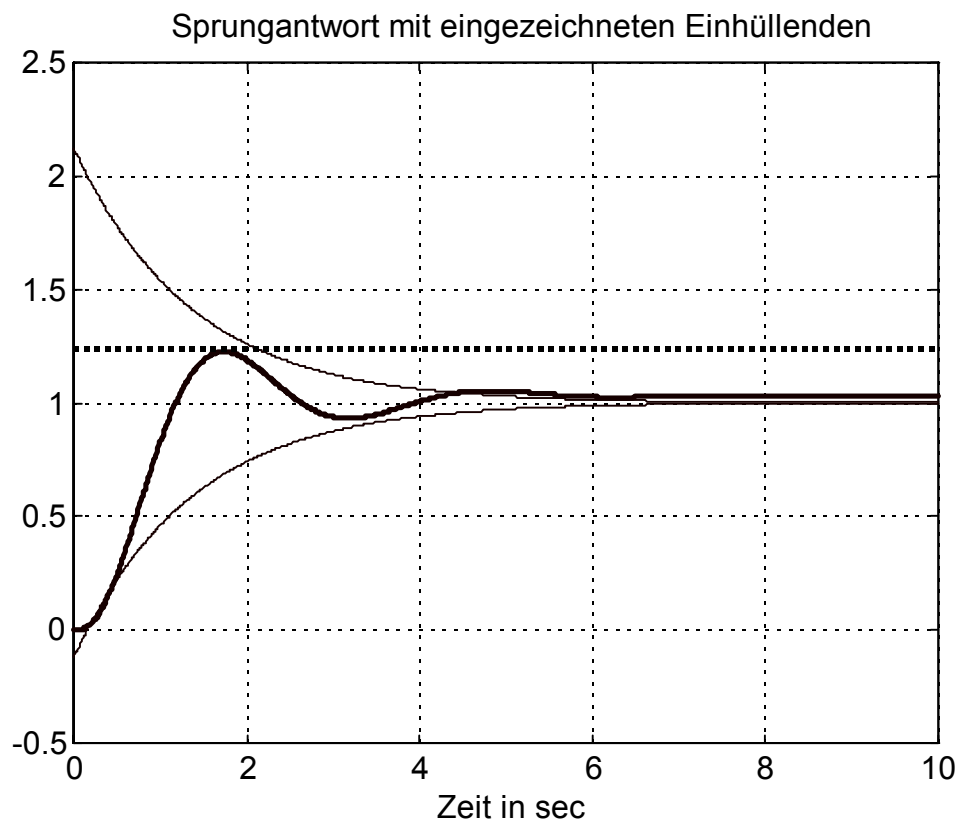


Stimmt neben dem Überswingfaktor (dieser wird gar nicht ganz erreicht) auch die Abklingzeitkonstante ?



Man erkennt, daß der verlangte Überschwingfaktor nicht ganz angenommen wird. Andererseits liegt  $h(t)$  bis ca. 4,5 sec innerhalb der Einhüllenden. Dann allerdings auch wieder außerhalb. Dieser Effekt ist sicher dadurch zu erklären, daß die weiteren Pole und Nullstellen ebenfalls einen Einfluß auf das Zeitverhalten haben; die Formeln für  $\hat{h}$  und  $\check{h}$  wurden ja unter der Annahme abgeleitet, daß nur das dominierende Polpaar vorliegt. Gewitzt durch unser gesamtes WOK-Wissen können wir folgenden Verbesserungsvorschlag machen: Wir erhöhen „K“ von  $K=26,31$  auf sagen wir  $K=30$ . Dann nimmt das Überschwingen etwas zu ( $\rightarrow$ WOK). Andererseits laufen aber die weiteren Pole (diejenigen die nicht zum dominierenden Polpaar gehören) mehr in die Nullstellen ein und verlieren somit an Einfluß auf das gesamte Zeitverhalten ( $\rightarrow$ kleinere Residuen). Das Zeitverhalten müßte sich dann mehr dem (idealen) schwingungsfähigen PT2-Gleid annähern.

In der Tat:



### 3.8.6 Schlußbemerkungen

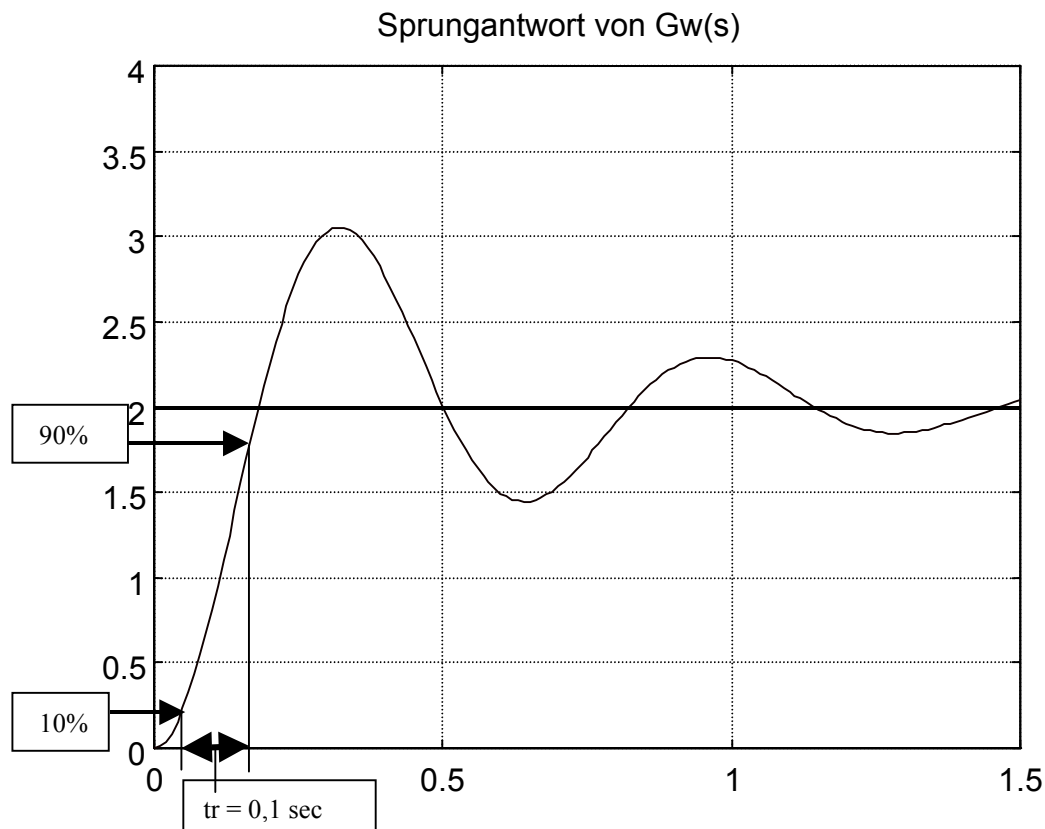
Häufig wird von einem Regelsystem nicht eine bestimmte Abklingzeitkonstante gefordert (so wichtig diese ja für die Handierung mit WOK's wäre), sondern man verlangt, daß eine bestimmte Anstiegszeit  $t_r$  (rise-time) nicht überschritten wird.

Bild 3.25 zeigt noch einmal die Übergangsfunktion eines schwingungsfähigen Systems. Eingezeichnet ist die Anstiegszeit  $t_r$ . Bei der Anstiegszeit handelt es sich um den (aus der VL „Meßtechnik“ bereits bekannten) Wert

$$t_r = t_{90\%} - t_{10\%} \quad (3.5)$$

Weiterhin gilt bekanntlich (VL-Meßtechnik)

$$B \cdot t_r \approx 0,35 \quad \text{bzw.} \quad \omega_B \cdot t_r \approx 2,2 \quad (3.6)$$



**Bild 3.25:** Sprungantwort (Übergangsfkt.) mit eingezeichneter Anstiegszeit (rise-time)

Bei einem Reglerentwurf mit Hilfe des WOK-Verfahrens erweist es sich als günstig, wenn

folgende Anforderungen gestellt werden:

Stationärer Regelfehler $e_{i\infty}$
Überschwingfaktor $\ddot{u}$
Abklingzeitkonstante $\tau_{ab}$

(3.7)

Es gibt weitere Reglerentwürfe ( z.B. mit Hilfe des noch zu besprechenden Frequenzkennlinienverfahrens ), da lauten die Anforderungen hingegen:

Stationärer Regelfehler $e_{i\infty}$
Überschwingfaktor $\ddot{u}$
Anstiegszeit $t_r$ (rise-time)

(3.8)

Der „Kunde“ fragt ja nicht, welches Verfahren der Ingenieur anwendet. Sowohl die Spezifikationen (3.7) als auch (3.8) können gestellt werden. Wie rechnet sich also  $\tau_{ab}$  in  $t_r$  um und umgekehrt ?

Für den Fall, daß das (rückgekoppelte) Regelsystem durch

$$G_W(s) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2D \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

beschrieben wird, kann dieser Zusammenhang mit brauchbarer Näherung und vertretbarem Aufwand hergestellt werden.

Für die Bestimmung des Zusammenhangs  $\tau_{ab} \Leftrightarrow t_r$  beginnen wir mit dem Zusammenhang

zwischen  $\omega_n$  und  $\omega_b$  – der Bandbreitenkreisfrequenz von  $G_W$ : Aus  $\left| \frac{G_W(j\omega_b)}{G_W(j0)} \right|^2 = \frac{1}{2}$  (3.9)

folgt durch formales Nachrechnen:  $\left| \frac{\omega_b}{\omega_n} \right|^2 = 1 - 2D^2 + \sqrt{(1 - 2D^2)^2 + 1}$  (3.10)

Nunmehr kann man wie folgt vorgehen:

- Entweder aus „ $\ddot{u}$ “  $\Rightarrow$  D - berechnen  
 aus „ $t_r$ “  $\Rightarrow$   $\omega_b$  -berechnen } mit (3.10)  $\omega_n$  berechnen.
- Oder aus „ $\ddot{u}$ “  $\Rightarrow$  D - berechnen  
 aus „ $\tau_{ab}$ “ und D  $\Rightarrow$   $\omega_n$  – berechnen } mit (3.10)  $\omega_B$  und dann  $t_r$  berechnen



Die soeben beschriebene Vorgehensweise kann auch dann noch angewendet werden, wenn das ( rückgekoppelte ) Regelsystem zwar „komplizierter“ als ein schwingungsfähiges PT2-Glied ist (  $G_W(s)$  „komplizierter“ als  $G_W(s) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2D \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$  ) sich aber näherungsweise wie ein solches PT2-Glied verhält.

Zu diesen Vorgehensweisen zwei kurze Rechenbeispiele:

- a) Gefordert sind: Stationärer Regelfehler  $e_{1\infty} \leq 0,02$   
 Überschwingfaktor  $\ddot{u} = 0,08$   
 Abklingzeitkonstante  $\tau_{ab} = 0,1 \text{ sec}$   
 Gesucht ist  $t_r$ .

**Lösung: Mittels Formel (3.4) berechnet sich aus  $\ddot{u} = 0,08$  ein  $D = 0,626$ . Wegen**

**$D\omega_n = 1/\tau_{ab}$  ergibt sich ein  $\omega_n = 15,97$ . Aus  $\omega_n$  berechnet sich mittels Formel (3.10)**

**ein  $\omega_B = 17,78$ . Aus der Fausformel  $\omega_B \cdot t_r \approx 2,2$  folgt schließlich  $t_r \approx 0,123 \text{ sec}$ .**

- b) Gefordert sind: Stationärer Regelfehler  $e_{1\infty} \leq 0,02$   
 Überschwingfaktor  $\ddot{u} = 0,08$   
 Abklingzeitkonstante  $t_r = 0,01 \text{ sec}$   
 Gesucht ist  $t_r$ .

**Lösung: Mittels Formel (3.4) berechnet sich aus  $\ddot{u} = 0,08$  ein  $D = 0,626$ . Wegen**

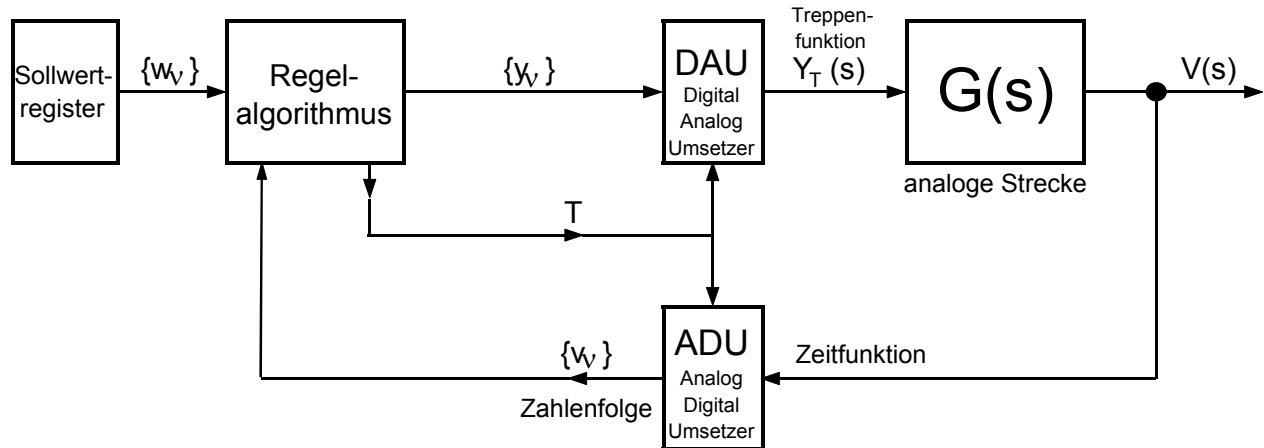
**$\omega_B t_r \approx 2,2$  ergibt sich ein  $\omega_B = 220$ . Aus  $\omega_B$  und  $D$  berechnet sich mittels Formel (3.10)**

**ein  $\omega_n = 197,6 \text{ Hz}$ . Aus der Fausformel  $\omega_n \cdot D = \frac{1}{\tau_{ab}}$  folgt schließlich  $\tau_{ab} = 0,008 \text{ sec}$ .**

## 4. Zeitdiskrete Regelungen (Digitalregelungen)

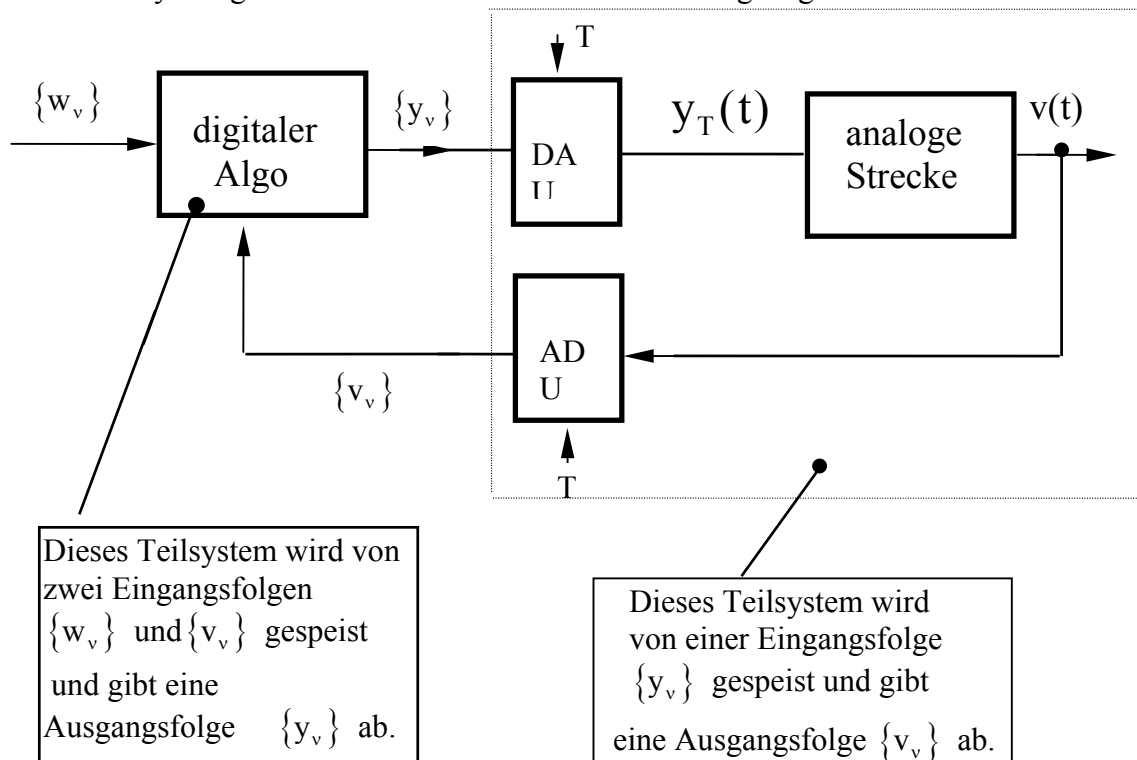
„Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen“ (I.Kant)

### 4.1. Aufgabenstellung

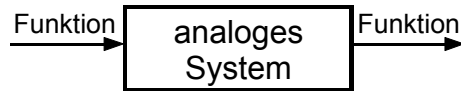


**Bild 4.1:** Grundstruktur eines digitalen Regelsystems

Während bisher bei analogen Regelsystemen - insbesondere bei analogen Regelstrecken - die Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen Zeitfunktionen waren, treten nunmehr Eingangs- und Ausgangsfolgen auf. Ausgehend von Bild 4.1 erkennt man dies, wenn man etwas vereinfacht, die einzelnen Systemgrenzen anders zieht und die Takteitung weglässt:

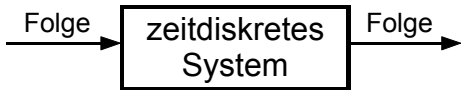


**Bild 4.2:** Digitales Regelsystem mit Hervorhebung von Ein und Ausgangsfolgen. Hier sei noch einmal an mathematische Grundlagen erinnert:



Mathematische Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Ein- und Ausgangsfunktionen durch:

- Differentialgleichungen;
- L - Transformation;
- Faltungsintegrale



Mathematische Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Ein- und Ausgangsfolgen durch:

- Differenzgleichungen;
- z - Transformation;
- Faltungssummen

Eine ergänzende Anmerkung zu Differenzgleichungen und Differentialgleichungen :

Während man bei Differentialgleichungen die Lösungsfunktion bestimmen will, sucht man bei Differenzgleichungen nach Lösungsfolgen. Die Vorgehensweisen bei der Bestimmung der Lösungen sind einander sehr ähnlich. ( z.B. Ansatzfunktionen  $e^{\lambda t} \leftrightarrow$  Ansatzfolgen  $\lambda^k$  )

Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen, besteht kein Unterschied zwischen Folgen und Funktionen:

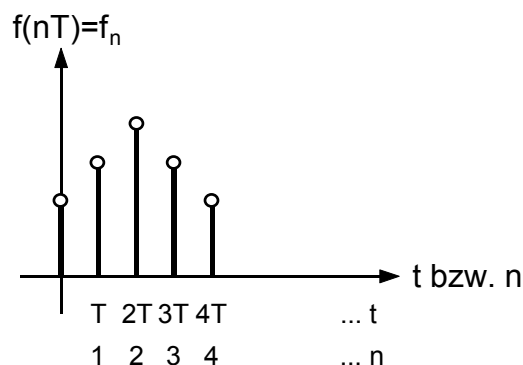
$$\begin{aligned} \text{Funktionen: } & \begin{cases} D \rightarrow W & (\text{z.B.: } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+) \\ x \mapsto y = f(x) & (\text{z.B.: } x \mapsto y = x^2) \end{cases} \\ \text{Folgen: } & \begin{cases} D = \mathbb{N}_0 \rightarrow W \\ n \mapsto y_n = f(n) & (\text{z.B.: } n \mapsto y_n = n^2) \end{cases} \end{aligned}$$



Folgen sind also Funktionen deren Definitionsbereich die natürlichen Zahlen (einschließlich der Null; Abk.:  $\mathbb{N}_0$ ) sind.

Man bezeichnet mit  $\{f_n\}$  - eine Zahlenfolge und mit  $f_n = f(nT)$  - einen (einzelnen) Folgenwert.

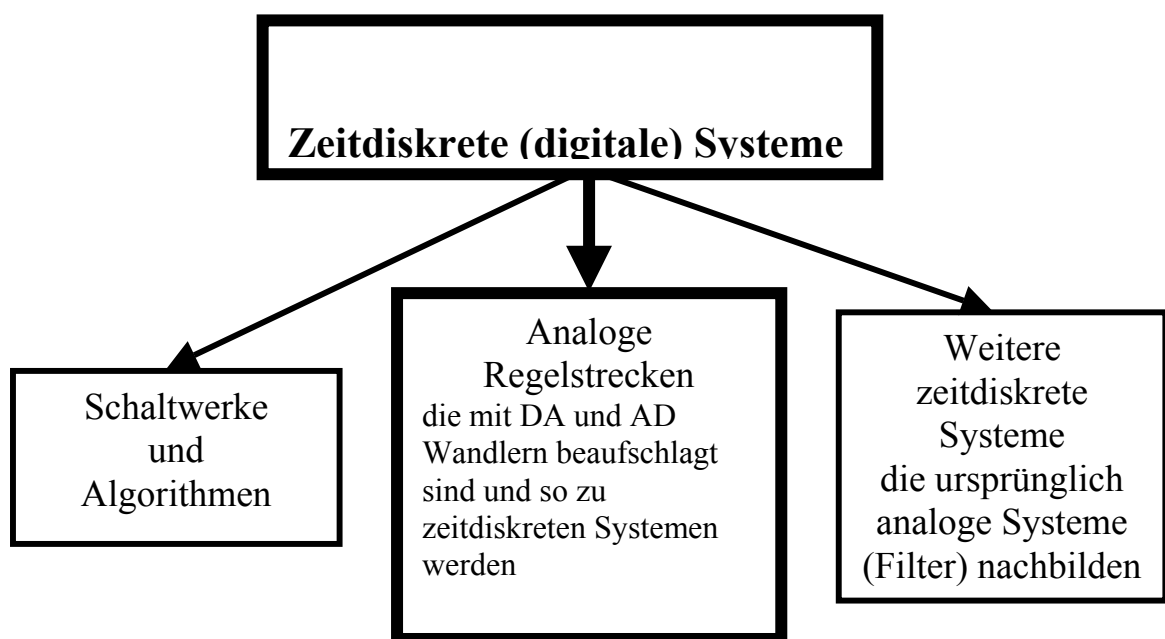
Bei zeitdiskreten Systemen ergeben sich die abhängigen Variablen häufig durch Abtastung der ursprünglich kontinuierlichen Signale. Das gibt zu der folgenden Darstellung Anlaß:



## 4.2 Beispiele für zeitdiskrete Systeme und deren mathematische Beschreibung

Es gibt zeitdiskrete Systeme die gewissermaßen „von Hause aus“ zeitdiskret sind (Schaltwerke, Algorithmen). Und es gibt zeitdiskrete Systeme die aus analogen Systemen entstehen, wenn man diese mit DA und AD-Wandlern beaufschlagt. ( Damit müssen wir uns vom Standpunkt der Regelungstechnik aus beschäftigen; vgl. auch Bild 4.2 ). Eine weitere Klasse von zeitdiskreten Systemen sind digitale Filter und digitale Regler die man durch (eine mehr oder weniger genaue ) digitale Nachbildung aus ursprünglich analogen Filtern bzw. analogen Reglern gewonnen hat.

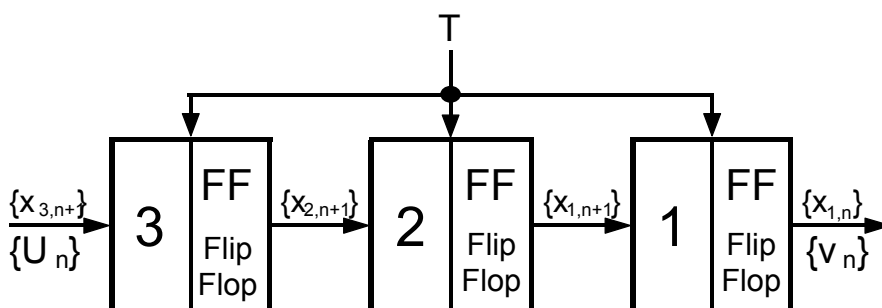
In jedem Fall läßt sich von allen diesen zeitdiskreten Systemen (wie immer sie auch gewonnen wurden) eine Differenzgleichung angeben. Dies soll jetzt detailliert betrachtet werden. Und zwar für



Der stark hervorgehobene Typ von zeitdiskreten Systemen ist, wie schon gesagt, der für uns interessante Fall. Er führt zu zeitdiskreten Regelsystemen (digitalen Regelsystemen) mit denen wir uns hier beschäftigen wollen. Wir beginnen aber, der Vollständigkeit halber, mit Schaltwerken und Algorithmen.

### 4.2.1 Schaltwerke und Algorithmen

Als Beispiel für ein Schaltwerk gelte das nachstehende Schieberegister:



Für Flip Flop 1 gilt, daß der Zustand an seinem Eingang um einen Takt  $T$  später, also zum Zeitpunkt  $(n+1) T$  an seinem Ausgang erscheint. Der Eingang von FF1 ist der augenblickliche Zustand von FF2. Schreibweise:

$$x_{1,n+1} = x_{2,n}$$

Für das gesamte Schieberegister erhält man sodann die folgenden Differenzengleichungen:

$$x_{1,n+1} = x_{2,n}$$

$$x_{2,n+1} = x_{3,n}$$

$$x_{3,n+1} = u_n$$

$$v_n = x_{1,n}$$

Matrixschreibweise hiervon:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u_n \quad ;$$

$$v_n = (1 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_n$$

Neben diesen obigen diskreten Zustandsmodellen gibt es auch noch die diskreten Ein - Ausgangsmodelle (ebenfalls Differenzengleichungen):

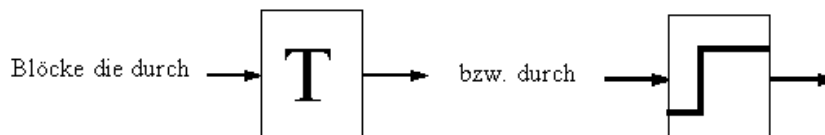
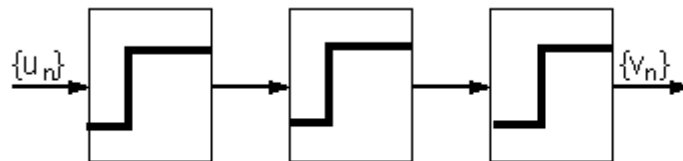
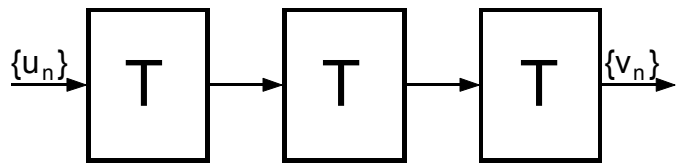
Diese erhält man, wenn man in den Zustandsmodellen die Zustandsvariablen als Zwischengrößen eliminiert:

$$v_{n+3} = u_n$$

bzw. .:

$$v_n = u_{n-3}$$

Vereinfachte Darstellungen zu dem vorgelegten Schieberegister:



gekennzeichnet werden, bezeichnet man auch als „Laufzeitglieder“ oder „Totzeitglieder“.



Ein Einwand aus der Praxis: Das bisher betrachtete Schieberegister bestehe aus D-Flip Flops. Diese arbeiten z.B. mit dem TTL-Pegel.

D.h.: Am Flip Flop-Ausgang können nur zwei verschiedene Werte auftreten (z.B. 0V und 5V). Stillschweigend erwartet man aber,  $u_n, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}$  und  $v_n$  könnten alle möglichen Zahlenwerte darstellen.

Was kann man auf diesen Einwand antworten?

Nach einem Schaltwerk betrachten wir auch noch einen digitalen Filteralgorithmus.

Der eigentliche „Kern“ dieses Filteralgorithmus' ist die Differenzengleichung mit anschließendem (vorangehendem) Umspeichervorgang:

```

/* file rlc_tp.c 04.11.92 */
/* declaration of input / output functions */

float ds2002(long base, long channel);
void ds2101(long base, long channel, float value);

/* declaration of coefficients */

/* dynamic matrix */

float a1_1 = 9.9804187E-01;
float a1_2 = -3.8744045E+01;
float a2_1 = 9.6860112E-05;
float a2_2 = 9.3721372E-01;

/* input matrix */

float b1_1 = 3.9973752E+01;
float b2_1 = 1.9581324E-03;

/* output matrix */

float c1_2 = 1.0000000E+00;

/* direct links */

/* declaration of variables */

/* state variables */

float x1 = 0.0000000E+00;
float x2 = 0.0000000E+00;
float xk1_1 = 0.0000000E+00;
float xk1_2 = 0.0000000E+00;

/* input variables */

float u = 0.0000000E+00;

/* output variables */

float y = 0.0000000E+00;

/* temporary variables */

c_int10()
{
    asm("    trapu    27"); /* call TRACE30 */

    x1 = xk1_1;
    x2 = xk1_2;
    u = ds2002(0x00000020, 0x00000001);
    ds2101(0x00000080, 0x00000001, y);
    xk1_1 =
        a1_1 * x1 +
        a1_2 * x2 +
        b1_1 * u;
    xk1_2 =
        a2_1 * x1 +
        a2_2 * x2 +
        b2_1 * u;
    y =
        c1_2 * x1
}

void init();
void timer1(float time);

main()
{
    init();
    timer1(1.0000000E-04);
    for (;;)
}

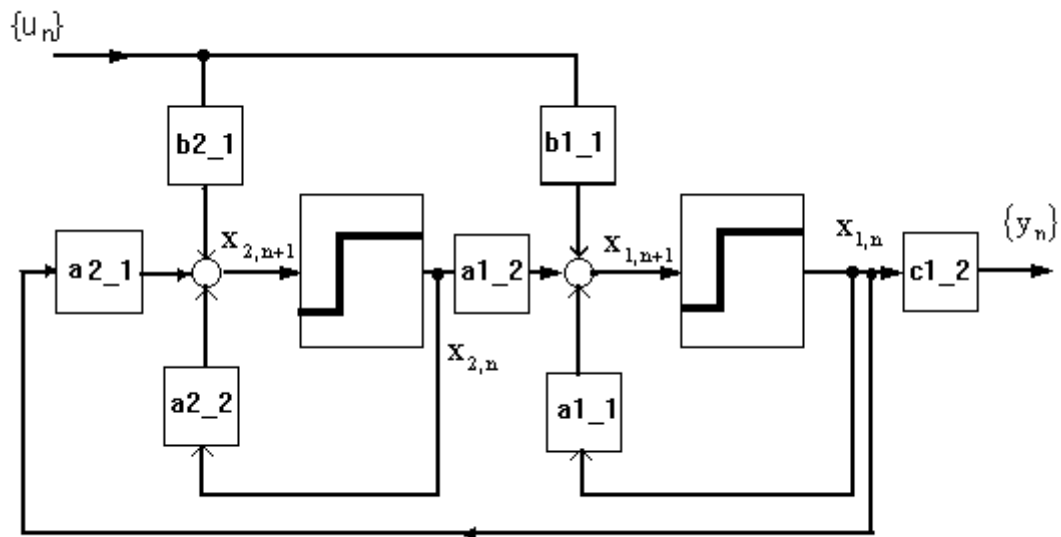
```

Diesen „Kern“

```
(
asm(*   trapu  27);/* call TRACE30 */

x1 = xk1_1;
x2 = xk1_2;
u = ds2002(0x00000020, 0x00000001);
ds2101(0x00000020, 0x00000001, y);
xk1_1 =
  a1_1 * x1 +
  a1_2 * x2 +
  b1_1 * u;
xk1_2 =
  a2_1 * x1 +
  a2_2 * x2 +
  b2_1 * u;
y =
  c1_2 * x1
)
```

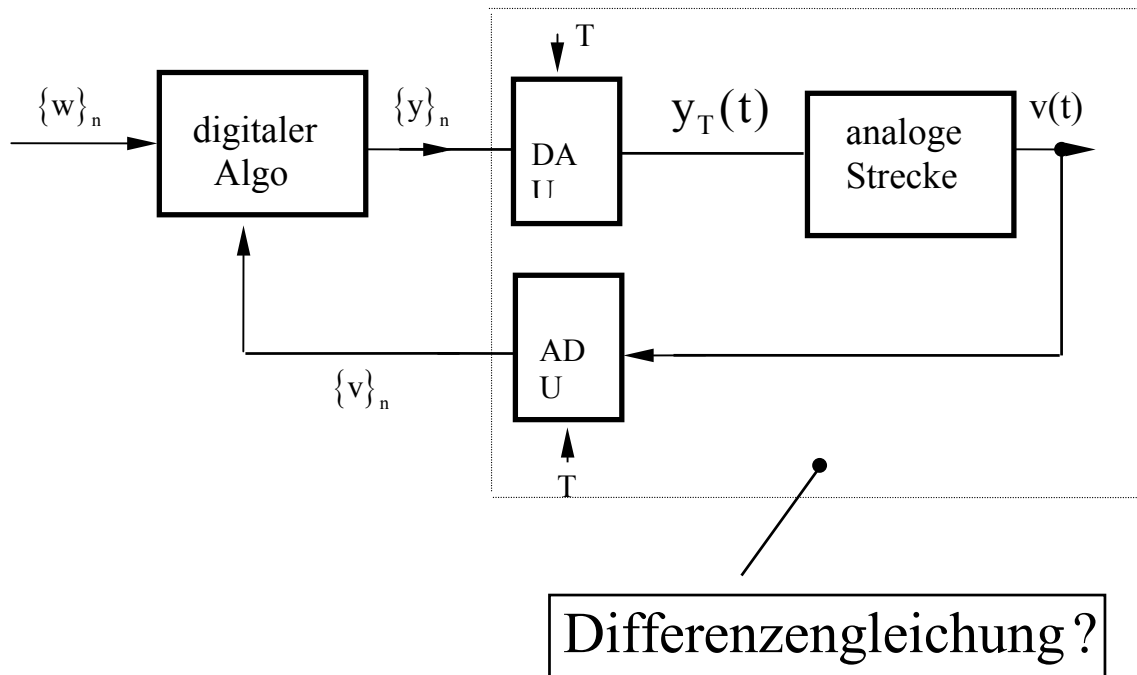
kann man mit Hilfe von Blockstrukturen auch graphisch darstellen:



**Bild 4.3:** Strukturbild zum betrachteten Filteralgorithmus

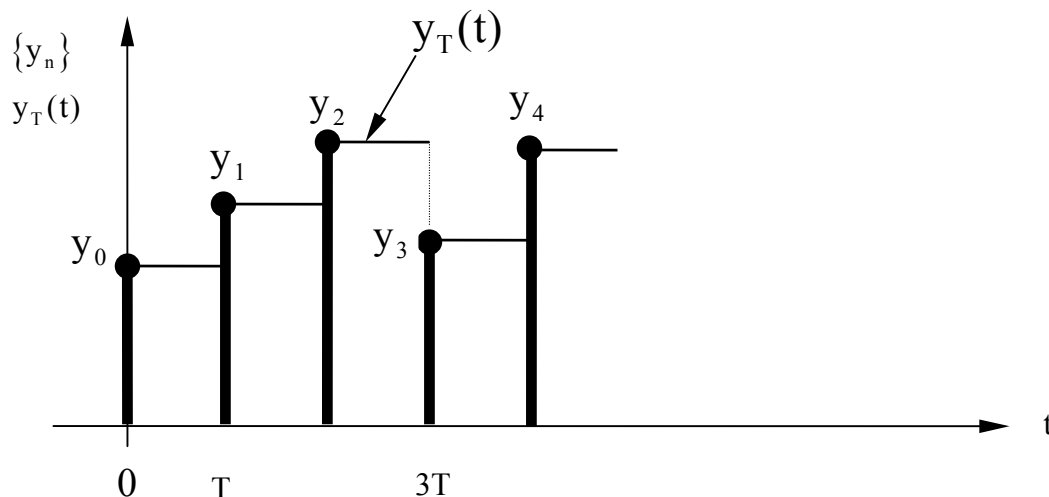
#### 4.2.2 Analoge Regelstrecken die mit AD und DA-Wandlern beaufschlagt sind und so zu zeitdiskreten Systemen werden

Ausgangspunkt sei die bekannte Anordnung:



**Bild 4.4:** Ausgangskonfiguration für die nachfolgenden Berechnungen (vgl. Bild 4.2)

Es soll sich bei  $\{y\}_n$  um eine vom Algo (Prozessor) erzeugte Zahlenfolge und bei  $y_T(t)$  um die dazugehörige Treppenfunktion handeln.  $y_T(t)$  wirkt auf die analoge Regelstrecke. Dies verdeutlicht noch einmal das nachfolgende Bild :



**Bild 4.5:** Verlauf der Stellfolge ( Folgeelemente dick gezeichnet ) und der analogen Treppenfunktion  $y_T(t)$  ( dünn gezeichnet ).



Wir bestimmen nun die Differenzengleichung zu der mit Wandlern beaufschlagten Strecke.

Wie in 2.3 ausgeführt, kann man das analoge, lineare und zeitinvariante Zustandsmodell der Regelstrecke abkürzen als

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_s(t) &= \underline{A} \cdot \underline{x}_s(t) + \underline{b} \cdot y_T(t); & \underline{x}_s(0) &= \underline{x}_0 \\ v(t) &= \underline{c}^T \cdot \underline{x}_s(t) + d \cdot y_T(t)\end{aligned}\quad (4.0)$$

Wir versuchen zunächst  $\underline{x}_s(T)$  vorauszuberechnen wobei wir  $\underline{x}_0$  und den Verlauf von  $y_T(t)$  im Intervall  $0 \leq t < T$  als gegeben annehmen wollen.

Ausgehend von der Taylorschen Formel:

$$\underline{x}_s(T) = \underline{x}_s(0) + \dot{\underline{x}}_s(0)T + \ddot{\underline{x}}_s(0)\frac{T^2}{2!} + \ddot{\underline{x}}_s(0)\frac{T^3}{3!} + \dots$$

erhält man durch fortlaufende Ableitung des obigen (vgl. 4.0) Zustandsmodells:

$$\begin{aligned}\ddot{\underline{x}}_s(t) &= \underline{A} \cdot \dot{\underline{x}}_s(t) + \underline{b} \cdot \dot{y}_T(t) = \underline{A}^2 \cdot \underline{x}_s(t) + \underline{A}\underline{b} \cdot y_T(t) + \underline{b} \cdot \dot{y}_T(t) \\ \dot{\underline{x}}_s(t) &= \underline{A} \cdot \underline{x}_s(t) + \underline{b} \cdot y_T(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\underline{x}}_s(t) &= \underline{A} \cdot \ddot{\underline{x}}_s(t) + \underline{b} \cdot \ddot{y}_T(t) = \underline{A}^3 \cdot \underline{x}_s(t) + \underline{A}^2 \underline{b} \cdot y_T(t) + \underline{A}\underline{b} \cdot \dot{y}_T(t) + \underline{b} \cdot \ddot{y}_T(t) \\ \ddot{\underline{x}}_s(t) &= \underline{A}^2 \cdot \underline{x}_s(t) + \underline{A}\underline{b} \cdot y_T(t) + \underline{b} \cdot \dot{y}_T(t)\end{aligned}$$

usw.

Man beachte, daß auf  $0 \leq t < T$  die Stellgröße konstant ist - also  $y_T(t) = y_0$  - und daß folglich  $\dot{y}_T(t) = 0, \ddot{y}_T(t) = 0, \dots$  gilt. Es verbleibt sodann:

$$\dot{\underline{x}}_s(0) = \underline{A} \cdot \underline{x}_s(0) + \underline{b} \cdot y_0$$

$$\ddot{\underline{x}}_s(0) = \underline{A}^2 \cdot \underline{x}_s(0) + \underline{A}\underline{b} \cdot y_0$$

$$\ddot{\underline{x}}_s(0) = \underline{A}^3 \cdot \underline{x}_s(0) + \underline{A}^2 \underline{b} \cdot y_0 \quad \text{usw.}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Taylorformel ein und berücksichtigt noch, daß auch der Anfangswert  $\underline{x}_s(0) = \underline{x}_0$  gelten soll, dann erhält man:

$$\underline{x}_s(T) = \underline{x}_0 + (\underline{A} \cdot \underline{x}_0 + \underline{b} \cdot y_0)T + \left( \underline{A}^2 \cdot \underline{x}_0 + \underline{A}\underline{b} \cdot y_0 \right) \frac{T^2}{2!} + \left( \underline{A}^3 \cdot \underline{x}_0 + \underline{A}^2 \underline{b} \cdot y_0 \right) \frac{T^3}{3!} + \dots$$

Zusammenfassen und Ausklammern liefert (mit „ $\underline{E}$ “ = Einheitsmatrix):

$$\underline{x}_s(T) = [\underline{E} + \underline{A} T + \frac{\underline{A}^2 T^2}{(2!)} + \frac{\underline{A}^3 T^3}{(3!)} + \dots] \underline{x}_0 + [\underline{E}T + \underline{A} T^2/(2!) + \frac{\underline{A}^2 T^3}{(3!)} + \dots] \underline{b} y_0$$

Mit den Abkürzungen

$$\underline{\Phi}(T) := [\underline{E} + \underline{A} T + \frac{\underline{A}^2 T^2}{(2!)} + \frac{\underline{A}^3 T^3}{(3!)} + \dots] \text{ „Transitionsmatrix“ } \quad (4.1)$$

$$\text{und } \underline{h}(T) := [\underline{E}T + \frac{\underline{A} T^2}{(2!)} + \frac{\underline{A}^2 T^3}{(3!)} + \dots] \cdot \underline{b} = \int_0^T \underline{\Phi}(\tau) \cdot \underline{b} \, d\tau \quad (4.2)$$

$$\text{erhält man schließlich: } \underline{x}_s(T) = \underline{\Phi}(T) \cdot \underline{x}_0 + \underline{h}(T) \cdot y_0 \quad (4.3)$$

Faßt man nunmehr  $\underline{x}_s(T)$  als neuen Anfangszustand und  $y_1$  als neuen Eingangsfolgewert auf, so führt dieselbe Betrachtungsweise wie oben auf

$$\underline{x}_s(2T) = \underline{\Phi}(T) \cdot \underline{x}_s(T) + \underline{h}(T) \cdot y_1$$

In dieser Weise fortfahrend kommt man auf:

$$\underline{x}_s((n+1)T) = \underline{\Phi}(T) \cdot \underline{x}_s(nT) + \underline{h}(T) \cdot y_n$$

Dies wird in einer abkürzenden Notation geschrieben. Zusammen mit der Ausgangsgleichung von (4.0), die sich nicht verändert, erhält man sodann ( mit  $\underline{x}_{s,n} := \underline{x}_s(nT)$  ):

$$\begin{aligned} \underline{x}_{s,n+1} &= \underline{\Phi}(T) \cdot \underline{x}_{s,n} + \underline{h}(T) \cdot y_n; & \underline{x}_{s,n=0} &= \underline{x}_0 \\ \underline{v}_n &= \underline{c}^T \cdot \underline{x}_{s,n} + \underline{d} \cdot y_n & n &\in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Schließlich kann man auch noch den Index „s“ und das Argument „T“ weglassen und erhält:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{n+1} &= \underline{\Phi} \underline{x}_n + \underline{h} y_n \\ \underline{v}_n &= \underline{c}^T \underline{x}_n + \underline{d} \cdot y_n \end{aligned} \quad (4.5)$$

Gleichung (4.5) beschreibt (im Gegensatz zu gewissen Näherungsmethoden die wir noch in 4.2.3 kennenlernen werden) den Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsfolgen für die „abgetastete“ Regelstrecke ( entsprechend Bild 4.4) exakt.

Es soll hier noch einmal auf die Sprache **MATLAB** hingewiesen werden. Die Berechnung von  $\underline{\Phi}$  und  $\underline{h}$  aus der  $\underline{A}$ -Matrix, dem  $\underline{b}$ -Vektor und der Abtastzeit „T“ des analogen Streckenmodells berechnet sich dort mit einer Anweisungszeile: **[Phi,h] = c2d(A,b,T);**



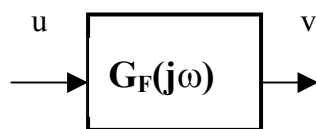
Die Bestimmung eines Zustandsmodells in Form einer Matrix-Differenzengleichung (4.5) aus einem analogen Zustandsmodell der Form (4.0) durch Handrechnung findet sich in Beispiel 4.5.1.

#### 4.2.3 Weitere zeitdiskrete Systeme die ein ursprünglich analoges Filter bzw. einen ursprünglich analogen Regler (mehr oder weniger genau) nachbilden.

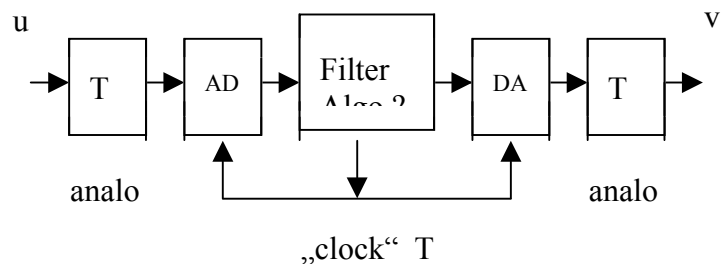
Ein lineares, analoges System sei durch eine Differentialgleichung, durch ein Differentialgleichungssystem oder durch einen Frequenzgang beschrieben. Zu den Differentialgleichungen kommt man, weil entweder eine entsprechende analoge Schaltung bereits vorliegt oder weil ein analoges System ( z.B. Schaltung ) zumindest auf dem Papier berechnet wurde. Zum Frequenzgang entweder durch Rechnung oder Messung. Dieses analoge System soll durch ein digitales „mehr oder weniger gut“ ersetzt werden.

Damit ist folgendes gemeint.

Ein ursprünglich analoges Filter



ist zu ersetzen als digitales Filter



wobei die ursprüngliche, analoge Filterung „möglichst gut“ nachgebildet wird.

Statt des ursprünglich analogen Filters kann auch ein analoger Regler stehen. Aufgaben dieser Art stellen sich in Praxis heute täglich. Die Nachbildung eines analogen durch ein digitales Filter liefert immer nur eine Näherung für das ursprünglich analoge Filter.

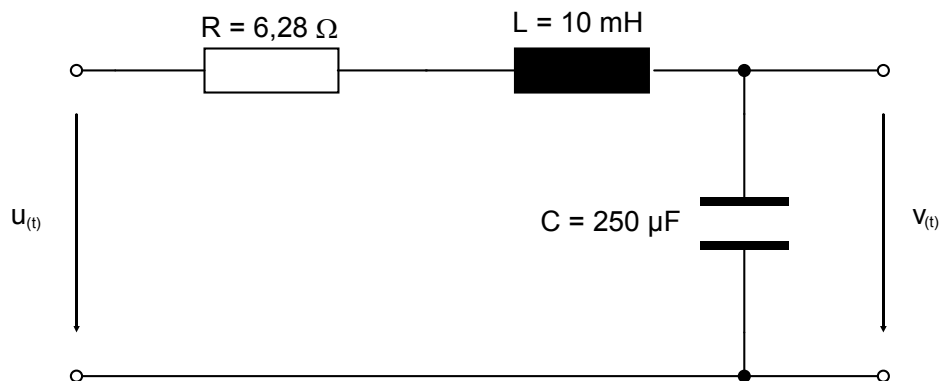
Für ein und dieselbe Filter-Differentialgleichung respektive ein und denselben Filterfrequenzgang gibt es verschiedene Methoden der Diskretisierung. Die sich dadurch ergebenden, zugehörigen Differenzengleichungen unterscheiden sich dementsprechend voneinander. Jede dieser Differenzengleichungen kann algorithmisch auf einem Mikroprozessor bzw. einem DSP abgearbeitet werden.

Von den Methoden der Diskretisierung seien ohne Anspruch auf Vollständigkeit genannt:

- Diskretisierung von Differentialgleichungen höherer ( beliebiger ) Ordnung z.B. mittels Vorwärtsdifferenzen.
- Erzeugung von Differenzengleichungen zufolge der Manipulation von Laplace-Übertragungsfunktionen ( z.B. durch Anwendung der TUSTIN-Transformation ).
- Ausgehend von der analogen Übertragungsfunktion unter Verwendung der Normalformen und des EULERSchen Polygonzugverfahrens. ( Ableitung einer Matrixdifferenzengleichung vom Typ 4.5).
- Ausgehend von der analogen Übertragungsfunktion unter Verwendung der Normalformen und der sprunginvarianten Transformation. ( Ableitung einer Matrixdifferenzengleichung vom Typ 4.5).

Die verschiedenen Methoden der Diskretisierung sollen anhand eines Rechenbeispiels vorgestellt werden.

*„Nur ein mittelmäßiger Mensch ist immer in Hochform“ ( W. S. Maugham )*

Rechenbeispiel: Ein analoges Filter

soll durch ein digitales Filter ersetzt werden. Der Filteralgorithmus ist anzugeben. Abtastzeit  $T=0,1$  Millisekunden (ms).

- Man diskretisiere hierzu eine zugehörige Differentialgleichung 2. Ordnung nach der Methode der Vorwärtsdifferenzen und gebe die zugehörigen Differenzengleichung sowie einen zugehörigen Quellcode an.
- Man bestimme hierzu weitere zugehörige Differenzengleichungen unter Verwendung der TUSTIN-Transformation oder damit verwandter Transformationen.
- Ausgehend von der vorgelegten Übertragungsfunktion gebe man unter Verwendung der Steuerbarkeitsnormalform und des EULER'schen Polygonzugverfahrens eine Matrixdifferenzengleichung an.
- Ausgehend von der vorgelegten Übertragungsfunktion gebe man unter Verwendung der Beobachtbarkeitsnormalform und der sprunginvarianten Transformation sowohl eine Matrixdifferenzengleichung, einen Filteralgorithmus und einen zugehörigen Quellcode an.

Lösung a („Methode der Vorwärtsdifferenzen“):

Die vorgelegte Filterschaltung besitzt die Übertragungsfunktion:

$$G_F(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\vartheta\omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$$

Dabei sind die Kennwerte gegeben mit:  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  und  $\vartheta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$

Es bezeichnet  $G_F(s) = V(s)/U(s)$ . Ausgehend von der vorgelegten Übertragungsfunktion erhält man eine zugehörige Differentialgleichung im Zeitbereich (man erhält diese Differentialgleichung wenn man „kreuzweise“ ausmultipliziert und in den Zeitbereich zurücktransformiert):

$$\ddot{v} + 6,28 \cdot 10^2 \cdot \dot{v} + 4,0 \cdot 10^5 \cdot v = 4,0 \cdot 10^5 \cdot u(t), \quad v(0) = 0, \dot{v}(0) = 0.$$

Bei der Methode der Vorwärtsdifferenzen ersetze man die

1. Ableitung nach der Zeit wie folgt:  $\dot{v}(t) \approx \frac{v((n+1)T) - v(nT)}{T} =: \frac{v_{n+1} - v_n}{T}$

Und für die 2. Ableitung setze man:

$$\ddot{v}(t) \approx \frac{\dot{v}((n+1)T) - \dot{v}(nT)}{T} = \frac{\frac{v_{n+2} - v_{n+1}}{T} - \frac{v_{n+1} - v_n}{T}}{T} = \frac{v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n}{T^2}$$

Analoges gilt für höhere Ableitungen.

Die Näherungsausdrücke für die Zeitableitungen in die Ausgangsdifferentialgleichung eingesetzt liefert:

$$\frac{v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n}{T^2} + 6,28 \cdot 10^2 \cdot \frac{v_{n+1} - v_n}{T} + 4,0 \cdot 10^5 \cdot v_n = 4,0 \cdot 10^5 \cdot u_n$$

Mit  $T^2$  Durchmultiplizieren und Umstellen ergibt:

$$v_{n+2} + (-2 + 6,28 \cdot 10^2 T) \cdot v_{n+1} + (1 - 6,28 \cdot 10^2 T + 4 \cdot 10^5 \cdot T^2) \cdot v_n = 4,0 \cdot 10^5 \cdot T^2 \cdot u_n$$

Um auf eine „standardisierte Form“ zu kommen, führen wir noch eine Indexverschiebung durch:

$$n + 2 = k, \quad \text{bzw.} \quad n = k - 2$$

und erhalten endlich:

$$v_k + (-2 + 6,28 \cdot 10^2 T) \cdot v_{k-1} + (1 - 6,28 \cdot 10^2 T + 4 \cdot 10^5 \cdot T^2) \cdot v_{k-2} = 4,0 \cdot 10^5 \cdot T^2 \cdot u_{k-2}$$

Wir kommen also auf eine Differenzengleichung die bequem zu berechnen ist. Man identifiziere noch:

$$a_1 = (-2 + 6,28 \cdot 10^2 T); \quad a_2 = 1 - 6,28 \cdot 10^2 T + 4 \cdot 10^5 \cdot T^2; \quad b_0 = 4,0 \cdot 10^5 \cdot T^2.$$

und erhält endlich:  $v_k + a_1 \cdot v_{k-1} + a_2 \cdot v_{k-2} = b_0 \cdot u_{k-2}$

$$v_k - 1,9372 \cdot v_{k-1} + 0,9412 \cdot v_{k-2} = 0,004 \cdot u_{k-2}$$

So ein Programm für eine off-line Simulation wird jetzt angegeben. Und zwar für Differenzengleichungen bis zur 50. Ordnung.

Auf der nachstehenden Seite finden Sie allerdings nur den „header“ dieses Programms. Dieses Programm wurde einmal vom Verfasser in der Ihnen unbekannten Sprache FORTRAN geschrieben und später von Herrn Dipl. Ing. Neacsu nach „C“ umgesetzt. Das vollständige Programm im C-Quellcode steht am Ende dieses Punktes 4.2 .

```

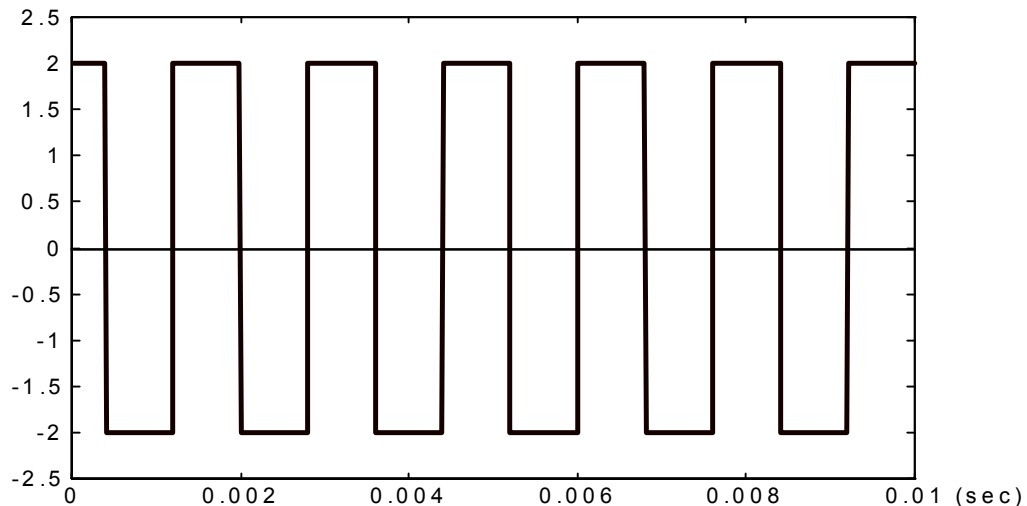
PROGRAM DIFGLN
C
C Programm zur Simulation einer Differenzengleichung.
C
C Es wird folgende Differenzengleichung simuliert:
C
C  $y_k + a_1*y_{k-1} + a_2*y_{k-2} + \dots + a_n*y_{k-n} =$ 
C  $= b_0*u_k + b_1*u_{k-1} + \dots + b_n*u_{k-n}$ 
C
C Im nachfolgenden Programm bedeuten in Bezug auf diese
C Differenzengleichung:
C
C           N = n           Ordnung
C           K = k           laufender Index
C           KEND           Index des letzten
C                           Abtastzeitpunktes
C                           der Berechnung
C
C           Y(0) = yk       und   U(0) = uk
C           Y(1) = yk-1     und   U(1) = uk-1
C           .
C           .
C           Y(N) = yk-n     und   U(N) = uk-n
C
C           A(1) = a1       und   B(0) = b0
C           .               .
C           .               .
C           A(N) = an       und   B(N) = bn
C
C In diesem Programm wird davon ausgegangen, daß die
C Ordnung "n" den Wert 50 nicht überschreitet.
C Die Eingangsfolge wird in der FUNCTION U(K) bereitgestellt.
C

```

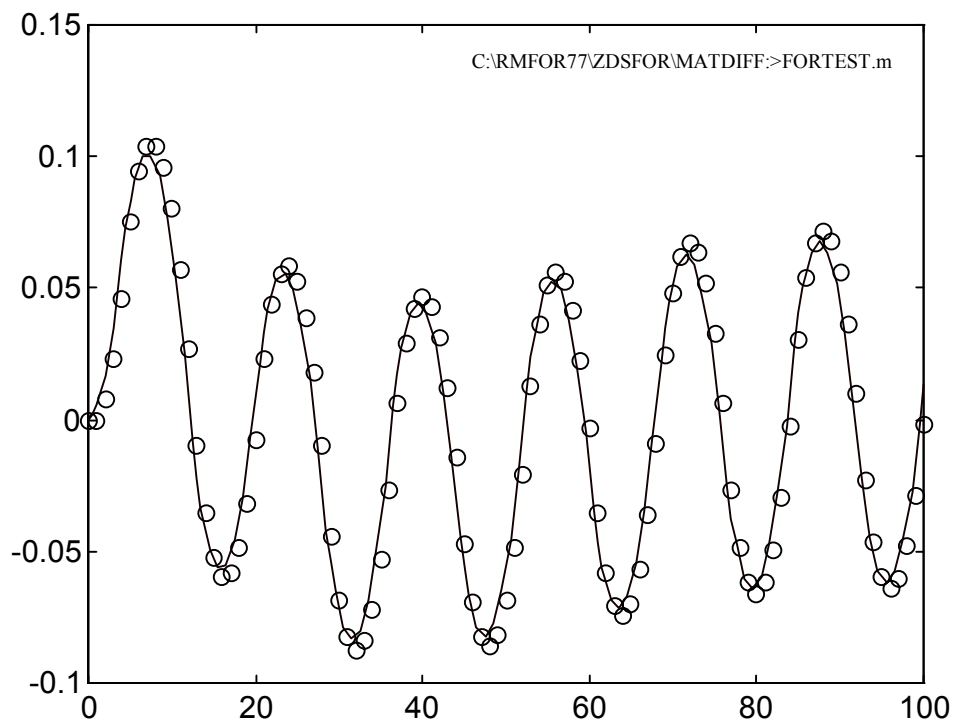
Wie gut ist das Ergebnis der so gewonnen digitalen Filterung im Vergleich mit der analogen Filterung?

Es wird der Fall untersucht, daß  $u_k = 2 \cdot \text{sign}(\cos(0,3927 \cdot k))$  vorliegt ( Wenn man „k“ um den Wert „1“ inkrementiert, so bedeutet dies der Aufgabenstellung entsprechend, daß  $1 \cdot T_{\text{ab}} = \Delta t = 0,1 \text{ msec}$  verflossen ist).

Einer Periodendauer entspricht also  $k = (2\pi)/0,3927 = 16$  bzw  $T = 16 \cdot 0,1 \text{ msec} = 1,6 \text{ msec}$  und damit gilt für die Frequenz des Eingangssignals:  $f = 1/T = 625 \text{ Hz}$ . Man vergleiche das zugehörige analoge Eingangssignal:



Trägt man für das Eingangssignal  $u(t) = 2 \cdot \text{sign}(\cos(2\pi \cdot 625 \cdot t))$ ,  $t \in [0, 0.01 \text{ sec}]$  bzw. für die Eingangsfolge  $u_k = 2 \cdot \text{sign}(\cos(0,3927 \cdot k))$   $k \in [0, 100]$  das Ausgangssignal des analogen Filters (Simulationsergebnis) und die Ausgangsfolge des digitalen Filters auf, so erhält man:



**Bild 4.6:** Simulationsergebnis zum analogen und digitalen Filterausgang.

Anmerkungen zu Bild 4.6: Der analoge Filterausgang ist durchgezogen gezeichnet und wurde mit SIMULINK simuliert. ( Numerische Integration dort mittels GEAR-Stiff ). Die vom Filteralgo berechneten Werte sind entsprechend Lösung „a“ über der Variablen „k“ aufgetragen und mit „o“ markiert. Die vom Filteralgo berechneten Werte „o“ werden auf den DA-Wandler gegeben und liefern eine entsprechende Treppenfunktion. Diese verschleift der (analoge) „Rekonstruktionstiefpaß“ am Ausgang des digitalen Filters (vgl. skizze S.10).

Lösung b („TUSTIN-Trafo“ und verwandte Transformationen):

Wird auf 4.4.3 b verschoben.

Lösung c („Matrixdifferenzengleichung, EULER'sche Polygonzugverfahren“):

Bitte selber durchführen. Es sei auch auf das regelungstechnische Labor verwiesen.

Lösung d („sprunginvariante Transformation“):

Ausgehend von 
$$G_F(s) = \frac{4 \cdot 10^5}{s^2 + 6,28 \cdot 10^2 s + 4,0 \cdot 10^5}$$

bzw. des zugehörigen Zustandsmodells in der Beobachtbarkeitsnormalform

$$\dot{\underline{x}}_{(t)} = \begin{pmatrix} 0 & -4,00 \cdot 10^5 \\ 1 & -6,28 \cdot 10^2 \end{pmatrix} \underline{x}_{(t)} + \begin{pmatrix} 4,00 \cdot 10^5 \\ 0 \end{pmatrix} u_{(t)}$$

$$y_{(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}_{(t)}$$

erhält man das zugehörige diskrete Zustandsmodell ( entsprechend der Herleitung von 4.2.2, speziell dort Formel (4.5), bzw. mit Methoden aus der VL Systemtechnik, bei  $T = 0,0001$  sec):

$$\underline{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 9,9804 \cdot 10^{-1} & -3,38744 \cdot 10^1 \\ 9,6860 \cdot 10^{-5} & 9,3721 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix} \underline{x}_n + \begin{pmatrix} 3,9973 \cdot 10^1 \\ 1,9581 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} u_n$$

$$y_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}_n \quad (*)$$



Hier eine Zwischenbemerkung zur Bezeichnung „sprunginvariante Transformation“. Darunter versteht man die unter 4.2.2 bezeichnete Vorgehensweise zur Erzeugung eines diskreten Zustandsmodells aus einem analogen Modell von Typ (4.0). Die sprunginvariante Transformation beschreibt die Realität exakt, wenn das digitale System durch Beaufschlagung eines analogen Systems mit AD und DA-Wandlern entsteht (Bilder 4.2 bzw. 4.4). Oder wenn ein analoges System ( Filter) mit Hilfe dieser Trafo durch ein digitales System ersetzt wird auf das dann nur Funktionen geschaltet und abgetastet werden die aus Sprungfunktionen zusammengesetzt sind (wodurch sich offenbar der Name von selbst erklärt).

Für alle anderen Fälle ( wo ein analoges System durch ein digitales ersetzt wird, das Eingangssignal aber nicht aus Sprungfunktionen zusammengesetzt ist ) beschreibt das, mit Hilfe der sprunginvarianten Transformation gewonnene, digitale System nur eine gute Näherung für das ursprünglich analog angesetzte System.

Das obige diskrete Zustandsmodell  $(*)$  ist sofort auf einem digitalen Signalprozessor realisierbar. Bevor wir ein entsprechendes C-Programm mit den zugehörigen Wandlerrufen kennenlernen, wird ein Quellcode für die off-line-Simulation vorgestellt. Wir wollen ja Lösung „d“ mit Lösung „a“ vergleichen! Nachfolgend finden Sie nur den entsprechenden Programmheader. Den vollständigen C - Quellcode für die off-line Simulation dann am Ende dieses Punktes 4.2. Dieser C-Quellcode (ursprünglich lag nur ein FORTRAN-Quellcode des Verfassers vor) wurde wieder von Herrn Dipl.Ing. Neacsu erstellt.

#### PROGRAM MATDIF

C Programm zur Simulation einer Matrix-Differenzengleichung.

C Es wird folgende Matrix-Differenzengleichung simuliert vgl. Skript (4.5):

```
C
C      x(k+1) = Phi*x(k) + H*u(k)
C      v(k)  = C*x(k)  + D*U(k)
C      Phi   =      nxn-Matrix
C      H     =      nxr-Matrix
C      C     =      mxn-Matrix
C      D     =      mxr-Matrix
C
```

C Die Anfangswerte sind auf "0" gesetzt:  $x_{1,n}(0) = 0$ . usw. Im nachfolgenden

C Programm bedeuten in Bezug auf diese Differenzengleichung:

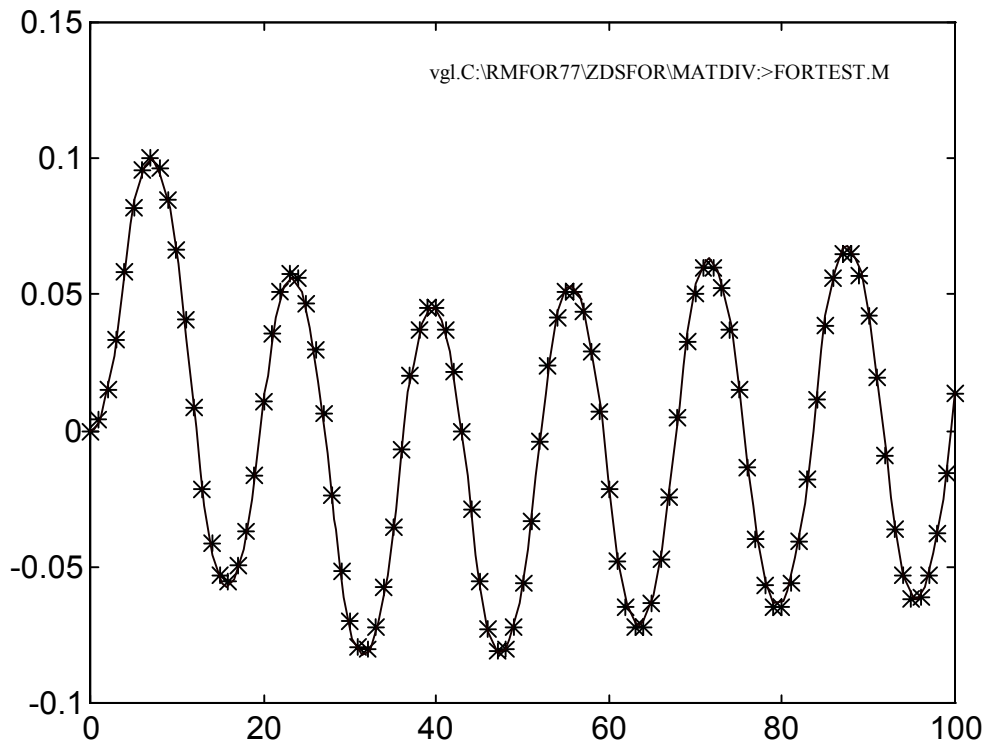
```
C
C      N = n      Ordnung des Systems (der Phi-Matrix)
C      K = k      laufender Index
C      KEND      Index des letzten
C                Abtastzeitpunktes
C                der Berechnung
C
```

C In diesem Programm wird davon ausgegangen, daß die

C Ordnung „n“ den Wert 50 nicht überschreitet.

C Die Eingangsfolge wird in der FUNCTION U(K) bereitgestellt.

Wie gut ist nun das Ergebnis der so vorgenommenen digitalen Filterung im Vergleich mit der analogen Filterung? Es wird wieder der Fall untersucht, daß  $u_k = 2 \cdot \text{sign}(\cos(0,3927 \cdot k))$  ist. Also dieselben Eingangsverhältnisse wie schon beim Fall „a“. Da sich nun  $u(t)$  aus abschnittsweise konstanten Werten zusammensetzt, müßte nach den vorangegangenen Zwischenbemerkungen zur Bezeichnung „sprunginvariante Transformation“ der damit berechnete digitale Filterausgang mit dem analogen Filterausgang exakt übereinstimmen. Das bestätigt die Simulation in der Tat!



**Bild 4.7:** *Simulationsergebnis zum analogen und digitalen Filterausgang entsprechend Lösung „d“ bei entsprechenden Eingangssignalen über „k“ aufgetragen. Den digitalen Filterausgang „\*“ auf einen DA-Wandler gegeben, liefert die entsprechende Treppenfunktion.*

Wir bleiben noch bei Lösung „d“: Neben der besprochenen off-line Simulation wird noch für dasselbe Rechenbeispiel die Echtzeitprogrammierung mit Hilfe eines DSP besprochen. Beim besagten DSP handelt es sich um den TMS320C30 von Texas-Instruments.

*"Es gibt keinen Grund, warum irgend jemand einen Computer in seinem Haus wollen würde".  
( Ken Olson, Präsident, Vorsitzender und Gründer von Digital Equipment Corp., 1977 )*

```
#include <math.h>

#define tab 1.0000E-04

float ds2002(long base, long channel);
void ds2101(long base, long channel, float value);
void init();
void timer1(float time);

/* Variablendeklaration */

float a1_1 = 9.9804187E-01;
float a1_2 = -3.874404E+01;
float a2_1 = 9.6860112E-05;
float a2_1 = 9.3721372E-01;

float b1_1 = 3.9973752E+01;
float b2_1 = 1.9581324E-01;

float c1_2 = 1.0000000E+00;

float x1 = 0.000000000E+00;
float x2 = 0.000000000E+00;
float xk1_1 = 0.000000E+00;
float xk1_2 = 0.000000E+00;

float u_t = 0.000000000E+00;
float y_t = 0.000000000E+00;

/* Hauptprogramm für "TMS 320C30" */

main()
{
    init();
    timer1(tab);
    for (;;)
    {

/* Interrupt-Service-Routine (ISR) */
```

```
c_int10()
{
x1 = xk1_1;
x2 = xk1_2;

asm(" trapu 27");
u_t = ds2002(0x00000020,0x00000001);
ds2101(0x00000080,0x00000001,y_t);

xk1_1 =
    a1_1 * x1 +
    a1_2 * x2 +
    b1_1 * u_t;

xk1_2 =
    a2_1 * x1 +
    a2_2 * x2 +
    b2_1 * u;

y_t = c1_2 * x1;
}
```

Zu guter Letzt fragt man sich natürlich, wie gut (oder wie schlecht) die digitale Nachbildung auf dem DSP - verglichen mit dem (idealen) analogen Filter - ist.

Für den betrachteten Fall des (analogen) LRC-Filters wurde einerseits die Filtersystemfunktion (der Filterfrequenzgang) ausgerechnet und ausgeplottet. Dann wurde an den DSP ein FFT-Analysator angeschlossen und es wurde die Wirkung des Filteralgorithmus' (den man oben durch das Listing beschrieben findet) meßtechnisch nachgeprüft. Es ergab sich das unten stehende Ergebnis (Bild 4.8). Resultate der Rechnung (zum analogen Filter) und der Messung (am digitalen Filter) sind einander gegenübergestellt. Das analoge Filter wurde nicht schaltungstechnisch realisiert.



Die letztgenannte Bemerkung soll noch einmal hervorgehoben werden! Um eine „digitale Filteraufgabe“ zu bearbeiten genügt es, ein analoges Filter auf dem Papier auszulegen und auf dem Papier in einer der beschriebenen Weisen zu diskretisieren. Realisiert wird nur das digitale (zeitdiskrete) Filter. Natürlich gibt es auch digitale Filter die sich nicht aus vorher entworfenen, analogen Filtern ableiten lassen. Hier sei auf die VL „Digitale Signalverarbeitung“ verwiesen.



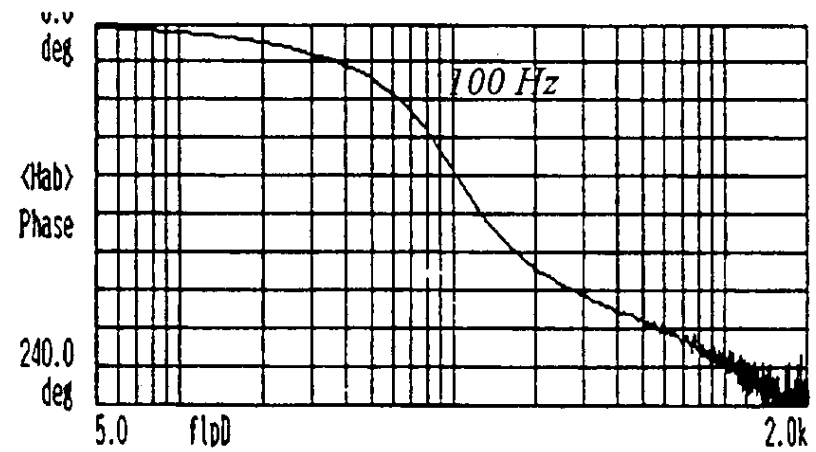
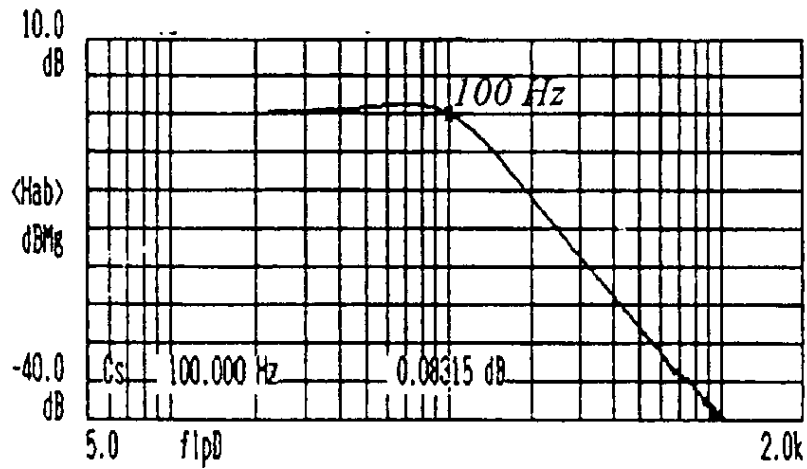
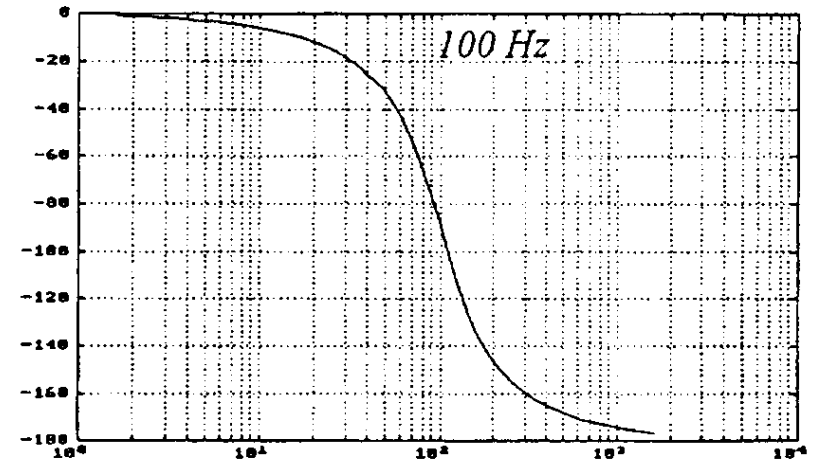
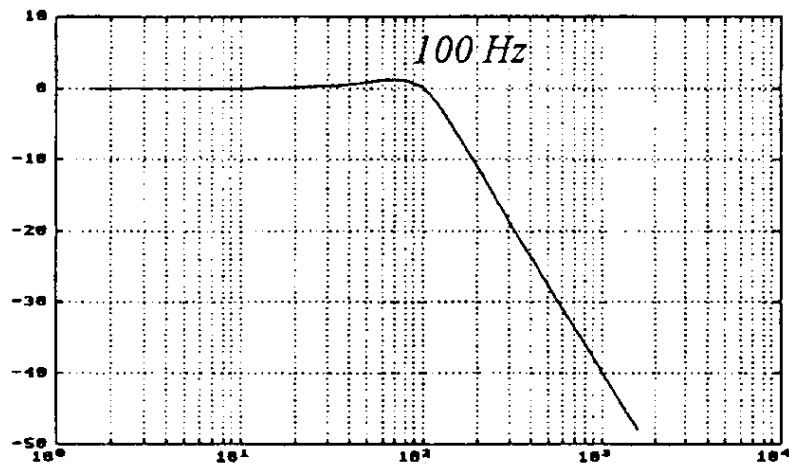


Bild 4.8:

Oben: Gewünschter Amplituden und Phasengang des LRC-Filters wie er sich  
Unten: Ergebnis der Messung am DSP (TMS 320C30 von TI)

bei analoger Realisierung ergeben würde.

Es folgen jetzt die angekündigten C-Programme. Diese Programme, einschließlich der notwendigen Bibliotheken, Headerfiles und der „exe's“ finden Sie auch unter H:\Karl\dsp (Server „NF-AUTO“).

```

/*      PROGRAM DIFGLN

Programm zur Simulation einer Differenzengleichung.
Es wird folgende Differenzengleichung wird simuliert:


$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_n u_{k-n}$$


Im nachfolgenden Programm bedeuten in Bezug auf diese
Differenzengleichung:

                                N=n      Ordnung
                                K=k      laufender Index
                                KEND      Index des letzten
                                           Abtastzeitpunktes
                                           der Berechnung

                                Y(0 )    = y_k und U(0) = u_k
                                Y(1)      = y_{k-1} und U(1) = u_{k-1}
                                Y(N )     = y_{k-n} und U(N) = u_{k-n}

                                           B(0) = b_0
                                A(1) = a_1 und B(1) = b_1
                                :
                                :
                                A(N) = a_n und B(N) = b_n

In diesem Programm wird davon ausgegangen, daß die
Ordnung "n" den Wert 50 nicht überschreitet.
Die Eingangsfolge wird in der FUNCTION U(K) bereitgestellt.

*/

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <iostream.h>
#include <fstream.h>

float fUK(int K)
{
    float UK;

//    UK = sin(2 * (K - 2) * 0.05);
    UK = 2;
    if (cos(0.3927 * K) >= 0)
        UK *= 1;
    else if(cos(0.3927 * K) < 0)
        UK *= -1;
//    UK = 0.0;
//    IF (K == 0) UK = 1;
    return (UK);
}

//-----
void main(void)
{
    int K, L, N, KEND;
    float A[51], B[51], U[51], Y[51];
    float FELDA[1001], FELDB[1001];
    float AK[51], BK[51];
    float SUMME;

    printf("\nORDNUNG DER DIFFERENZENGLEICHUNG? ");
    scanf("%i", &N);

    AK[0] = N + 1;
    BK[0] = N + 1;
    AK[1] = 1.0;

```

```

printf("\nKOEFF. ai (a0=1.) EINGEBEN:\n");
for (int i = 1; i <= N; i++)
{
    printf("a%i = ", i);
    scanf("%f", &A[i]);
    L = i + 1;
    AK[L] = A[i];
}

printf("\nKOEFF. bi BEGINNEND MIT i=0 EINGEBEN.\n");
for (int i = 0; i <= N; i++)
{
    printf("b%i = ", i);
    scanf("%f", &B[i]);
    L = i + 1;
    BK[L] = B[i];
}

printf("\n ANZAHL DER ZU SIMULIERENDEN SCHRITTE?");
printf("\nKend = ");
scanf("%i", &KEND);
FELDA[0] = KEND + 1;
FELDB[0] = KEND + 1;

//-----
//    AUSGABEMEDIUM VORBEREITEN:
printf("K\tU[I]\tY[I]\n");

for (int i = 0; i <= N; i++)
{
    U[i] = 0.0;
    Y[i] = 0.0;
}

//-----

K = 0;

//    BEGINN DER HAUPTSCHLEIFE:

while (K <= KEND)
{
    U[0] = fUK(K);
    SUMME = 0;

    for (int i = 1; i <= N; i++)
        SUMME = SUMME - (A[i] * Y[i]);

    for (int i = 0; i <= N; i++)
        SUMME = SUMME + (B[i] * U[i]);

    Y[0] = SUMME;

    printf("\n%i\t%f\t%f", K, U[0], Y[0]);

    // Die naechsten beiden Anweisungszeilen bereiten
    // das Schreiben auf die Platte vor:

    FELDA[K + 1] = U[0];
    FELDB[K + 1] = Y[0];

    // UPDATE PAST VALUES (UMSPEICHERN)

    for (int i = N; i >= 0; i--)
    {
        Y[i] = Y[i - 1];
        U[i] = U[i - 1];
    }
    K++;
}

// ENDE DER HAUPTSCHLEIFE

// Schreiben auf die Platte

ofstream ofs(".\\output.dat");
ofs << "\nFELDA = [";
for (int i = 0; i <= (KEND + 1); i++)
    ofs << FELDA[i] << " ";

```



```

ofs << "];";
ofs << "\nFELDB = [";
for (int i = 0; i <= (KEND + 1); i++)
    ofs << FELDB[i] << " ";
ofs << "];";

// Jetzt kommen noch zwei Felder mit den
// Koeffizienten der Differenzengleichung:

ofs << "\nAKOEFF = [";
for (int i = 0; i <= (N + 1); i++)
    ofs << AK[i] << " ";

ofs << "];";
ofs << "\nBKOEFF = [";
for (int i = 0; i <= (N + 1); i++)
    ofs << BK[i] << " ";
ofs << "];";
ofs.close();

//-----
//
// ENDE HAUPTPROGRAMM
//
//-----
}

```

Das Programm „DIFGLN“ wird noch einmal angegeben. Es heißt dann „DIFFGLN“. Diesmal unter Verwendung von Wandleraufrufen. Das „EXE“ dieses Programms ist mit den im Labor für Automatisierungstechnik vorhandenen Wandlern lauffähig.

```
/*      PROGRAM DIFFGLN
```

```

Programm zur Simulation einer Differenzengleichung.
Es wird folgende Differenzengleichung wird simuliert:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_n u_{k-n}$$


```

Im nachfolgenden Programm bedeuten in Bezug auf diese Differenzengleichung:

N=n	Ordnung
K=k	laufender Index
KEND	Index des letzten Abtastzeitpunktes der Berechnung
	$Y(0) = y_k$ und $U(0) = u_k$
	$Y(1) = y_{k-1}$ und $U(1) = u_{k-1}$
	$Y(N) = y_{k-n}$ und $U(N) = u_{k-n}$
	$B(0) = b_0$
	$A(1) = a_1$ und $B(1) = b_1$
	.
	.
	$A(N) = a_n$ und $B(N) = b_n$

In diesem Programm wird davon ausgegangen, daß die Ordnung "n" den Wert 50 nicht überschreitet. Die Eingangsfolge wird in der FUNCTION U(K) bereitgestellt.

```
*/
```

```

#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <dos.h>
#include <math.h>
#include "userprot.h"

//Variable
DDH DAS1600; //Device Handle
FRAMEH ADHandle; //A/D Frame Handle
unsigned int far *DMABufPtr; //Pointer to allocated DMA buffer
WORD MemHandle; //allocated Memory Handle
short Status; //used to monitor DMA transfers
long Transfers, Trans_alt = 8; // used to monitor DMA transfers
char NumberOfBoards; //Wert für die Daten-Umsetzung int->double
short Err; //Function return error flag
long Samples = 16, Abtastzeit; //Samples = Anzahl der abtast-Kanäle * 2
double DataBufEin[24]; //Wert für die Daten-Umsetzung int->double
unsigned int DataBufAus1, DataBufAus2; //Datenpuffer für die zwei Ausgangskanäle
unsigned int DataBuf[24]; //Datenhilfspuffer

double abtasten()
{
    static int i;
    K_DMAStatus(ADHandle, &Status, &Transfers);
    if (Trans_alt != Transfers)
        printf(" Die Abtastzeit ist zu klein !!!!\n");
    do
    {
        K_DMAStatus(ADHandle, &Status, &Transfers);
        // Wenn ein Interrupt erfolgt ist, dann Aktion ausführen
        // wenn ein neuer Wert eingelesen ist, dann Schleife ausführen
        if ((i != Transfers) && ((Transfers == 0) || (Transfers == 8) || (Transfers == 16)))
        {
            /*(Warteschleife) Wenn ein neuer Wert eingelesen ist dann Schleife
            ausführen */
            Trans_alt = Transfers;
            DataBufEin[i] = (((double) (*(DMABufPtr + i) >> 4)) - 2048) / 204.8;
            /* Umwandlung in Doublewerte*/
            DataBufEin[i + 1] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 1) >> 4)) - 2048) / 204.8;
            DataBufEin[i + 2] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 2) >> 4)) - 2048) / 204.8;
            DataBufEin[i + 3] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 3) >> 4)) - 2048) / 204.8;
            DataBufEin[i + 4] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 4) >> 4)) - 2048) / 204.8;
            DataBufEin[i + 5] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 5) >> 4)) - 2048) / 204.8;
            DataBufEin[i + 6] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 6) >> 4)) - 2048) / 204.8;
            DataBufEin[i + 7] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 7) >> 4)) - 2048) / 204.8;

            i = (int) Transfers; /* Nummer des Transfers auf Index zuweisen */
            break;
        }
    }
    while (Status & 1);
    return (DataBufEin[i]);
}

void init_funktion() /* Initialisierungs-Funk. für die DAS-1600 */
{
    /* Initialisieren von Hard- und Software */
    if ((Err = DAS1600_DevOpen("DAS1600.cfg", &NumberOfBoards)) != 0)
    {
        putch (7);
        printf("Error %X during DevOpen ", Err);
        return;
    }

    /* Aufbauen der Kommunikation mit dem Treiber durch ein Device Handle */
    if ((Err = DAS1600_GetDevHandle(0, &DAS1600)) != 0)
    {
        putch (7);
        printf("Error %X beim Ausführen der GetDevHandle", Err);
        exit (1);
    }

    /* AD-Handle dem Device zuordnen */
    if ((Err = K_GetADFrame(DAS1600, &ADHandle)) != 0)
    {
        putch (7);
        printf("Error %X beim Ausführen der Funktion GetADFrame", Err);
        exit(1);
    }
}

```

```

    }
    /* Speicherplatz für die gewünschten Abtastungen reservieren */
    K_DMAAlloc(ADHandle, Samples, (void far * far *) &DMABufPtr, &MemHandle);
    if (DMABufPtr == NULL)
    {
        putchar(7);
        printf("Error; Der DMA Buffer-Zeiger is NULL");
        exit(1);
    }
    // printf("Die Daten sind auf der Adresse %X:%X \n\n", FP_SEG(DMABufPtr),
    FP_OFF(DMABufPtr));
    /* DMA-Buffer und Anzahl der Abtastwerte dem A/D Frame zuweisen */
    K_SetDMABuf(ADHandle, DMABufPtr, Samples);
    /* Einstellen der Kanalempfindlichkeit (Verstärkung) */
    K_SetStartStopG(ADHandle, 0, 7, 0);
    /* Einstellen der Anzahl der Kanäle die eingelesen werden */
    K_SetStartStopChn(ADHandle, 0, 7);
    /* Interne Uhr setzen */
    K_SetClk(ADHandle, 0);
    /* Wert für die gewünschte Abtastzeit eingeben (Abtastzeit =
    1ms*Eingabewert) */
    printf("\nGeben Sie die Abtastzeit in Millisekunden ein (z.B.10=>Abtastzeit=10ms):");
    scanf("%i", &Abtastzeit);
    /* Taktrate einstellen */
    K_SetClkRate(ADHandle, Abtastzeit*10000);
    /* Trigger setzen */
    K_SetTrig(ADHandle, 0);
    /* Simultaneous Sampil and Hold */
    K_SetSSH(ADHandle, 1);
    /* 'FREE-RUN'-Mode starten */
    K_SetADFreeRun(ADHandle);
    /* Umstellen auf Continous-Run */
    if ((Err = K_SetContRun(ADHandle)) != 0)
    {
        putchar(7);
        printf("Error %X bei K_SetContRun !", Err);
        exit(1);
    }
    /* Datenerfassung starten */
    K_DMAStart(ADHandle);
    printf("Die DMA-Kanalwandlung ist gestartet !!\n");
}

void da_ausgabe(double Ausgabel) /* Funktion zur Digital-Analog-Ausgabe auf Kanal 0 und 1 */
{
    DataBufAus1 = ((unsigned int) ((Ausgabel * 204.75) + 2048)) << 4; /* Ausgabewerte für DAS
    1600 konvertieren */
    DataBufAus2 = ((unsigned int) ((Ausgabel * 204.75) + 2048)) << 4; /* Ausgabewerte für DAS
    1600 konvertieren */

    if ((Err = K_DAWrite(DAS1600, 0, DataBufAus1)) != 0) /* DA-Ausgabe auf Kanal 0 */
    {
        putchar(7);
        printf("Error %X bei K_DAWrite 0 !", Err);
        exit(1);
    }

    if ((Err = K_DAWrite(DAS1600, 1, DataBufAus2)) != 0) /* DA-Ausgabe auf Kanal 1 */
    {
        putchar(7);
        printf("Error %X bei K_DAWrite 1 !", Err);
        exit(1);
    }
}

//-----
void main(void)
{
    int K, L, N; //, KEND;
    double A[51], B[51], U[51], Y[51];
    // float FELDA[1001], FELDB[1001];
    double AK[51], BK[51];
    double SUMME;
    float help;
    int i;
    printf("Es wird folgende Differenzengleichung wird simuliert:\n yk + a1* yk-1 + a2*yk-2 +
    ... + an*yk-n =\n\t\t= b0*uk + b1*uk-1 + ... + bn*uk-n\n");
    printf("\nORDNUNG DER DIFFERENZENGLEICHUNG? ");
}

```

```

scanf("%i", &N);

AK[0] = N + 1;
BK[0] = N + 1;
AK[1] = 1;

printf("\nKOEFF. ai (a0=1.) EINGEBEN:\n");
for (i = 1; i <= N; i++)
{
printf("a%i = ", i);
scanf("%f", &help);
A[i] = (double) help;
L = i + 1;
AK[L] = A[i];
}

printf("\nKOEFF. bi BEGINNEND MIT i=0 EINGEBEN.\n");
for (i = 0; i <= N; i++)
{
printf("b%i = ", i);
scanf("%f", &help);
B[i] = (double) help;
L = i + 1;
BK[L] = B[i];
}

//-----
//      AUSGABEMEDIUM VORBEREITEN:
//printf("K\tU[I]\tY[I]\n");

for (i = 0; i <= N; i++)
{
U[i] = 0;
Y[i] = 0;
}

//-----

K = 0;

init_funktion();          //DAS1600 initialisieren
K_DMAStatus(ADHandle, &Status, &Transfers); //DMA-Überwachung
Trans_alt = Transfers;

//      BEGINN DER HAUPTSCHLEIFE:
printf("\nDie Berechnung ist gestartet!\n Abbruch mit beliebiger Taste.");
do
{
U[0] = abtasten();
SUMME = 0;

for (i = 1; i <= N; i++)
SUMME = SUMME - (A[i] * Y[i]);

for (i = 0; i <= N; i++)
SUMME = SUMME + (B[i] * U[i]);

Y[0] = SUMME;

//printf("\n%i\t%f\t%f", K, U[0], SUMME);

if (Y[0] >= 10)
Y[0] = 10;
else if (Y[0] <= -10)
Y[0] = -10;
da_ausgabe(Y[0]);          // Ergebniswert der Rechnung auf Analogausgabe-Kanal 0 und 1
ausgeben

// UPDATE PAST VALUES (UMSPEICHERN)

for (i = N; i >= 0; i--)
{
Y[i] = Y[i - 1];
U[i] = U[i - 1];
}

if (kbhit()) break; // bei Tastendruck abbrechen
}while(1);

// ENDE DER HAUPTSCHLEIFE

```

```

//DMA-Modus Stoppen
K_DMAStop(ADHandle, &Status, &Transfers);
//Speicher freigeben
K_DMAFree(MemHandle);
//-----
//
// ENDE HAUPTPROGRAMM
//
//-----
}

```

Zum Schluß noch ein Programmlisting für die Simulation von Matrix-Differenzengleichungen. Man vergleiche mit (4.5) bzw. „Lösung d“ von Rechenbeispiel 4.2.3.

```

/*
PROGRAM MATDIF

Programm zur Simulation einer Matrix-Differenzengleichung.
Es wird folgende Matrix-Differenzengleichung simuliert:

    x(k+1) = Phi*x(k) + H*u(k)
    v(k)   = C*x(k) + D*U(k)
    Phi    = nxn-Matrix
    H      = nxr-Matrix
    C      = mxn-Matrix
    D      = mxr-Matrix

Die Anfangswerte sind auf "0" gesetzt: x1,n(0) = 0. usw.
Im nachfolgenden Programm bedeuten in Bezug auf diese
Differenzengleichung:
    N=n Ordnung
    K=k laufender Index
    KEND Index des letzten
        Abtastzeitpunktes
        der Berechnung

In diesem Programm wird davon ausgegangen, daß die
Ordnung "n" den Wert 50 nicht überschreitet.
Die Eingangsfolge wird in der FUNCTION U(K) bereitgestellt.
*/
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <fstream.h>

float fUK(int K)
{
    float UK;

    UK = 2;
    if (cos(0.3927 * K) >= 0)
        UK *= 1;
    else if (cos(0.3927 * K) < 0)
        UK *= -1;
    // IF (K = 0) UK = 1 Für Impulsantwort
    return (UK);
}

void MATMUL(float *A, float *B, int N, int L, int M, float *PROD)
{
    for (int i = 1; i <= N ; i++)
        for(int j = 1; j <= M ; j++)
        {
            *(PROD + j * 51 + i) = 0;
            for (int z = 1; z <= L; z++)
                *(PROD + i) += *(A + i * 51 + z) * *(B + z);
        }
    return;
}

void MATADD(float *A, int N, int M, float *B, float *SUMME)
{
    for (int i = 1; i <= N ; i++)
        *(SUMME + i) = *(A + i) + *(B + i);
    // for (int j = 1; j <= M ; j++)

```

```

//          *(SUMME + j * 51 + i) = *(A + j * 51 + i) + *(B + j * 51 + i);
return;
}

void MATAUS(float *A, int N, int M)
{
    // -----MATRIZENAUSGABE

    printf("\n-----");
    for (int iz = 1; iz <= N; iz++)
        for (int is = 1; is <= M; is++)
            printf("\nA(%i,%i) = %f", iz, is, *(A + iz * 51 + is));
    printf("\n-----");
    return;
}

void main(void)
{
    int KEND, N, R, M, L;
    int K;
    float A[51][51], H[51][51], C[51][51], D[51][51];
    float TERM1[51], TERM2[51], TERM3[51], TERM4[51], temp[51];
    float X[51], XNEU[51];
    float U[51], V[51], UK;
    float FELDA[1001], FELDB[1001];

    printf("\nSYSTEMORDNUNG? ");
    scanf("%i", &N);

    printf("\nANZAHL DER EINGANGSGROESSEN? Ueblich R=1: ");
    scanf("%i", &R);

    printf("\nANZAHL DER AUSGANGSGROESSEN? Ueblich M=1: ");
    scanf("%i", &M);

    printf("\nELEMENTE VON PHI(I,K) EINGEBEN:\n");

    for (int i = 1; i <= N; i++)
        for (int k = 1; k <= N; k++)
        {
            printf("A(%i,%i) = ", i, k);
            scanf("%f", &A[i][k]);
        }
    printf("\nELEMENTE VON H(I,K) EINGEBEN:\n");
    for (int i = 1; i <= N; i++)
        for (int k = 1; k <= R; k++)
        {
            printf("H(%i,%i) = ", i, k);
            scanf("%f", &H[i][k]);
        }

    printf("\nELEMENTE VON C(I,K) EINGEBEN:\n");
    for (int i = 1; i <= M; i++)
        for (int k = 1; k <= N; k++)
        {
            printf("C(%i,%i) = ", i, k);
            scanf("%f", &C[i][k]);
        }

    printf("\nELEMENTE VON D(I,K) EINGEBEN:\n");
    for (int i = 1; i <= M; i++)
        for (int k = 1; k <= R; k++)
        {
            printf("D(%i,%i) = ", i, k);
            scanf("%f", &D[i][k]);
        }

    // Anfangswerte auf Null setzen:
    for (int i = 1; i <= 50; i++)
    {
        X[i] = 0;
        XNEU[i] = 0;
    }

    printf("\nANZAHL DER ZU SIMULIERENDEN SCHRITTE?");
    printf("\nKend = ");
    scanf("%i", &KEND);
    FELDA[0] = KEND + 1;
    FELDB[0] = KEND + 1;

```

```

    MATAUS(&A[0][0], N, N);

    K = 0;

// -----
// Beginn der "Hauptschleife":
// -----
    for (int k = 0; k <= KEND; k++)
    {
        U[1] = fUK(k);                                // wenn mit einem Eingangvektor gerechnet
                                                        // werden soll, muß hier der ganze U-Vektor
                                                        // beschrieben werden.

        MATMUL(&A[0][0], &X[0], N, N, 1, &TERM1[0]);
        for (int i = (R + 1); i < 51; i++)              // Nur die unbenutzten Elemente müssen auf
            U[i] = 0;                                  // Null gesetzt werden.
        MATMUL(&H[0][0], &U[0], N, R, 1, &TERM2[0]);
        MATADD(&TERM1[0], N, 1, &TERM2[0], &XNEU[0]);
        MATMUL(&C[0][0], &X[0], M, N, 1, &TERM3[0]);
        MATMUL(&D[0][0], &X[0], M, R, 1, &TERM4[0]);
        MATADD(&TERM3[0], M, 1, &TERM4[0], &V[0]);

        printf("\n%i\t%f\t%f", k, U[1], V[1]);

// Die naechsten beiden Anweisungszeilen bereiten
//das Schreiben auf die Platte vor:

        FELDA[K + 1] = U[1];                            // hier muß der komplette u-Vektor
übergeben                                              // werden, falls R >1.

        FELDB[K + 1] = V[1];

// UPDATE PAST VALUES (UMSPEICHERN)
        for (int i = 1; i <= N; i++)
            X[i] = XNEU[i];
    }

// -----
// ENDE DER HAUPTSCHLEIFE
// -----

// Schreiben auf die Platte

    ofstream ofs(".\\output.dat");
    ofs << "\nFELDA = [";
    for (int i = 0; i <= (KEND + 1); i++)
        ofs << FELDA[i] << " ";
    ofs << "];";

    ofs << "\nFELDB = [";
    for (int i = 0; i <= (KEND + 1); i++)
        ofs << FELDB[i] << " ";
    ofs << "];";
    ofs.close();

// MIT "TYPE FELDA.M" KANN MAN SICH EINEN DATENSATZ VON DER
// PLATTE HOLEN UND ANSEHEN

// Jetzt kommen noch zwei Felder mit den
// Koeffizienten der Differenzengleichung:

    ofs << "\nA = [";
    for (int i = 1; i <= N; i++)
        for (int k = 1; k <= N; k++)
            ofs << A[i][k] << " ";
    ofs << "];";

    ofs << "\nH =[";
    for (int i = 1; i <= N; i++)
        for (int k = 1; k <= R; k++)
            ofs << H[i][k] << " ";
    ofs << "];";
}

// -----
//
// ENDE HAUPTPROGRAMM

```

```
//  
// -----  
// Programmende
```



#### **4.2.4 Was bleibt uns im nichtlinearen Fall ?**

Wir haben in 4.2 eine Menge von zeitdiskreten (digitalen) Systemen kennengelernt und wissen, wie man sie mathematisch beschreiben kann ( z.B. durch Differenzengleichungen, durch z-Übertragungsfunktionen; später lernen wir auch noch die Faltungssummen kennen ). Wir verfügen jetzt auch über eine Reihe von Möglichkeiten, die es uns erlauben ein analoges System in ein zeitdiskretes (digitales) umzuwandeln.

Alle diese Betrachtungen wurden für den Fall linearer Systeme angewendet!

Für den Fall nichtlinearer Systeme bleiben für deren Beschreibung nur die Differenzengleichungen übrig (es können nunmehr keine z-Übertragungsfunktionen und keine Faltungssummen angegeben werden).

Schließlich „funktionieren“ bei nichtlinearen Systemen auch die meisten Möglichkeiten der Diskretisierung nicht mehr!

Von den hier vorgestellten Methoden bleiben nur übrig:

- Die Methode der Vorwärtsdifferenzen (der Rückwärtsdifferenzen, zentrierten Differenzen...) bei nichtlinearen Modellen beliebiger Ordnung.
- Umwandlung von Modellen höherer Ordnung in ein gekoppeltes System von Differenzengleichungen 1. Ordnung und Anwendung des EULERSCHEN-Polygonzugverfahrens.

Die nachfolgende Aufgabe bleibt Ihnen überlassen.

**Aufgabe:** Man schreibe einen rekursiven Algorithmus der die abgetasteten Werte eines analogen Meßsignals verwendet und damit den Effektivwert dieses Signals berechnet. Die Verwendung der Wurzelfunktion ist dabei geeignet nachzubilden.

*„Reichtum und Schnelligkeit ist, was die Welt bewundert und wonach jeder strebt. Eisenbahnen, Dampfschiffe und alle möglichen Facilitäten der Kommunikation sind es, worauf die gebildete Welt ausgeht, sich zu überbilden und dadurch in der Mittelmäßigkeit zu verharren.“ ( J.W.v. Goethe)*

### 4.3 Definition und Eigenschaften der z-Transformation von Folgen

$$\{f_n\} \rightarrow F(z) = Z\{\{f_n\}\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n}$$

**Beispiel:**  $\{f_n\} = \{1, 1, 1, \dots\} \rightarrow F(z) = 1 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$

**Eigenschaften:**

$$\{f_n\}, \{g_n\}; \quad Z\{\{f_n\}\} = F(z), \quad Z\{\{g_n\}\} = G(z)$$

*Linearität:*  $Z\{c_1\{f_n\} + c_2\{g_n\}\} = c_1 \cdot F(z) + c_2 \cdot G(z); \quad c_1, c_2 \text{ beliebig}$

Für eine um k (k > 0) Takte verschobene Folge gilt:

*Verschiebungssatz:*  $Z\{\{f_{n-k}\}\} = z^{-k} \cdot F(z)$

Linearitätssatz und Verschiebungssatz lassen sich sofort aus der Definition der z-Transformation ableiten. (Bitte selber versuchen ! Erinnern Sie sich auch an die VL Systemtheorie)

### 4.4 Anwendung der z-Transformation von Folgen auf lineare, zeitdiskrete Systeme

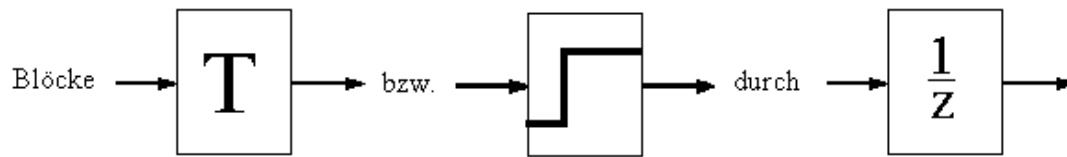
Aus 3.2 ist uns die Berechnung einer (Laplace-) Übertragungsfunktion unter Verwendung des Strukturbilds von einem analogen System geläufig: Man ersetzt dort Blöcke mit „ $\int dt$ “ durch

Multiplikatoren „ $\frac{1}{s}$ “.

Das Verhältnis  $\frac{L - \text{Transformierteder Ausgangsgröße}}{L - \text{Transformierteder Eingangsgröße}} \Big|_{\text{Anfangswerte}=0} =: G(s)$

- die (Laplace-) Übertragungsfunktion - kann dann bekanntlich durch Blockumformungen bestimmt werden (man vergleiche auch mit 3.4).

Da der Verschiebungssatz der z-Transformation gilt, können wir diese Vorgehensweise auf zeitdiskrete Systeme übertragen.: Blöcke die Laufzeitglieder bzw. Totzeitglieder kennzeichnen werden durch Multiplikatoren „ $\frac{1}{z}$ “ ersetzt.



Sinnvollerweise nennt man das Verhältnis

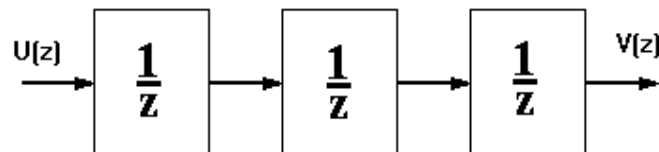
$$\left. \frac{z\text{-Transformierte der Ausgangsfolge}}{z\text{-Transformierte der Eingangsfolge}} \right|_{\text{Anfangswerte}=0} =: G^{\#}(z) \quad (4.6)$$

die **z-Übertragungsfunktion** des zeitdiskreten Systems (man vergleiche mit 3.2) .

Bezugnehmend auf die bisher betrachteten Beispiele 4.2.1 bis 4.2.3 werden deren z-Übertragungsfunktionen bestimmt:

#### 4.4.1 Bezugnahme auf 4.2.1: Schaltwerke und Algorithmen

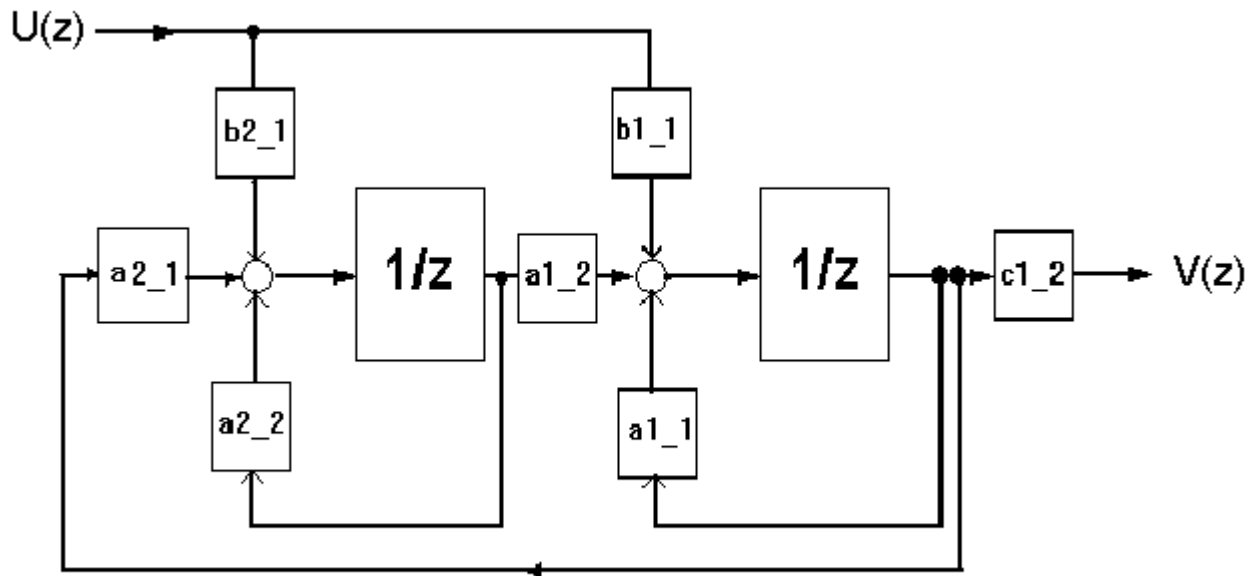
(i) Schieberegister :



Hier liest man sofort ab:  $G^{\#}(z) = \frac{1}{z^3}$

(ii) z-Übertragungsfunktion zu einem Algorithmus':

Es wird der Filteralgorithmus von 4.2.1 herangezogen. Dazu wird das zugehörige Strukturbild (Bild 4.3) in den Bildbereich der z-Transformation übertragen:



**Bild 4.9:** *Strukturbild zum Filteralgo von 4.2.1 im bildbereich der z-Transformation (vgl. Bild 4.3)*

Wie aus 3.4 bekannt, liest man für die z-Übertragungsfunktion ab:

$$G^{\#}(z) = \frac{z \cdot c1\_1 \cdot b1\_2 + c1\_1 \cdot (b2\_2 \cdot a1\_2 - b1\_2 \cdot a2\_2)}{z^2 - z \cdot (a1\_1 + a2\_2) + a1\_1 \cdot a2\_2}$$

#### **4.4.2 Bezugnahme auf 4.2.2: Analoge Regelstrecken die mit AD und DA-Wandlern beaufschlagt sind und so zu zeitdiskreten Systemen werden:**

Dieser Punkt ist für uns natürlich entscheidend. Insbesondere im Hinblick auf die Synthese von digitalen Regelalgorithmen. Wir wollen dies in einem extra Punkt (vgl. 4.5) abarbeiten.

#### **4.4.3 Bezugnahme auf 4.2.3: Angabe der z-Übertragungsfunktion von weiteren zeitdiskreten Systemen die ein ursprünglich analoges Filter bzw. einen ursprünglich analogen Regler (mehr oder weniger genau) nachbilden.**

4.4.3.a Z-Übertragungsfunktion eines diskreten Systems, das aus einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung durch Diskretisierung (z.B. mittels Vorwärtsdifferenzen) entstanden ist.

Wir greifen die Differenzengleichung aus 4.2.3 („Lösung a“) auf. Dort hatten wir

$$v_k + a_1 \cdot v_{k-1} + a_2 \cdot v_{k-2} = b_0 \cdot u_{k-2}$$

Z-Transformation auf beiden Seiten anwenden liefert:

$$V(z) + a_1 \cdot z^{-1}V(z) + a_2 \cdot z^{-2}V(z) = b_0 \cdot z^{-2}U(z)$$

Schließlich erhält man

$$\frac{V(z)}{U(z)} = G_F^{\#}(z) = \frac{b_0}{z^2 + a_1 z + a_2}$$



Man beachte folgendes: Gegenstand unserer Untersuchungen ist ein analoges Filter das die Laplace-Übertragungsfunktion

$$G_F(s) = \frac{4 \cdot 10^5}{s^2 + 6,28 \cdot 10^2 s + 4,0 \cdot 10^5} \quad \text{hat}$$

und von dem nach der Diskretisierung das obige  $G_F^{\#}(z)$  angegeben wird.

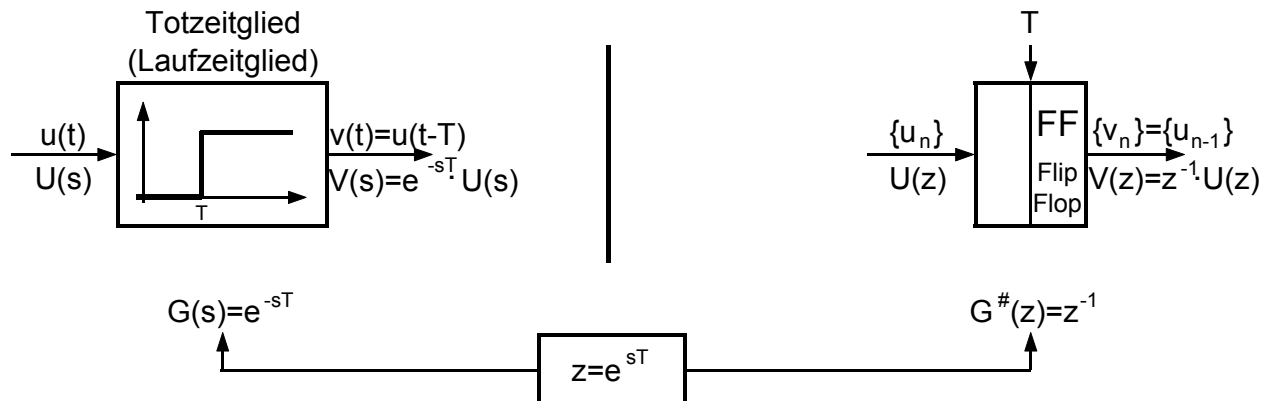
Man erwartet intuitiv, daß für hinreichend kleine Abtastzeiteten „T“ stets gilt:  $\lim_{T \rightarrow 0} G^{\#}(z) = G(s)$ . Das stimmt leider nicht !

Und zwar egal, wie  $G^{\#}(z)$  aus  $G(s)$  gewonnen wurde. (vgl. auch: 4.9)

4.4.3.b Bestimmung einer z-Übertragungsfunktion und der zugehörigen Differenzengleichung unter Verwendung der TUSTIN-Transformation oder damit verwandter Transformationen.

Man beachte: In diesem Punkt wird zuerst die Berechnung der z-Übertragungsfunktion und dann die Bestimmung der zugehörigen Differenzengleichung genannt. Bisher war es umgekehrt. Zur Bearbeitung dieser Aufgabe ist es nötig, daß wir uns die notwendigen Werkzeuge verschaffen.

### Motivation des Zusammenhangs zwischen der Laplace-Variablen „s“ und „z“



Diesen Zusammenhang (den wir lediglich motiviert haben und der natürlich exakt gilt), sollten wir allerdings festhalten:

$$z = e^{sT} \quad (4.7)$$

### Die TUSTIN-Transformation und damit verwandte Transformationen.



Bei der **TUSTIN-Transformation** handelt es sich wieder einmal um einen sogenannten „Schuß aus der Hüfte“ wenn ein analoges Filter durch einen digitalen Filteralgorithmus ersetzt werden soll.

Eine schmutzige, aber im allgemeinen zuverlässige Methode, die sich in der Praxis großer Beliebtheit erfreut.

Herleitung: Beziehung (4.7) werde jetzt nach „s“ umgestellt und es wird der „ln“ in eine Reihe entwickelt. In den Formelsammlungen findet man gleich drei Reihenentwicklungen mit unterschiedlichen Konvergenzradien.

$$Es \text{ ist (vgl. 4.7)} \quad s = \frac{1}{T} \cdot \ln(z) = \begin{cases} \frac{1}{T} \cdot 2 \cdot \left[ \frac{z-1}{z+1} + \frac{(z-1)^3}{3(z+1)^3} + \dots \right] \Rightarrow s \approx \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} & (4.8) \\ \frac{1}{T} \cdot \left[ (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \dots \right] \Rightarrow s \approx \frac{1}{T} \cdot (z-1) & (4.9) \\ \frac{1}{T} \cdot \left[ \frac{z-1}{z} + \frac{(z-1)^2}{2z^2} + \dots \right] \Rightarrow s \approx \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{z} & (4.10) \end{cases}$$

Es werde die Näherung (4.8) genauer betrachtet. Ersetzt man die Ungefährbeziehung „ $\approx$ “ durch ein Gleichheitszeichen (was eigentlich unzulässig ist) so erhält man die TUSTIN-Transformation oder die „TUSTIN-Formeln“

***TUSTIN-Formeln***

$$\boxed{s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad ; \quad z = \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}}} \quad (4.11)$$

Diesen Gedanken kann man natürlich auch auf die anderen beiden Näherungsbeziehungen ausdehnen und weitere „Transformationen“ einführen:

$$\boxed{s = \frac{1}{T} \cdot (z-1) \quad ; \quad z = 1 + sT} \quad (4.12) \text{ und}$$

$$\boxed{s = \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \quad ; \quad z = \frac{1}{1 - sT}} \quad (4.13)$$

Wenden wir jetzt die TUSTIN-Trafo auf die gestellte Aufgabe (4.4.3 (b) ) an. Es sollte eine z-Übertragungsfunktion und eine Differenzengleichung von einem analogen Filter angegeben werden. Dieses analoge Filter liegt hardwaremäßig als Schaltung vor ; zumindest ist seine Übertragungsfunktion ( oder sein Frequenzgang) gegeben.

Diese Übertragungsfunktion laute (vgl. 4.2.3)

$$G_F(s) = \frac{4 \cdot 10^5}{s^2 + 6,28 \cdot 10^2 s + 4,0 \cdot 10^5} \cdot$$

Zufolge (4.11) kann (mit guter Näherung ?)  $G_F^\#(z)$  sofort angegeben werden zu

$$G_F^\#(z) = \frac{4,0 \cdot 10^5}{\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 6,28 \cdot 10^2 \left(\frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right) + 4,0 \cdot 10^5} \cdot$$

Doppelbruch beseitigen liefert:

$$G_F^\#(z) = \frac{4 \cdot 10^5 \cdot z^2 + 8 \cdot 10^5 \cdot z + 4 \cdot 10^5}{z^2 \cdot \left(\left(\frac{2}{T}\right)^2 + 6,28 \cdot 10^2 \cdot \left(\frac{2}{T}\right) + 4,0 \cdot 10^5\right) + z \cdot \left(-2 \cdot \left(\frac{2}{T}\right)^2 + 8 \cdot 10^5\right) + \left(\left(\frac{2}{T}\right)^2 - 6,28 \cdot 10^2 \cdot \left(\frac{2}{T}\right) + 4 \cdot 10^5\right)}$$

Setzen wir nun noch die Abtastzeit  $T=0,0001$  sec ein, so erhalten wir:

$$G_F^{\#}(z) = \frac{4 \cdot 10^5 \cdot z^2 + 8 \cdot 10^5 \cdot z + 4 \cdot 10^5}{z^2 \cdot (4.1296 \cdot 10^8) + z \cdot (-7.992 \cdot 10^8) + (3.8784 \cdot 10^8)}$$



Die Tustin-Transformation ist auch unter dem Namen „Bilineare Transformation“ bekannt.  $G_F^{\#}(z)$  kann aus  $G_F(s)$  auch mit Hilfe des MATLAB-Befehls (Signalprocessing Toolbox) „bilinear“ berechnet werden

Wie gut bildet nun ein digitales Filter (zeitdiskretes System), welches durch die obige  $z$ -Übertragungsfunktion  $G_F^{\#}(z)$  beschrieben wird, das ursprüngliche analoge Filter nach ? Eine Vorstellung davon gibt wieder ein Vergleich: Wie schon unter 4.2.3 schalten wir auf das analoge Filter die Eingangsfunktion  $u(t) = 2 \cdot \text{sign}(\cos(2\pi \cdot 625 \cdot t))$  und auf das digitale Filter die („abgetastete Eingangsfunktion“) Eingangsfolge  $u_k = 2 \cdot \text{sign}(\cos(0,3927 \cdot k))$  auf und vergleichen Ausgangsfunktion mit Ausgangsfolge.

Vorher eine ebenso wichtige Frage:



Wie kommt man von einer  $z$ -Übertragungsfunktion auf einen rekursiven Algorithmus?



Die dazu notwendige Vorgehensweise ist repräsentativ:

- Kreuzweise ausmultiplizieren:

Ausgehend von  $G_F^\#(z) = V(z)/U(z)$  erhält man

$$4,1296 \cdot 10^8 \cdot z^2 \cdot V(z) - 7,992 \cdot 10^8 \cdot z \cdot V(z) + 3,8784 \cdot 10^8 \cdot V(z) = \\ 4 \cdot 10^5 \cdot z^2 \cdot U(z) + 8 \cdot 10^5 \cdot z \cdot U(z) + 4 \cdot 10^5 \cdot U(z)$$

- Umordnen:

$$4,1296 \cdot 10^8 \cdot z^2 \cdot V(z) = 7,992 \cdot 10^8 \cdot z \cdot V(z) - 3,8784 \cdot 10^8 \cdot V(z) + 4 \cdot 10^5 \cdot z^2 \cdot U(z) + \\ 8 \cdot 10^5 \cdot z \cdot U(z) \\ + 4 \cdot 10^5 \cdot U(z)$$

- Normieren ( Abdividieren des Koeffizienten bei der höchsten Potenz in „z“ ):

$$V(z) = ( 7,992 \cdot 10^8 / 4,1296 \cdot 10^8 ) \cdot z^{-1} \cdot V(z) - ( 3,8784 \cdot 10^8 / 4,1296 \cdot 10^8 ) \cdot z^{-2} \cdot V(z) + \\ + ( 4 \cdot 10^5 / 4,1296 \cdot 10^8 ) \cdot U(z) + ( 8 \cdot 10^5 / 4,1296 \cdot 10^8 ) \cdot z^{-1} \cdot U(z) + \\ + ( 4 \cdot 10^5 / 4,1296 \cdot 10^8 ) \cdot z^{-2} \cdot U(z)$$

- Rekursion hierzu angeben:

$$v_k = 1.9353 \cdot v_{k-1} - 0.9392 \cdot v_{k-2} + 9,6862 \cdot 10^{-4} \cdot u_k + 1.9372 \cdot 10^{-3} \cdot u_{k-1} + \\ + 9,6862 \cdot 10^{-4} \cdot u_{k-2}$$

Für die Nachbildung der Rekursion haben wir schon ein Programm, nämlich „DIFGLN“ vgl. 4.2.3 „Lösung a“.

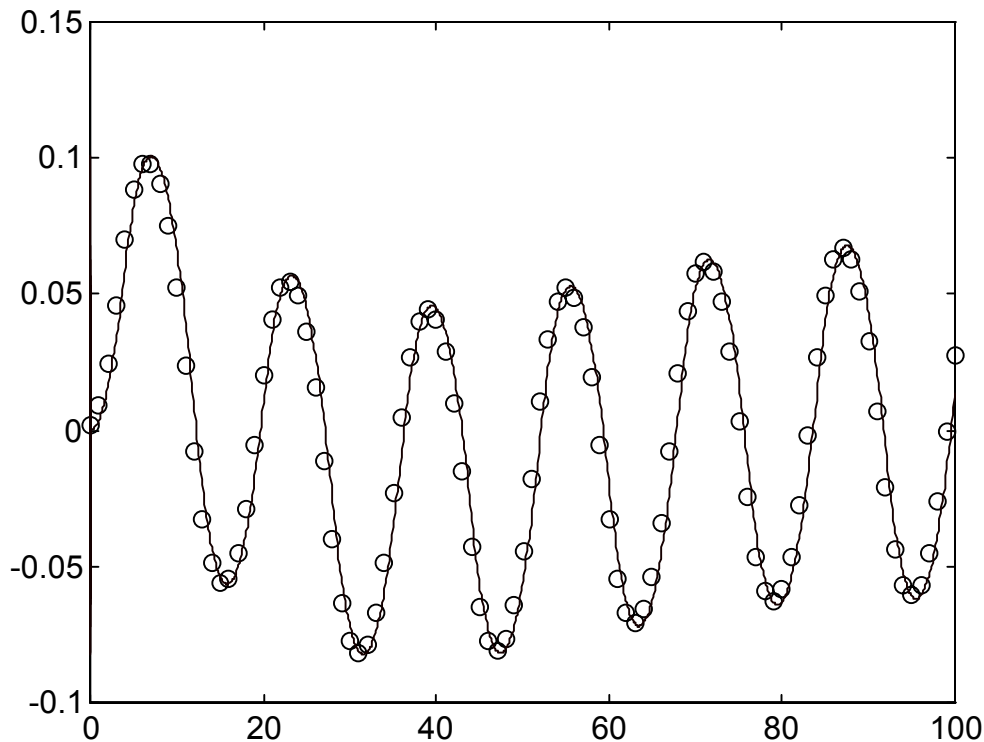
Ein weiteres Programm („DUEFKT“) das die obigen Rechenprozeduren

- Kreuzweise ausmultiplizieren:
- Umordnen:
- Normieren:
- Rekursion hierzu angeben:

selber durchführt und sodann die Rekursion ausführt wird noch zusätzlich angegeben.

Es unterscheidet sich nicht mehr wesentlich vom Programm „DIFGLN“ aus 4.2.3

Schauen wir uns aber zuerst die Simulationsergebnisse an:



**Bild 4.9:** *Simulationsergebnisse zum analogen und digitalen Filterausgang (vgl. auch Bild 4.6). Das digitale Filter wurde mit Hilfe der TUSTIN-Trafo bestimmt.*

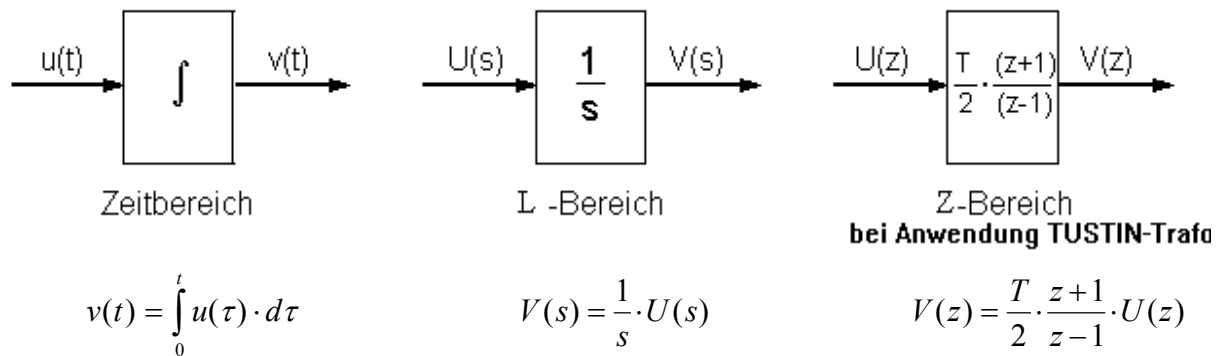
Weitere Beispiele zum Thema: TUSTIN-Transformation  
und damit verwandte Transformationen

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem Thema: Numerische Integration

Ein analoger Integrierer soll durch einen rekursiven Integrationsalgorithmus nachgebildet werden!

- Man gebe solch einen Algo unter Verwendung der TUSTIN -Trafo an und entscheide um welchen bekannten Integrationsalgorithmus es sich dabei handelt!
- Man gebe solch einen Algo unter Verwendung der Trafo (4.12) an und entscheide um welchen bekannten Integrationsalgorithmus es sich dabei handelt!
- Man gebe solch einen Algo unter Verwendung der Trafo (4.13) an und entscheide um welchen bekannten Integrationsalgorithmus es sich dabei handelt!
- Anstatt Näherungsbeziehung (4.11) ziehe man noch den nächsten Summanden für eine „erweiterte“ TUSTIN-Trafo heran und entscheide um welchen bekannten Integrationsalgorithmus es sich dabei handelt!

Lösung a)

Beziehung für  $V(z)$  ausmultipliziert liefert:

$$z \cdot V(z) - V(z) = \frac{T}{2} \cdot z \cdot U(z) + \frac{T}{2} \cdot U(z); \quad z \cdot V(z) = V(z) + \frac{T}{2} \cdot z \cdot U(z) + \frac{T}{2} \cdot U(z);$$

$$V(z) = z^{-1} \cdot V(z) + \frac{T}{2} \cdot U(z) + \frac{T}{2} \cdot z^{-1} \cdot U(z) \quad \Rightarrow \quad v_n = v_{n-1} + \frac{T}{2} u_n + \frac{T}{2} u_{n-1}$$

(Rekursive Form der Integration nach der Trapez-Regel)

Algorithmische Aufbereitung:

$$v_k = v_{k-1} + \frac{T}{2} u_n + \frac{T}{2} u_{n-1}$$

 $\frac{T}{2}$  einlesen $u_{alt} = 0; v_{alt} = 0$  $K_{\max}$  einlesen $K = 0$ 

Schleife:

 $K = K + 1$  $u$  holen

$$v = v_{alt} + \frac{T}{2} u + \frac{T}{2} u_{alt}$$

 $v_{alt} = v; u_{alt} = u$ für  $K \leq K_{\max}$  wiederhole Schleife

Die restlichen Aufgaben (Punkt b - Punkt d) bitte selber durchführen!

Wir beschäftigen uns noch mit dem Thema: Numerische Differentiation .

Ein analoger Differenzierer soll durch einen rekursiven Differentiationsalgorithmus nachgebildet werden!

- Man gebe solch einen Algo unter Verwendung der TUSTIN -Trafo an.
- Man gebe solch einen Algo unter Verwendung der Trafo (4.12) an und entscheide um welchen bekannten Differentiationsalgorithmus es sich dabei handelt!
- Man gebe solch einen Algo unter Verwendung der Trafo (4.13) an und entscheide um welchen bekannten Differentiationsalgorithmus es sich dabei handelt!
- Anstatt Näherungsbeziehung (4.11) ziehe man noch den nächsten Summanden für eine „erweiterte“ TUSTIN-Trafo heran und gebe den Algorithmus an!

Diese Rechnungen bitte selber durchführen. Fällt Ihnen bei b) oder c) ein Zusammenhang zu der Methode der Vorwärtsdifferenzen auf ?

#### 4.4.3. cBerechnung der z-Übertragungsfunktion wenn bereits die (Matrix-) Differenzengleichung vorliegt.

Diese Betrachtungen schließen an 4.2.3 c) und 4.2.3 d) an.

Hier kann man natürlich wieder wie unter 4.4.1 (ii) beschrieben vorgehen: Man stelle die Differenzengleichung (bzw. die Matrixdifferenzengleichung) unter Verwendung von Laufzeitgliedern ( oder Totzeitgliedern ) als Strukturbild dar. Dieses Strukturbild wird sodann in den Bildbereich der z-Transformation übertragen und die z-Übertragungsfunktion wird abgelesen.

Man kann auch alternativ so vorgehen: Ausgehend von (4.5)

$$\begin{aligned}\underline{x}_{n+1} &= \underline{\Phi} \underline{x}_n + \underline{h} y_n \\ \underline{v}_n &= \underline{c}^T \underline{x}_n + \underline{d} \cdot y_n\end{aligned}$$

transformiere man diese Matrixdifferenzengleichung in den Bildbereich der z-Transformation und erhält sofort:

$$G^{\#}(z) = \underline{c}^T (z\underline{E} - \underline{\Phi})^{-1} \underline{h} + \underline{d} \quad (4.14)$$

Damit ist (4.6) das Analogon zu Formel (3.0) aus der analogen Systemtheorie:

$$G(s) = \underline{c}^T (s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{b} + \underline{d} \quad (3.0)$$

$G^{\#}(z)$  ist natürlich wieder eine rationale Funktion. Also von Typ  $G^{\#}(z) = \frac{Z(z)}{N(z)}$  .

Zum Schluß sei wieder auf die Sprache **MATLAB** verwiesen.  $G^{\#}(z)$  berechnet sich aus  $\underline{\Phi}$ ,  $\underline{h}$ ,  $\underline{c}$  und  $\underline{d}$  mit der Anweisungszeile:

$$[Z,N] = \text{ss2tf}(\underline{\Phi}, \underline{h}, \underline{c}, \underline{d}).$$

Wir beschließen den Punkt 4.4 mit dem Listing eines Programms, das die Rekursion zu einer vorgelegten z-Übertragungsfunktion nachbildet und dann für eine gegebene Eingangsfolge die zugehörige Ausgangsfolge („off-line“) simuliert. Dabei bleibt offen, wie die z-Übertragungsfunktion entstanden ist.

```
/*      PROGRAM DUEFKT
```

```
Programm zur Simulation einer z-Uebertragungsfunktion:
```

$$G^{\#}(z) = \frac{B_N z^n + B_{N-1} z^{n-1} + \dots + B_1 z + B_0}{A_N z^n + A_{N-1} z^{n-1} + \dots + A_1 z + A_0} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

```
Im nachfolgenden Programm bedeuten in Bezug auf diese
Differenzengleichung:
```

N = n	Ordnung
K = k	laufender Index
KEND	Index des letzten Abtastzeitpunktes der Berechnung
Y(0) = yk	und U(0) = uk
Y(1) = yk-1	und U(1) = uk- 1
Y(N) = yk-n	und U(N) = uk-n

```
In diesem Programm wird davon ausgegangen, daß die
Ordnung "n" den Wert 50 nicht überschreitet.
Die Eingangsfolge wird in der FUNCTION U(K) bereitgestellt.
```

```
*/

#include <stdio.h>
#include <iostream.h>
#include <fstream.h>
#include <math.h>

//-----

float fUK(int K)
{
    double UK;
    // Testfkt1:  UK = SIGN(1.,COS(K/5.))

    // Testfkt2:  UK = 0.0
    //            if(K == 0) UK = 1;

    UK = 1;

    //      if (cos(0.3927 * K) >= 0)
    //          UK *= 1;
    //      else if (cos(0.3927 * K) < 0)
    //          UK *= -1;
    return (UK);
}

void main(void)
{
    int K, KEND, N;
    float A[51], B[51], AH[51], BH[51];
    float FELDA[501], FELDB[501], U[51], Y[51];
    float AK[51], BK[51];
    float SUMME, UK;

    printf("ORDNUNG DER DIFFERENZENGLEICHUNG? ");
    scanf("%i", &N);

    AK[0] = N + 1;
    BK[0] = N + 1;
    printf("NENNERKOEFFIZIENTEN EINGEBEN:\n");
    for (int i = N; i >= 0; i--)
    {
```

```

        printf("a%i = ", i);
        scanf("%f", &AH[i]);
        A[N - i] = AH[i] / AH[N];
        AK[N - i + 1] = A[N - i];
    }

    printf("\nZAEHLERKOEFFIZIENTEN EINGEBEN:\n");
    for (int i = N; i >= 0; i--)
    {
        printf("b%i = ", i);
        scanf("%f", &BH[i]);
        B[N - i] = BH[i] / AH[N];
        BK[N - i + 1] = B[N - i];
    }

    printf("\n\nANZAHL DER ZU SIMULIERENDEN SCHRITTE?");
    printf("\nKend = ");
    scanf("%i", &KEND);
    FELDA[0] = KEND + 1;
    FELDB[0] = KEND + 1;
//-----
//      AUSGABEMEDIUM VORBEREITEN:
    printf("\nK\tU[I]\tY[I]");
//-----
    for (int i = 0; i <= N; i++)
    {
        U[i] = 0.0;
        Y[i] = 0.0;
    }
//-----

    K = 0;

// Beginn der "Hauptschleife":
while (K <= KEND)
{
    U[0] = fUK(K);
    SUMME = 0;

    for (int i = 1; i <= N; i++)
        SUMME = SUMME - (A[i] * Y[i]);

    for (int i = 0; i <= N; i++)
        SUMME = SUMME + (B[i] * U[i]);

    Y[0] = SUMME;

    printf("\ni\t%f\t%f", K, U[0], Y[0]);

// Die naechsten beiden Anweisungszeilen bereiten
// das Schreiben auf die Platte vor:
    FELDA[K + 1] = U[0];
    FELDB[K + 1] = Y[0];

//      UPDATE PAST VALUES (UMSPEICHERN )
    for (int i = N; i >= 1; i--)
    {
        Y[i] = Y[i - 1];
        U[i] = U[i - 1];
    }
    K++;
}

//      ENDE DER HAUPTSCHLEIFE
// -----

// Schreiben auf die Platte

ofstream ofs(".\\output.dat");
ofs << "FELDA = [";
for (int i = 0; i <= (KEND + 1); i++)
    ofs << FELDA[i] << " ";
ofs << "];\n";

ofs << "FELDB = [";
for (int i = 0; i <= (KEND + 1); i++)
    ofs << FELDB[i] << " ";
ofs << "];\n";

```

```
//      MIT "TYPE FELDA.M" KANN MAN SICH EINEN DATENSATZ VON DER
//      PLATTE HOLEN UND ANSEHEN

//      Jetzt kommen noch zwei Felder mit den
//      Koeffizienten der Differenzengleichung:

      ofs << "AKOEFF = [";
      for (int i = 0; i <= (N + 1); i++)
      {
          printf(" %f ", AK[i]);
          ofs << AK[i] << " ";
      }
      ofs << "];\n";

      ofs << "BKOEFF = [";
      for (int i = 0; i <= (N + 1); i++)
          ofs << BK[i] << " ";
      ofs << "];\n";
      ofs.close();

// -----
//      ENDE HAUPTPROGRAMM
// -----
}
```

Dasselbe Programm noch einmal. Anstatt die zu filternden Werte aus einer Funktion zu holen, wird nunmehr ein Wandlerruf angestoßen. Das angegebene Programm läuft als „EXE“ mit den im Labor für Automatisierungstechnik vorhandenen Wandlern. Das Ergebnis der Filterung wird ebenfalls über DA-Wandler ausgegeben.

```

/*      PROGRAM DUEFKT

Programm zur Simulation einer z-Uebertragungsfunktion:


$$G \# (z) = \frac{B_N z^n + B_{N-1} z^{n-1} + \dots + B_1 z + B_0}{A_N z^n + A_{N-1} z^{n-1} + \dots + A_1 z + A_0} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$


Im nachfolgenden Programm bedeuten in Bezug auf diese
Differenzengleichung:
      N=n      Ordnung
      K=k      laufender Index
      KEND     Index des letzten
               Abtastzeitpunktes
               der Berechnung

      Y(0) = yk      und      U(0) = uk
      Y(1) = yk-1    und      U(1) = uk- 1

      Y(N) = yk-n    und      U(N) = uk-n

Um auf die mit A(1), A(2), ..., B(0), B(1), ... bezeichneten
Koeffizienten zu kommen, muß erst auf "AN" skaliert werden.

      A(1) = al      und      B(0) = bo
                               B(1) = b1

      A(N) = an      und      B(N) = bn

In diesem Programm wird davon ausgegangen, daß die
Ordnung "n" den Wert 50 nicht überschreitet.
Die Eingangsfolge wird in der FUNCTION U(K) bereitgestellt.

*/

#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <dos.h>
#include <math.h>
#include "userprot.h"

//Variable
DDH DAS1600;                //Device Handle
FRAMEH ADHandle;           //A/D Frame Handle
unsigned int far *DMABufPtr; //Pointer to allocated DMA buffer
WORD MemHandle;            //allocated Memory Handle
short Status;              //used to monitor DMA transfers
long Transfers, Trans_alt = 8; // used to monitor DMA transfers
char NumberOfBoards;       // number of boards in DAS1600.cfg
short Err;                 //Function return error flag
long Samples = 16, Abtastzeit; //Samples = Anzahl der abtast-Kanäle * 2
double DataBufEin[24];      //Wert für die Daten-Umsetzung int->double
unsigned int DataBufAus1, DataBufAus2;
                               //Datenpuffer für die zwei Ausgangskanäle
unsigned int DataBuf[24];    //Datenhilfspuffer

```



```

double abtasten()
{
    static int i;
    K_DMAStatus(ADHandle, &Status, &Transfers);
    if (Trans_alt != Transfers)
        printf(" Die Abtastzeit ist zu klein !!!!\n");
    do
    {
        K_DMAStatus(ADHandle, &Status, &Transfers);
        // Wenn ein Interrupt erfolgt ist, dann Aktion ausführen
        // wenn ein neuer Wert eingelesen ist, dann Schleife ausführen
        if ((i != Transfers) && ((Transfers == 0) || (Transfers == 8) || (Transfers == 16)))
        {
            /*(Warteschleife) Wenn ein neuer Wert eingelesen ist dann Schleife
            ausführen */
            Trans_alt = Transfers;
            DataBufEin[i] = (((double) (*(DMABufPtr + i) >> 4)) - 2048) / 204.8; /*
            Umwandlung in Doublewerte*/
            DataBufEin[i + 1] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 1) >> 4)) - 2048) / 204.8;
            DataBufEin[i + 2] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 2) >> 4)) - 2048) / 204.8;
            DataBufEin[i + 3] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 3) >> 4)) - 2048) / 204.8;
            DataBufEin[i + 4] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 4) >> 4)) - 2048) / 204.8;
            DataBufEin[i + 5] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 5) >> 4)) - 2048) / 204.8;
            DataBufEin[i + 6] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 6) >> 4)) - 2048) / 204.8;
            DataBufEin[i + 7] = (((double) (*(DMABufPtr + i + 7) >> 4)) - 2048) / 204.8;

            i = (int) Transfers; /* Nummer des Transfers auf Index zuweisen */
            break;
        }
    }
    while (Status & 1);
    return (DataBufEin[i]);
}

void init_funktion() /* Initialisierungs-Funk. für die DAS-1600 */
{
    /* Initialisieren von Hard- und Software */
    if ((Err = DAS1600_DevOpen("DAS1600.cfg", &NumberOfBoards)) != 0)
    {
        putch(7);
        printf("Error %X during DevOpen ", Err);
        return;
    }
    /* Aufbauen der Kommunikation mit dem Treiber durch ein Device Handle */
    if ((Err = DAS1600_GetDevHandle(0, &DAS1600)) != 0)
    {
        putch(7);
        printf("Error %X beim Ausführen der GetDevHandle", Err);
        exit(1);
    }
    /* AD-Handle dem Device zuordnen */
    if ((Err = K_GetADFrame(DAS1600, &ADHandle)) != 0)
    {
        putch(7);
        printf("Error %X beim Ausführen der Funktion GetADFrame", Err);
        exit(1);
    }
    /* Speicherplatz für die gewünschten Abtastungen reservieren */
    K_DMAAlloc(ADHandle, Samples, (void far * far *) &DMABufPtr, &MemHandle);
    if (DMABufPtr == NULL)
    {
        putch(7);
        printf("Error; Der DMA Buffer-Zeiger is NULL");
        exit(1);
    }
    // printf("Die Daten sind auf der Adresse %X:%X \n\n", FP_SEG(DMABufPtr),
    FP_OFF(DMABufPtr));
    /* DMA-Buffer und Anzahl der Abtastwerte dem A/D Frame zuweisen */
    K_SetDMABuf(ADHandle, DMABufPtr, Samples);
    /* Einstellen der Kanalempfindlichkeit (Verstärkung) */
    K_SetStartStopG(ADHandle, 0, 7, 0);
    /* Einstellen der Anzahl der Kanäle die eingelesen werden */
    K_SetStartStopChn(ADHandle, 0, 7);
    /* Interne Uhr setzen */
    K_SetClk(ADHandle, 0);
    /* Wert für die gewünschte Abtastzeit eingeben (Abtastzeit =
    1ms*Eingabewert) */
    printf("\nGeben Sie die Abtastzeit in Millisekunden ein (z.B.10=>Abtastzeit=10ms:");
    scanf("%i", &Abtastzeit);
    /* Taktrate einstellen */

```

```

K_SetClkRate(ADHandle, Abtastzeit*10000);
/* Trigger setzen */
K_SetTrig(ADHandle, 0);
/* Simultaneous Sample and Hold */
K_SetSSH(ADHandle, 1);
/* 'FREE-RUN'-Mode starten */
K_SetADFreeRun (ADHandle);
/* Umstellen auf Continuous-Run */
if ((Err = K_SetContRun (ADHandle)) != 0)
{
    putchar(7);
    printf("Error %X bei K_SetContRun !", Err);
    exit(1);
}
/* Datenerfassung starten */
K_DMASStart (ADHandle);
printf("Die DMA-Kanalwandlung ist gestartet !!\n");
}

void da_ausgabe(double Ausgabel) /* Funktion zur Digital-Analog-Ausgabe auf Kanal 0 und 1 */
{
    DataBufAus1 = ((unsigned int) ((Ausgabel * 204.75) + 2048)) << 4; /* Ausgabewerte für DAS
1600 konvertieren */
    DataBufAus2 = ((unsigned int) ((Ausgabel * 204.75) + 2048)) << 4; /* Ausgabewerte für DAS
1600 konvertieren */

    if ((Err = K_DAWrite(DAS1600, 0, DataBufAus1)) != 0) /* DA-Ausgabe auf Kanal 0 */
    {
        putchar(7);
        printf("Error %X bei K_DAWrite 0 !", Err);
        exit(1);
    }

    if ((Err = K_DAWrite(DAS1600, 1, DataBufAus2)) != 0) /* DA-Ausgabe auf Kanal 1 */
    {
        putchar(7);
        printf("Error %X bei K_DAWrite 1 !", Err);
        exit(1);
    }
}

//-----

void main(void)
{
    int K, KEND, N;
    int i;
    double A[51], B[51], AH[51], BH[51];
    double FELDA[501], FELDB[501], U[51], Y[51];
    double AK[51], BK[51];
    double SUMME;
    float help;

    printf("Programm zur Simulation einer z-Uebertragungsfunktion:\n\n");

    printf("
          BN*z^n + BN-1*z^n-1 + ... + B1*z + B0      Y(z)\n");
    printf("G(z)  = ----- = -----\n");
    printf("          AN*z^n + AN-1*z^n-1 + ... + A1*z + A0      U(z)\n\n");

    printf("ORDNUNG DER DIFFERENZENGLEICHUNG? ");
    scanf("%i", &N);

    AK[0] = N + 1;
    BK[0] = N + 1;
    printf("NENNERKOEFFIZIENTEN EINGEBEN:\n");
    for (i = N; i >= 0; i--)
    {
        printf("a%i = ", i);
        scanf("%f", &help);
        AH[i] = (double) help;
        A[N - i] = AH[i] / AH[N];
        AK[N - i + 1] = A[N - i];
    }
}

```

```

printf("\nZAEHLERKOEFFIZIENTEN EINGEBEN:\n");
for (i = N; i >= 0; i--)
{
    printf("b%i = ", i);
    scanf("%f", &help);
    BH[i] = (double) help;
    B[N - i] = BH[i] / AH[N];
    BK[N - i + 1] = B[N - i];
}

FELDA[0] = KEND + 1;
FELDB[0] = KEND + 1;

//-----
//      AUSGABEMEDIUM VORBEREITEN:
//printf("\nK\tU[I]\tY[I]");
//-----
for (i = 0; i <= N; i++)
{
    U[i] = 0;
    Y[i] = 0;
}

//-----

K = 0;

// Beginn der "Hauptschleife":
init_funktion(); //DAS1600 initialisieren
K_DMAStatus(ADHandle, &Status, &Transfers); //DMA-Überwachung
Trans_alt = Transfers;
printf("\nDie Berechnung ist gestartet!\n Abbruch mit beliebiger Taste.");
do
{
    U[0] = abtasten();
    SUMME = 0;

    for (i = 1; i <= N; i++)
        SUMME = SUMME - (A[i] * Y[i]);

    for (i = 0; i <= N; i++)
        SUMME = SUMME + (B[i] * U[i]);

    Y[0] = SUMME;

    printf("\n%i\t%f\t%f", K, U[0], Y[0]);
    K++;
    if (Y[0] >= 10)
        Y[0] = 10;
    else if (Y[0] <= -10)
        Y[0] = -10;
    da_ausgabe(Y[0]); // Ergebniswert der Rechnung auf Analogausgabe-Kanal 0 und 1
    ausgeben

//      UPDATE PAST VALUES (UMSPEICHERN )

    for (i = N; i >= 1; i--)
    {
        Y[i] = Y[i - 1];
        U[i] = U[i - 1];
    }
    if (kbhit()) break;
}while(1);

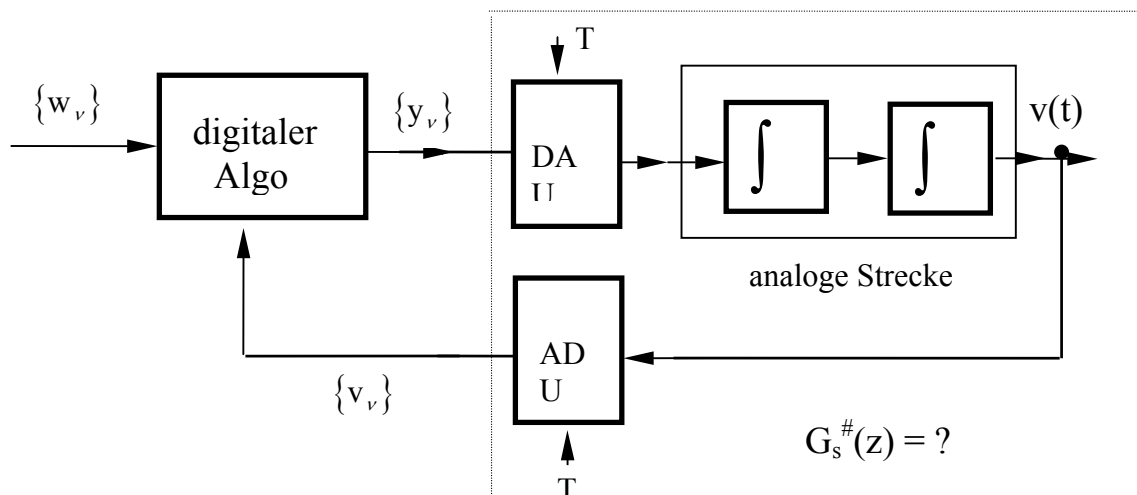
//      ENDE DER HAUPTSCHLEIFE
//DMA-Modus Stoppen
K_DMAStop(ADHandle, &Status, &Transfers);
//Speicher freigeben
K_DMALFree(MemHandle);
// -----
//      ENDE HAUPTPROGRAMM
// -----
}

```

## 4.5 Anwendung der z-Transformation von Folgen speziell auf zeitdiskrete Regelungssysteme

„Wenn ich die Folgen geahnt hätte, wäre ich Uhrmacher geworden.“ (A.Einstein)

**4.5.1 Beispiel:** Wir wollen von einer Blockstruktur ausgehen wie sie uns von Bild 4.1 bzw. 4.2 schon bekannt ist. Als analoge Strecke soll der Einfachheit halber ein Doppelintegrierer vorliegen.



Die Abtastzeit sei 10 msec.

Es ist die z-Übertragungsfunktion  $G_s^{\#}(z) = \frac{V(z)}{Y(z)}$  zu berechnen. Dieses Beispiel wird später (vgl. Beispiel 4.8.1) fortgeführt.

**Lösung 1:** Ausgangspunkt sei das Zustandsmodell der Regelstrecke. Hierfür lesen wir aus dem obigen Bild das analoge Zustandsmodell ( $x_1$  und  $x_2$  sinnvoll eingeführt) ab:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y_T$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Nunmehr kann man das diskrete Zustandsmodell - entsprechend Formel (4.3) - berechnen. Es ist nach Formel (4.1)  $\Phi(T) := [E + \underline{A} T + \underline{A}^2 T^2/(2!) + \underline{A}^3 T^3/(3!) + \dots]$

Mit  $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ergibt sich  $\underline{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{A}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  usw.

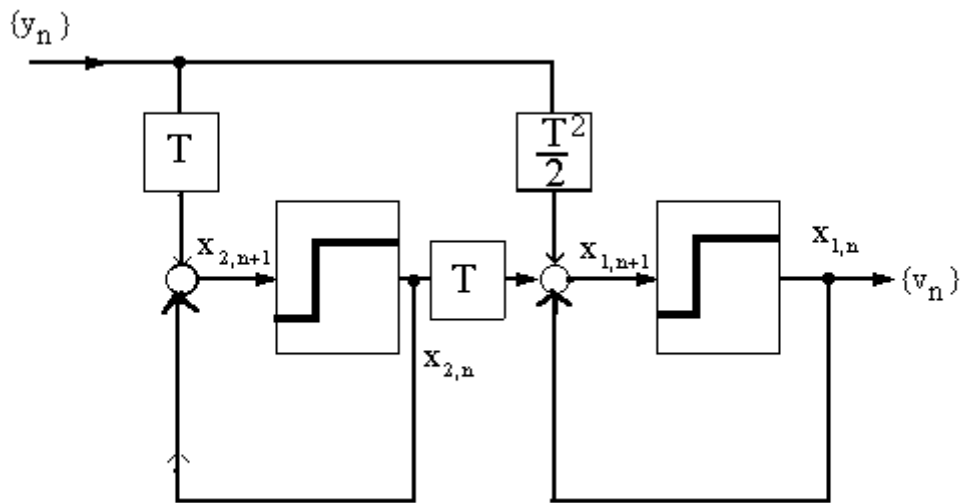
Folglich ist  $\Phi(T) = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und nach (4.2)  $\underline{h}(T) = \int_{\tau=0}^{\tau=T} \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{pmatrix}$

Das zeitdiskrete Zustandsmodell lautet mithin

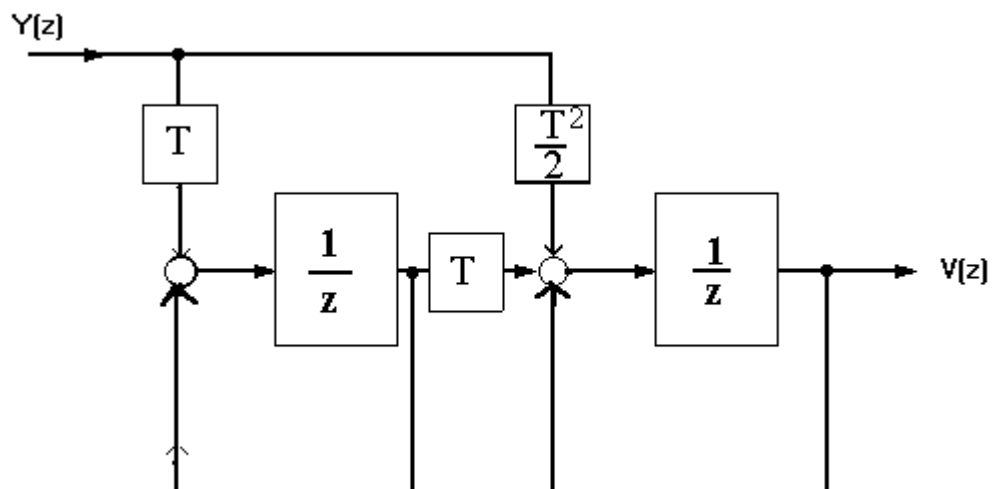
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_n + \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{pmatrix} \cdot y_n$$

$$v_n = (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_n$$

Strukturbild hierzu zeichnen:



... in den Bildbereich der z-Transformation übertragen



... umformen und  $G^\#(z)$  ablesen als:

$$G^\#(z) = \frac{T^2}{2} \cdot \frac{(z+1)}{(z-1)^2}$$

Lösung 2: Ausgehend von der Differenzengleichung, erhält man unter Verwendung der Beziehung (4.14):

$$\begin{aligned} G^\#(z) &= \underline{c}^T (z\underline{E} - \underline{\Phi})^{-1} \underline{h} + d \\ G^\#(z) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} T^2 \\ 2 \\ T \end{pmatrix} + 0 \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z-1 & +T \\ 0 & z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T^2 \\ 2 \\ T \end{pmatrix} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} (z-1) & , & T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T^2 \\ 2 \\ T \end{pmatrix} = \frac{T^2}{2} \cdot \frac{(z+1)}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

Lösung 3: Sei  $h_T(t)$  die Übergangsfunktion (Sprungantwort) der Regelstrecke. Aus der VL „Systemtheorie“ ist die Formel

$$G^\#(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left(\left(h_T(t)\right)\Big|_{t=n \cdot T}\right) \quad (4.15)$$

bekannt.

Für unser Beispiel können wir schreiben:

$$\begin{aligned} G^\#(z) &= \frac{z-1}{z} \cdot Z\left(\left(L^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right)\Big|_{t=n \cdot T}\right) \\ &\stackrel{\text{Tafelwerke zur z-Trafo}}{=} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z \cdot (z+1)}{(z-1)^3} \\ &= \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

Lösung 4: Schließlich kann man  $G^\#(z)$  - zwar nicht mit allgemeinen Ausdrücken, aber immerhin mit konkreten Zahlen - mit Hilfe von MATLAB - Befehlen berechnen.

Hier würden die entsprechenden MATLAB-Anweisungszeilen lauten:

```
A = [0. 1.
      0. 0.];
b = [0.
      1.];
c = [1. 0.];
d = 0.;

T = 0.01;

[Phi,h] = c2d(A,b,T);

[Zd,Nd] = ss2tf(Phi,h,c,d)
```

Man erhält als Ausgabemedium:  $Zd = [0 \ 0.5 \ 0.5]$   
 $Nd = [1 \ -2. \ 1]$

#### **4.5.2 Weitere Korrespondenzen**

Für einfache und praktisch wichtige Regelstrecken ist das zugehörige  $G^\#(z)$  bereits ausgerechnet worden. Die umständlichen Berechnungen („Lösung 1“ bis „Lösung 3“ in 4.5.1) entfallen damit.

Für weitere Korrespondenzen sei auf die einschlägige Fachliteratur - für Zahlenrechnungen auf MATLAB (wie „Lösung 4“ in 4.5.1) verwiesen.

$$G_s(s)$$

$$G_s^\#(z)$$

$$K_s$$

$$K_s$$

$$K_I/s$$

$$K_I \frac{T}{z-1}$$

$$K_s \cdot \frac{1}{1+s \cdot \tau_s}$$

$$K_s \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau_s}}}{z - e^{-\frac{T}{\tau_s}}}$$

$$K_s \cdot \frac{1}{1+s \cdot \tau_s} \cdot \frac{1}{T_1 \cdot s} \quad \frac{K_s \tau_s}{T_1} \cdot \frac{\left( \frac{T}{\tau_s} - 1 + e^{-\frac{T}{\tau_s}} \right) \cdot z + 1 - \left( \frac{T}{\tau_s} + 1 \right) \cdot e^{-\frac{T}{\tau_s}}}{(z-1) \cdot \left( z - e^{-\frac{T}{\tau_s}} \right)}$$

$$K_s \cdot \frac{1}{(1+s\tau_1) \cdot (1+s\tau_2)} \quad K_s \cdot \frac{b_1 z + b_0}{(\tau_1 - \tau_2) \cdot \left( z - e^{-\frac{T}{\tau_1}} \right) \cdot \left( z - e^{-\frac{T}{\tau_2}} \right)}$$

mit

$$b_1 = \left( \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}} \right) \cdot \tau_1 - \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau_2}} \right) \cdot \tau_2 \right)$$

$$b_0 = \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}} \right) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau_2}} \right) \cdot (\tau_1 - \tau_2) - \left( \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}} \right) \cdot \tau_1 - \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau_2}} \right) \cdot \tau_2 \right)$$

$$\frac{K_S \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot D \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

$$K_S \cdot \frac{b_1 z + b_0}{z^2 - 2\alpha \cdot \cos(\omega_d \cdot T) \cdot z + \alpha^2}$$

mit  $0 \leq |D| < 1$ 

mit

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - D^2}$$

$$\alpha = e^{-D\omega_n T}$$

$$\Phi = \arccos(D)$$

lautet

$$b_1 = 1 - \frac{\alpha \cdot \sin(\Phi)}{\sqrt{1 - D^2}}$$

$$b_0 = \alpha \cdot \left( \alpha + \frac{\sin(\Phi)}{\sqrt{1 - D^2}} \right)$$



#### 4.6 Systemtheoretische Ergänzungen zum Thema: Zeitdiskrete Regelstrecken

Wir beginnen wieder mit der Beziehung (4.5):

$$\begin{aligned}\underline{x}_{n+1} &= \underline{\Phi} \underline{x}_n + \underline{h} y_n \\ v_n &= \underline{c}^T \underline{x}_n + \underline{d} \cdot y_n\end{aligned}\quad (4.5)$$

Zur Darstellung des Zusammenhangs zwischen  $\{y\}_n$  und  $\{v\}_n$  als Faltungssumme:

Der Definition der „e-Reihe“ folgend wird für die „Transitionsmatrix“

$\underline{\Phi}(T) := [\underline{E} + \underline{A} T + \underline{A}^2 T^2/(2!) + \underline{A}^3 T^3/(3!) + \dots]$  vgl. (4.1) in der Praxis häufig die

abkürzende Darstellung  $\underline{\Phi}(T) := e^{\underline{A}T}$  (4.16)

verwendet. Ausgehend von (4.1) bzw. (4.16) erkennt man sofort die folgenden Eigenschaften dieser Transitionsmatrix (bitte selber nachprüfen!):

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}(0) &= \underline{E} \quad (\text{Einheitsmatrix}) \\ \underline{\Phi}(t_1 + t_2) &= \underline{\Phi}(t_1) \cdot \underline{\Phi}(t_2) \\ \underline{\Phi}(-t) &= \underline{\Phi}(t)^{-1} \\ \frac{d}{dt} \underline{\Phi}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{\Phi}(t); \quad \underline{\Phi}(0) = \underline{E}\end{aligned}\quad (4.17)$$

Betrachten wir noch einmal den ersten Teil der Matrix-Zustands-Differenzengleichung (4.5):

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{\Phi}(T) \underline{x}_n + \underline{h}(T) y_n$$

Einzelnen hingeschrieben erhalten wir:

$$\underline{x}_1 = \underline{\Phi}(T) \underline{x}_0 + \underline{h}(T) y_0$$

$$\begin{aligned}\underline{x}_2 &= \underline{\Phi}(T) \underline{x}_1 + \underline{h}(T) y_1 = \underline{\Phi}(T)^2 \underline{x}_0 + \underline{\Phi}(T) \underline{h}(T) y_0 + \underline{h}(T) y_1 \\ &= \underline{\Phi}(2T) \underline{x}_0 + \underline{\Phi}(T) \underline{h}(T) y_0 + \underline{h}(T) y_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{x}_3 &= \underline{\Phi}(T) \underline{x}_2 + \underline{h}(T) y_2 = \underline{\Phi}(T)^3 \underline{x}_0 + \underline{\Phi}^2(T) \underline{h}(T) y_0 + \underline{\Phi}(T) \underline{h}(T) y_1 + \underline{h}(T) y_2 \\ &= \underline{\Phi}(3T) \underline{x}_0 + \underline{\Phi}(2T) \underline{h}(T) y_0 + \underline{\Phi}(T) \underline{h}(T) y_1 + \underline{h}(T) y_2\end{aligned}$$

.

.

.

$$\underline{x}_n = \underline{\Phi}(nT) \underline{x}_0 + \sum_{i=1}^n \underline{\Phi}(nT - iT) \cdot \underline{h}(T) \cdot y_{i-1} \quad (4.18)$$

Die Ausgangsgröße  $v_n$  berechnet sich - man vergleiche mit (4.5) - wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \underline{c}^T \underline{x}_0 + d \cdot y_0 \\ v_n &= \underline{c}^T \underline{x}_n + d \cdot y_n = \underline{c}^T \underline{\Phi}(nT) \underline{x}_0 + \sum_{i=1}^n \underline{c}^T \underline{\Phi}(nT - iT) \cdot \underline{h}(T) \cdot y_{i-1} + d \cdot y_n \\ n &\in \mathbb{N} \end{aligned} \right\} (4.19)$$

Für den Fall, daß der Einfluß des Anfangswertes „abgeklungen“ oder von Anfang an Null ist, sowie daß  $d = 0$  (nicht sprungfähiges System) gilt, beginnt die Zählung für die Ausgangsfolge bei  $n=1$ . Man hat dann:

$$v_n = \sum_{i=1}^n \underline{c}^T \underline{\Phi}(nT - iT) \cdot \underline{h}(T) \cdot y_{i-1} \quad \underset{g_{n-i} := \underline{c}^T \underline{\Phi}(nT - iT) \cdot \underline{h}(T)}{=} \sum_{i=1}^n g_{n-i} \cdot y_{i-1}; \quad (4.20)$$

$n \in \mathbb{N}$



In nicht wenigen Fachbüchern wird die Faltungssumme angegeben als

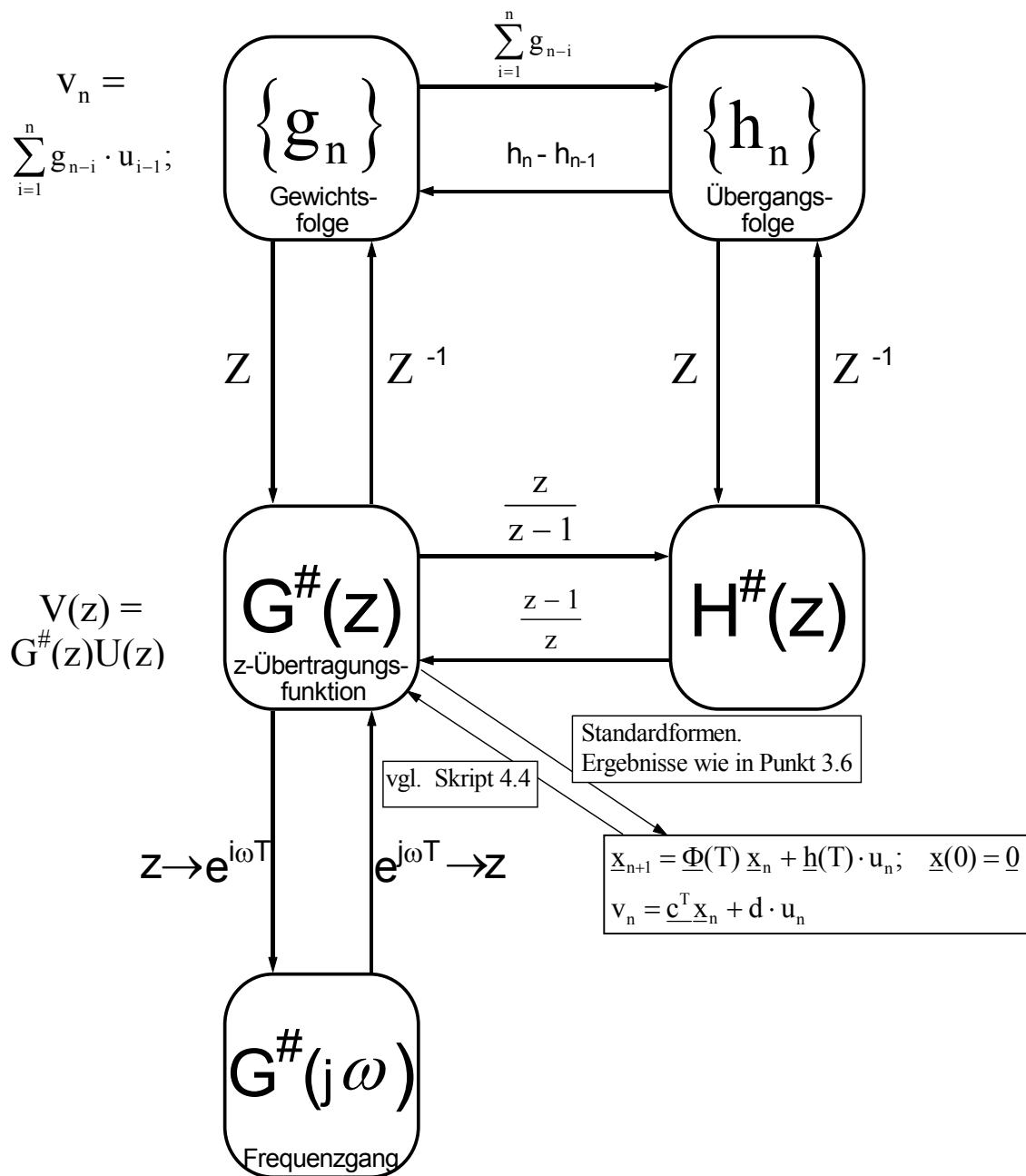
$$v_n = \sum_{i=0}^n g_{n-i} \cdot y_i \quad \text{was nicht genau der Formel (4.20) entspricht.}$$

Der Unterschied liegt in der verschiedenen Definition der Sprungfunktion  $\sigma(t)$ :

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad \text{bei uns,} \quad \text{bzw.} \quad \sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{in anderen}$$

Man nennt  $\{g_0, g_1, g_2, \dots\} := \{g_n\}$  die Gewichtsfolge des zeitdiskreten Systems (oder Abtastsystems). Man erhält sie experimentell als Ausgangsfolge, wenn man auf ein zeitdiskretes System die „Stoßfolge“  $\{1, 0, 0, \dots\}$  aufschaltet. ( $\rightarrow$  vgl. VL Systemtheorie)

Wenn wir nun die Ergebnisse zusammenstellen, dann kommen wir auf ein Tableau das demjenigen aus 3.2 sehr ähnlich ist. Es gilt für zeitdiskrete (digitale) Regelstrecken entsprechend Bild 4.1 oder Bild 4.2. Deren Eingangsfolgen werden mit  $\{y_n\}$  bzw.  $\{u_n\}$  und deren Ausgangsfolgen mit  $\{v_n\}$  bezeichnet.



**Bild 4.10:** Darstellung der systemtheoretischen Zusammenhänge für zeitdiskrete Systeme die durch Abtastung entstanden sind (vgl. Bild 4.2)

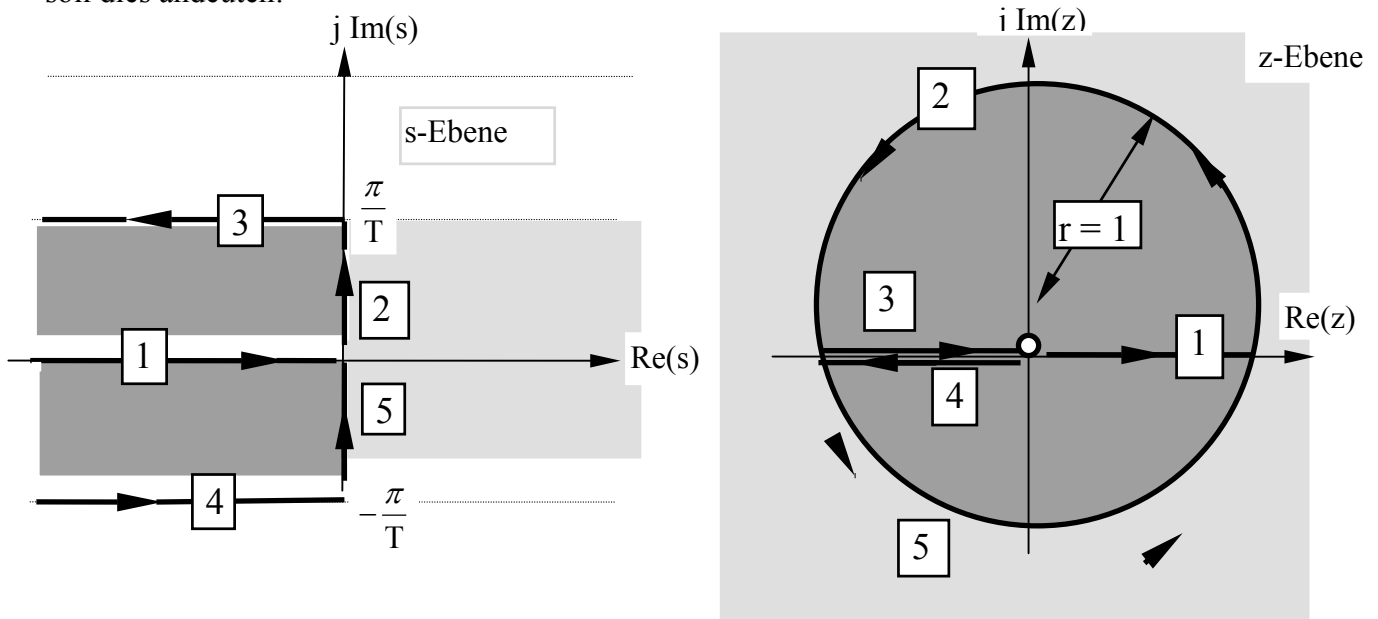
## 4.7 Zur Stabilität von zeitdiskreten Systemen

### 4.7.1 Grundlagen

Bei linearen, analogen Systemen mit konstanten Koeffizienten gilt bekanntlich:

$$\left. \begin{array}{l} \text{System} \\ \text{stabil} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{für alle Pole } s_{i\infty} \text{ von } G(s) \text{ gilt} \\ \operatorname{Re}\{s_{i\infty}\} < 0 \end{array} \right.$$

Der Zusammenhang zwischen "s" und "z" lautet  $z = e^{sT}$  (vgl. Herleitung zu (4.7)). Diese Funktion bildet die komplexe s-Ebene in die komplexe z-Ebene ab. Die nachfolgende Skizze soll dies andeuten:



**Bild 4.11:** Zur Abbildungseigenschaft der komplexen Funktion  $z = e^{sT}$

Bild 4.11 zeigt also, daß bereits ein „Fundamentalstreifen“  $\left\{ s \in \mathbb{C} / -\frac{\pi}{T} \leq \operatorname{Im}(s) < +\frac{\pi}{T} \right\}$  von der Breite  $2 \cdot \frac{\pi}{T}$  auf die gesamte z-Ebene abgebildet wird. Darüber- und darunterliegende Fundamentalstreifen  $\left\{ s \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z} / \frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi}{T} \leq \operatorname{Im}(s) < \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \pi}{T} \right\}$  werden ebenfalls wieder vollständig auf die komplexe z-Ebene abgebildet.

Für ein lineares, zeitdiskretes System (digitales System) gilt offenbar :

$$\left. \begin{array}{l} \text{zeitdiskretes System} \\ \text{stabil} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{für alle Pole } z_{i\infty} \text{ von } G^\#(z) \text{ gilt} \\ |z_{i\infty}| < 1 \end{array} \right.$$



Versuchen Sie Aufgabe Nr. 4 aus dem Anhang zu diesem Kapitel zu bearbeiten.

**Beispiel:**

Ist  $v_{n+1} = 8v_n + 3u_n + 2u_{n-1}$  die Differenzengleichung eines stabilen Filters?

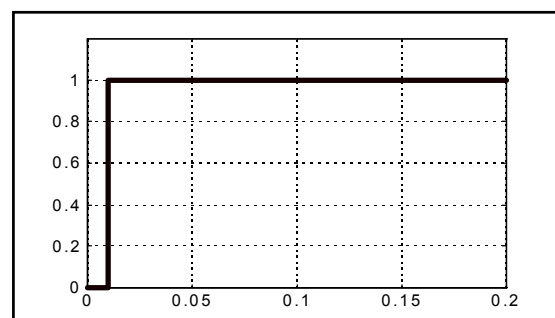
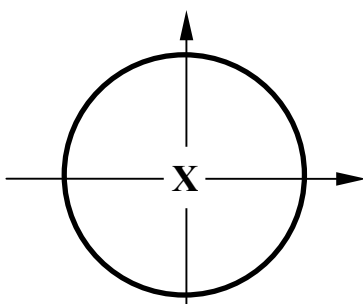
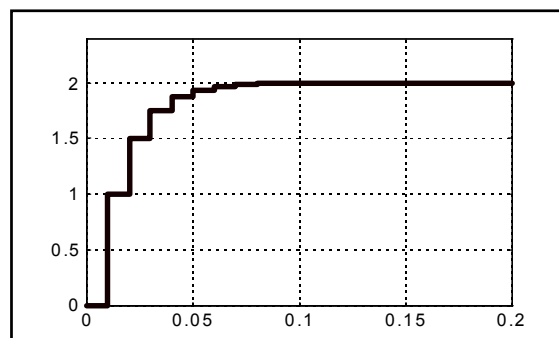
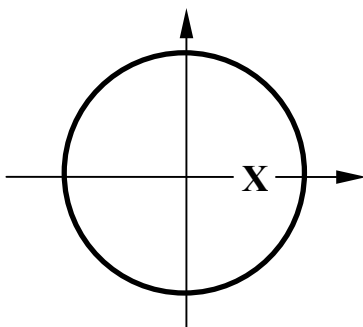
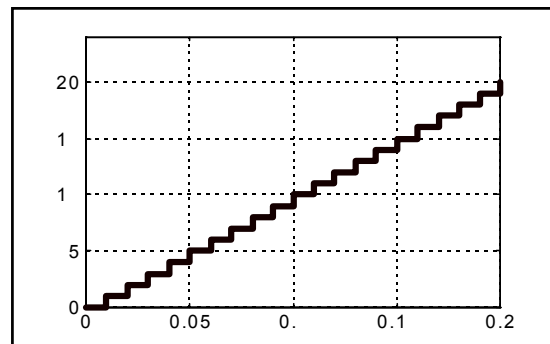
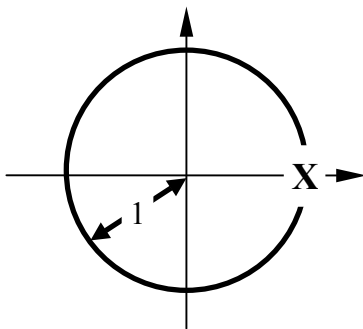
$$z \{ zV(z) = 8V(z) + 3U(z) + 2z^{-1}U(z) \}$$

$$(z - 8)V(z) = \left(3 + \frac{2}{z}\right)U(z)$$

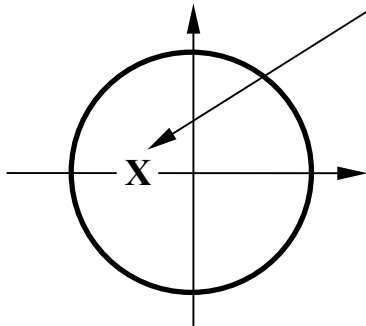
$$\frac{V(z)}{U(z)} = \frac{3 + \frac{2}{z}}{z - 8} = \frac{3z + 2}{z \cdot (z - 8)} = G^\#(z)$$

$\Rightarrow$  instabil, da ein Pol ( $z_{\text{ioo}} = +8$ ) mit  $|z_{\text{ioo}}| > 1$  und damit außerhalb des Einheitskreises

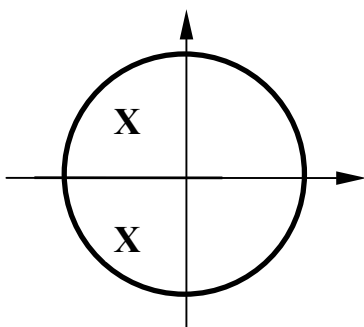
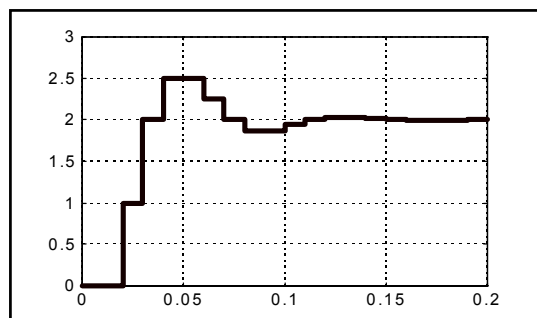
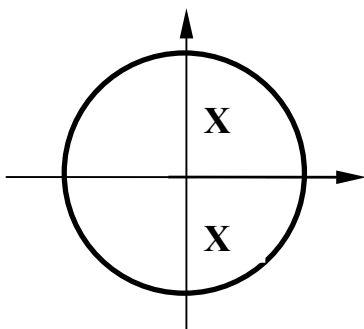
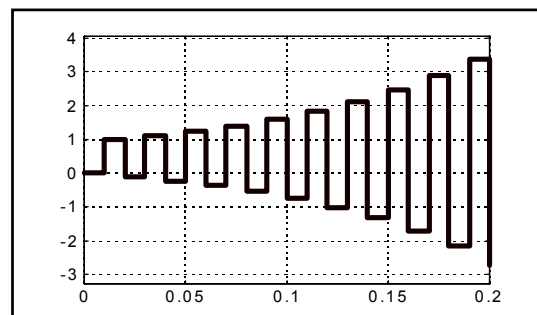
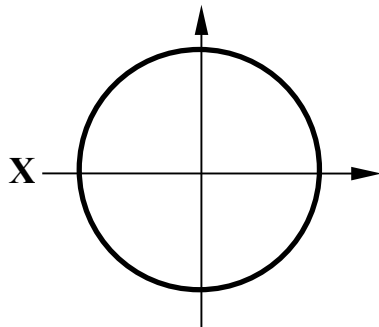
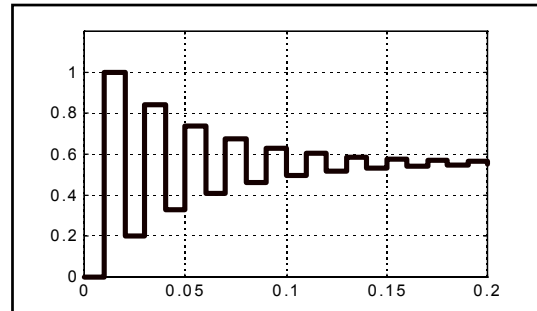
**4.7.2 Zusammenhang: Polstellenverteilung i.d. komplexen z-Ebene  $\Leftrightarrow$  Sprungantwort.**



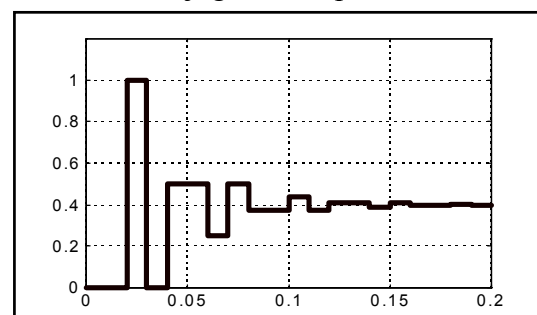
„Klirrpole“



Klirrpole sollten bei Gw vermieden



Konjugiert komplexe



#### 4.8 Zur Synthese von Regelalgorithmen mit dem WOK-Verfahren.

Dieser Punkt kann in Analogie zu 3.8 (speziell zu 3.8.5) gesehen werden. Wir beginnen mit einem Beispiel.

**Beispiel 4.8.1:** Wir nehmen Bezug auf das Beispiel 4.5.1 und fordern einen Regelalgorithmus, so daß die analoge Regelgröße  $v(t)$  bei Vorlage von

$\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = \{1, 1, 1, \dots\}$  die abgetastete Sprungfunktion folgende Spezifikationen aufweist:

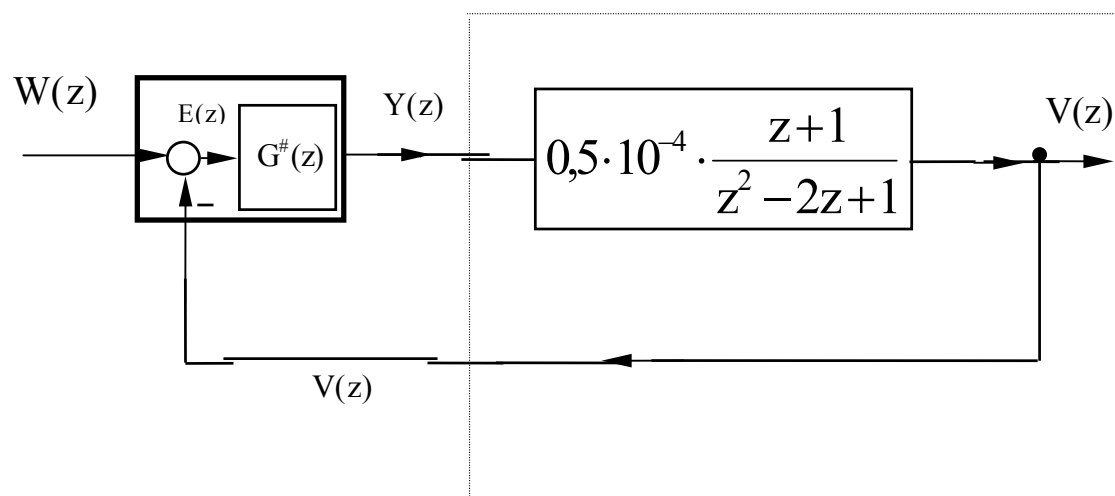
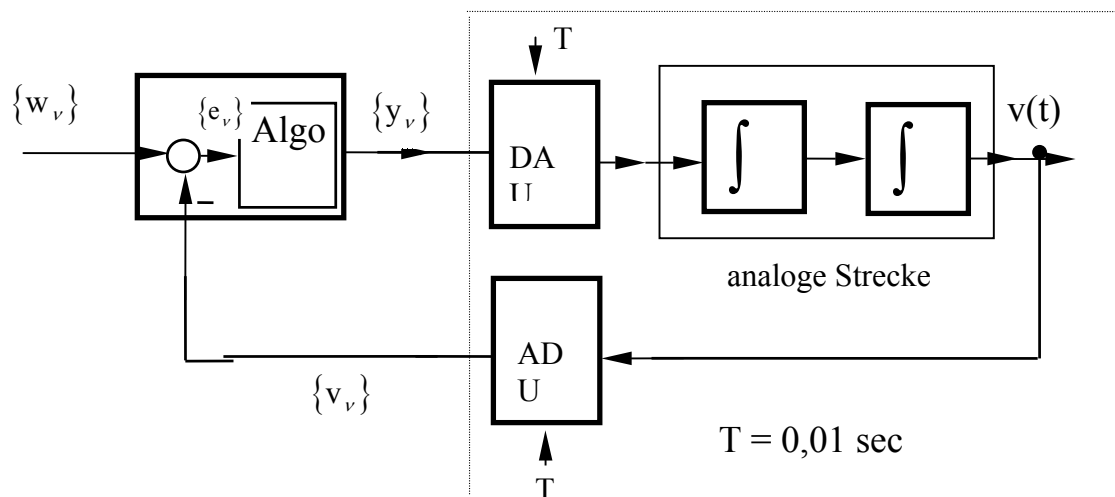
$$\ddot{u} = 0,15$$

$$\tau_{ab} = 0,05 \text{ sec}$$

Die Abtastzeit sei wie bei 4.5.1 unverändert :  **$T = 0,01 \text{ sec}$** .

**Lösung:** Der Regelalgorithmus realisiert zunächst die Differenzbildung:  $e_n = w_n - v_n$ .

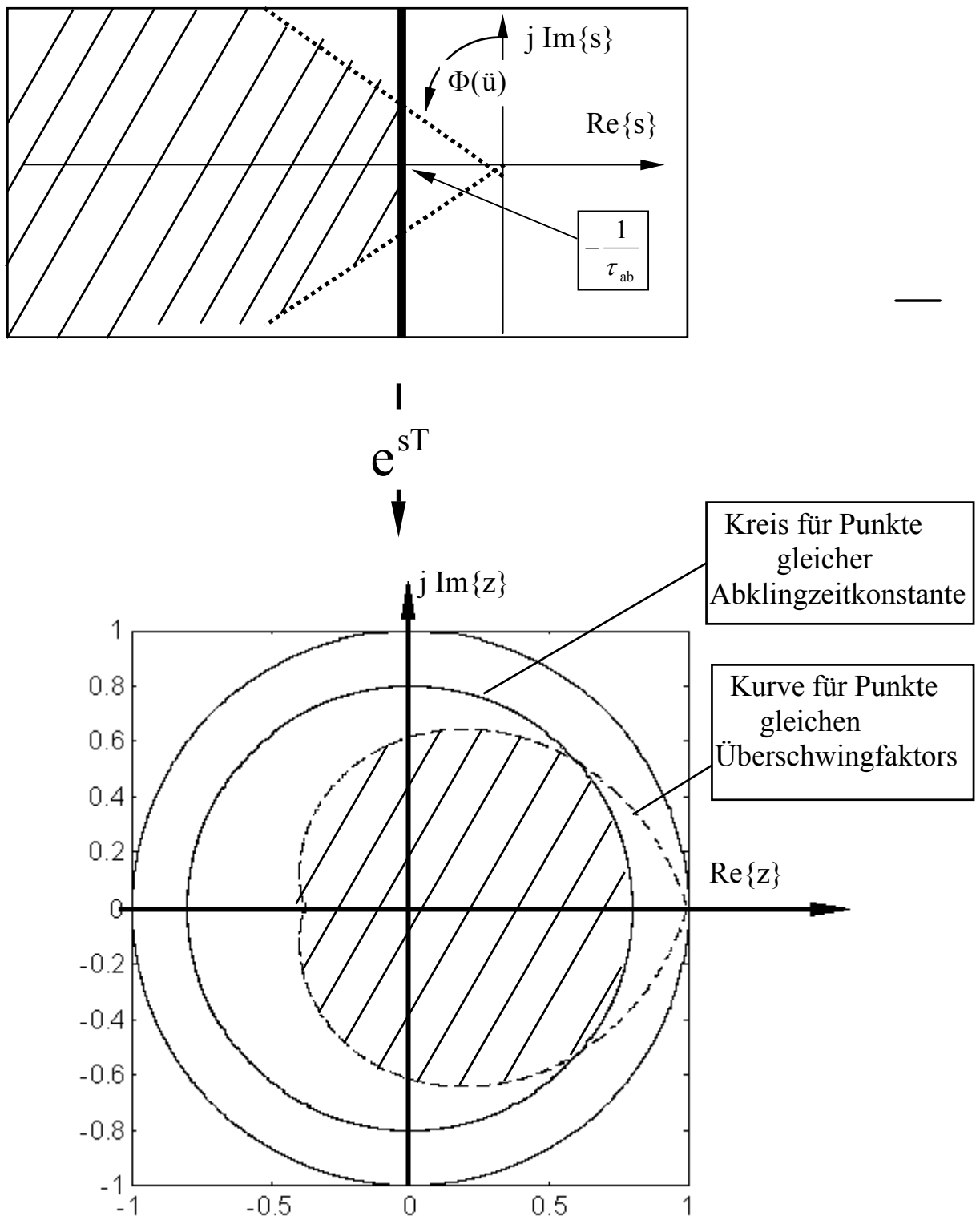
Die Folge  $\{e_n\}$  wird vom Regelalgorithmus in die Stellfolge  $\{y_n\}$  umgewandelt. Das gibt zu folgender Darstellung Anlaß.



**Bild 4.12:** Darstellung der gestellten Regelaufgabe im Folgenraum und im Bildbereich der  $z$ -Transformation.



In Anlehnung an 3.8.5 überträgt man das Dominanzgebiet zur geforderten Übergangsfunktion vom Bildbereich der Laplacetransformation mittels der Abbildungsfunktion  $z = e^{sT}$  in den Bildbereich der z-Transformation (vgl. Skizze):



**Bild 4.13:** Zur Abbildung des Dominanzgebiets (schraffiert) vom „s-Bereich“ in den „z-Bereich“

Die Abbildung 4.13 demonstriert anschaulich, wie sich die Grenzen des Dominanzgebiets aus dem „s-Bereich“ in den „z-Bereich“ abbilden.

- Linien parallel zur Imaginärachse im Abstand  $-\frac{1}{\tau_{ab}}$  zur Imag-Achse in der komplexen

s-Ebene

bilden sich ab in Kreise um den Ursprung der z-Ebene mit dem Radius  $r = e^{-\frac{T}{\tau_{ab}}}$

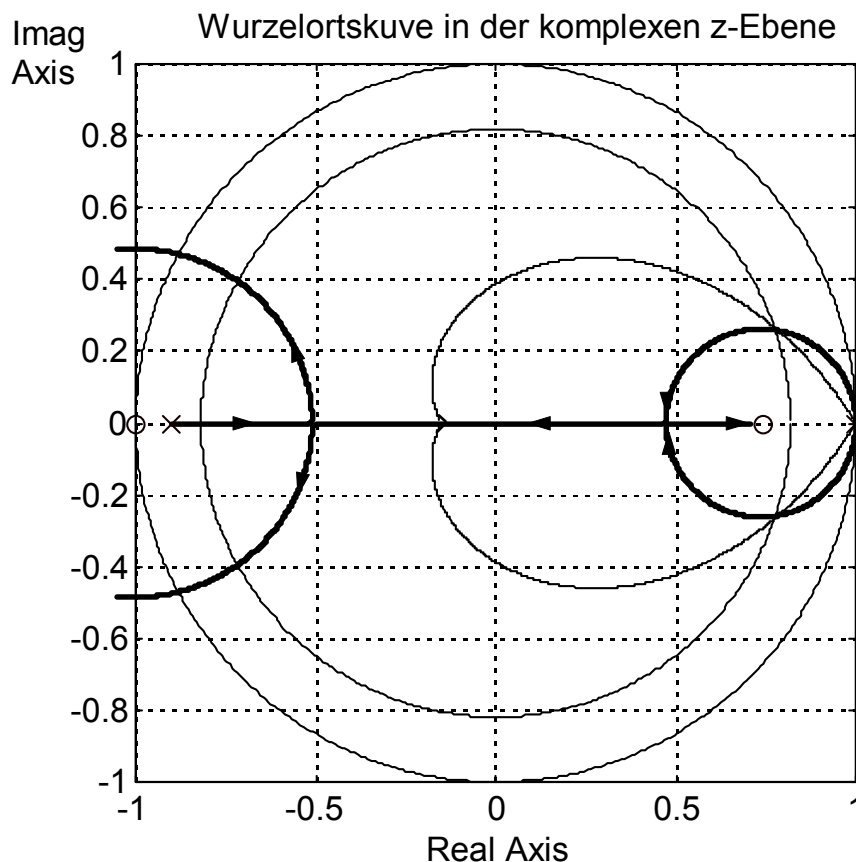
- Geraden die durch den Ursprung der komplexen s-Ebene gehen und mit der Imag-Achse den Winkel  $\Phi$  einschließen, bilden sich in Kurven in der z-Ebene ab, die durch

$$\text{Re} = e^{-\rho T \cdot \sin \Phi} \cdot \cos(\rho T) \text{ und } \text{Im} = e^{-\rho T \cdot \sin \Phi} \cdot \sin(\rho T); 0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{T}$$

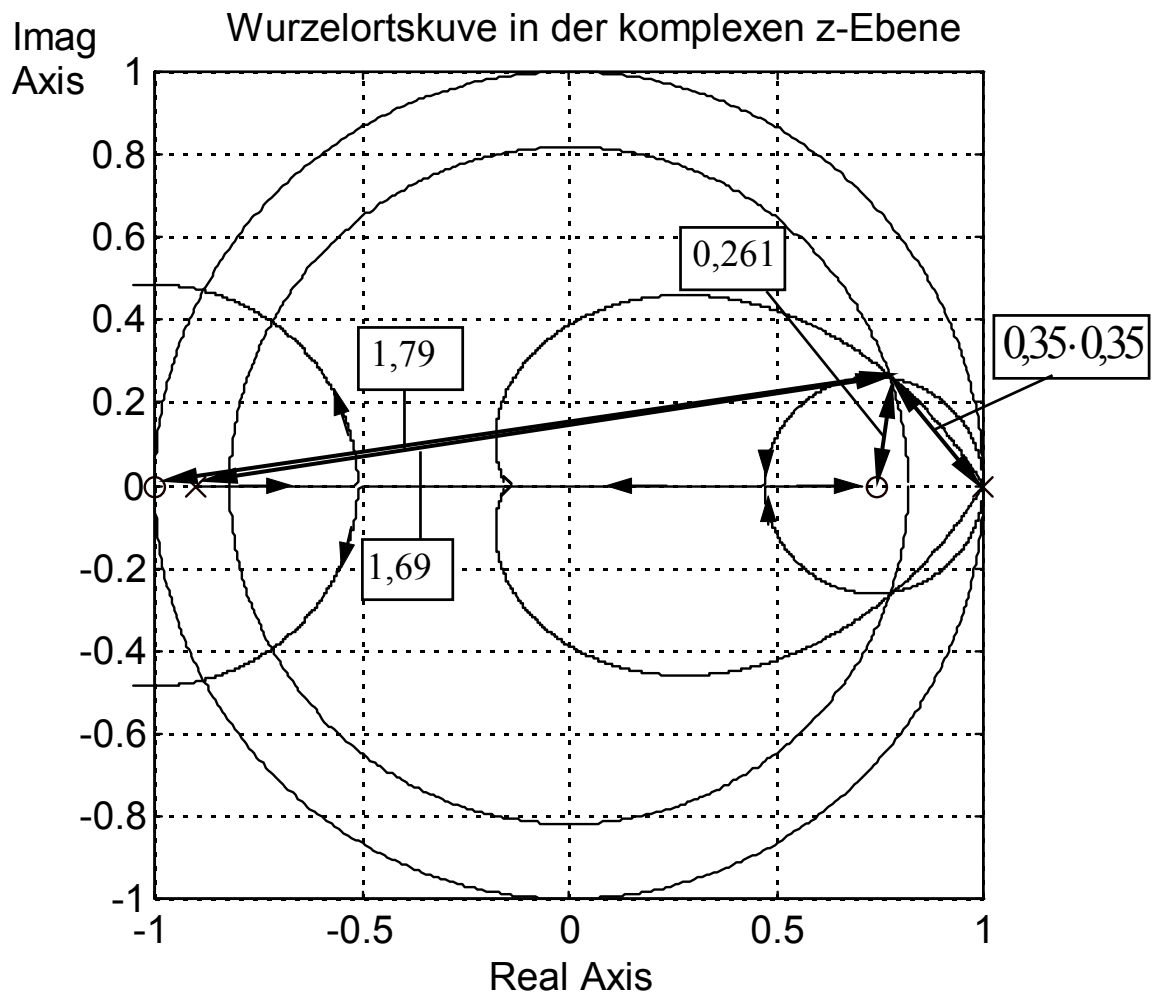
beschrieben werden. ( Vgl. MATLAB-Listing **BSP481.M** )

Nun zurück zu unserer Aufgabe: Wir entscheiden uns (nach mehreren Versuchen mit dem MATLAB-Programm BSP481.M) für eine Reglerübertragungsfunktion vom Typ

$$G_R^\#(z) = K_R \frac{z - 0,7}{z + 0,95} \text{ und erhalten damit folgende WOK:}$$



Den K-Wert lesen wir aus der WOK ab:



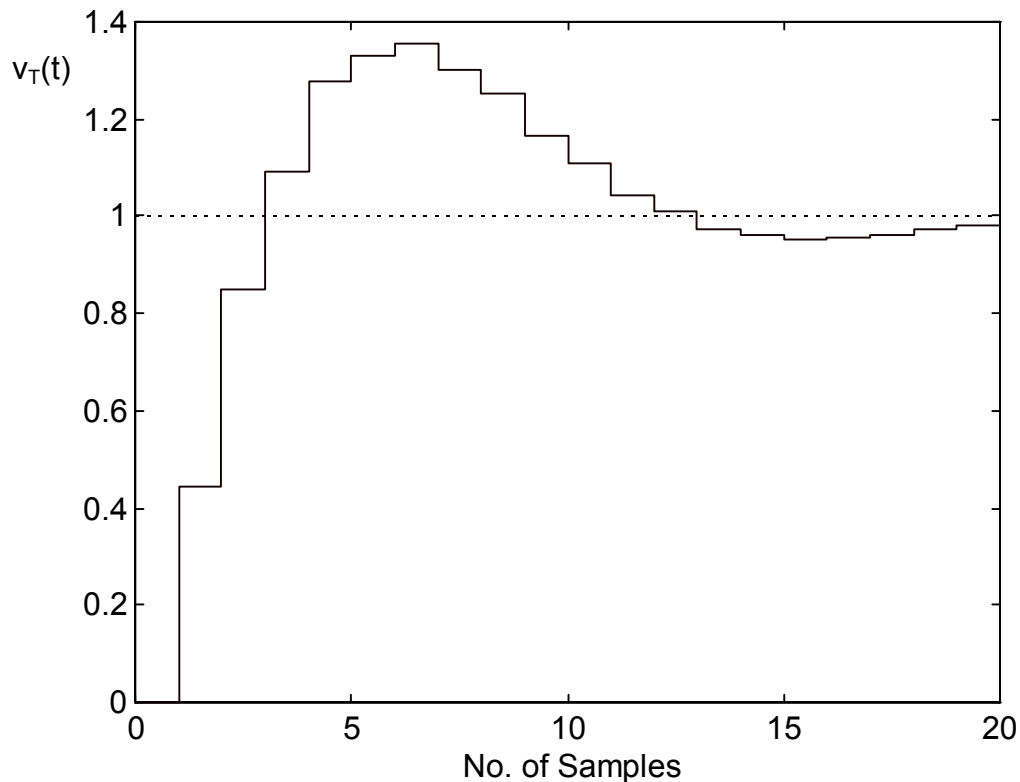
Damit ergibt sich der Wert von K zu  $K = \frac{0,35 \cdot 0,35 \cdot 1,69}{1,79 \cdot 0,261} = 0,443$

mit  $K = K_S \cdot K_R$  folgt daraus

$$K_R = \frac{K}{K_S} = \frac{0,443}{0,5 \cdot 10^{-4}} = 8.862,6 \quad \text{im Rahmen der Ablesegenauigkeit} = 9.000$$

Die Reglerübertragungsfunktion laute also  $G_R^\#(z) = 9.000 \cdot \frac{z - 0,7}{z + 0,95}$

Die ( diskrete ) Sprungantwort für das solchermaßen geregelte System wird mit Hilfe des „dstep“-Befehls unter MATLAB gezeichnet. Das Ergebnis zeigt das nachfolgende Bild 4.14.

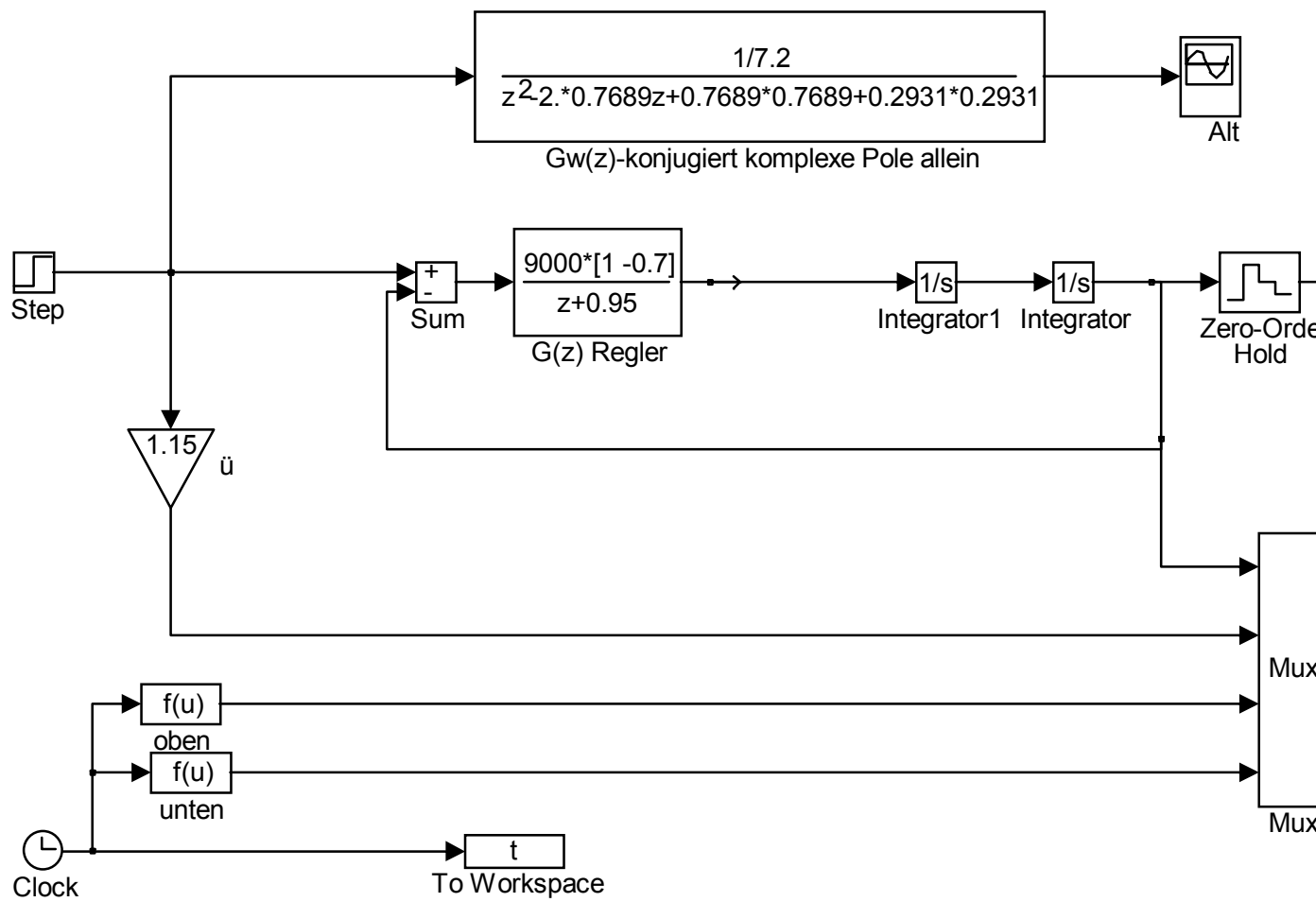


**Bild 4.14:** Diskrete Sprungantwort auf der Grundlage unseres WOK-gestützten Reglerentwurfs. Mit  $v_T(t)$  werde eine Treppenfunktion bezeichnet die man erhält, wenn man  $\{v_n\}$  auf einen DA-Wandler gibt.

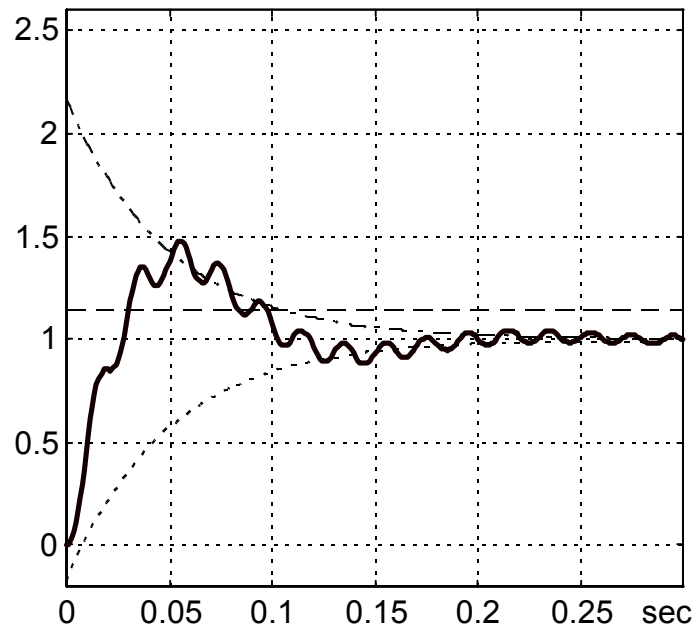
Man erkennt, daß die geforderten Spezifikationen noch nicht erreicht werden. Es war z.B. gefordert:  $\ddot{u} = 0,15$ ; es wird aber festgestellt:  $\ddot{u} = 0,35$ .

Bevor wir diesen ersten Versuch voreilig verwerfen, schauen wir uns noch einmal die zugehörige Wurzelortskurve in der komplexen  $z$ -Ebene an. Das Regelsystem hat ja nicht nur ein dominierendes, konjugiert komplexes Polpaar bei ca.  $z_\infty = 0.7689 + 0.2931i$ ,  $z_\infty = 0.7689 - 0.2931i$  sondern auch einen „Klirrpole“ bei  $z_\infty = -0.9378$ . Auch gewichten die Nullstellen bei  $z_0 = -1$  und  $z_0 = +0,7$  das Zeitverhalten aller Pole. Es bleibt zu vermuten, daß der obige Reglerentwurf die geforderten Zeitspezifikationen durchaus einhält, wenn er nur ein konjugiert komplexes Polstellenpaar bei  $z_\infty = 0.7689 + 0.2931i$  und  $z_\infty = 0.7689 - 0.2931i$  existieren würde. Dies bestätigt die Simulation in der Tat. Schauen wir uns dazu die entsprechenden SIMULINK-Simulationen an und vergleichen:

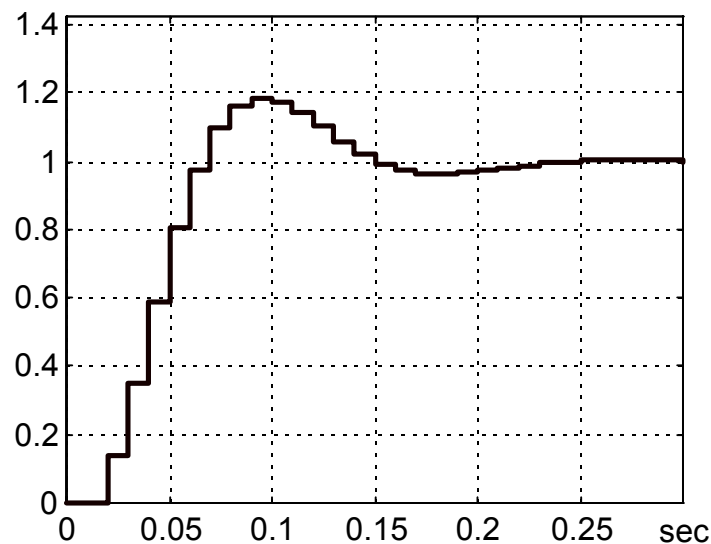
- digitaler Ausgang (genauso wie die MATLAB-Simulation) des vorgelegten Regelsystems.
- analoger Ausgang der Regelstrecke: Hier sieht man den nachteiligen Einfluß des Klirrpoles besonders deutlich!
- digitaler Ausgang eines Ersatzsystems das nur das dominierende Polstellenpaar bei  $z_\infty = 0.7689 + 0.2931i$  und  $z_\infty = 0.7689 - 0.2931i$  enthält.



**Bild 4.15:** Zur SIMULINK-Simulation des Regelsystems

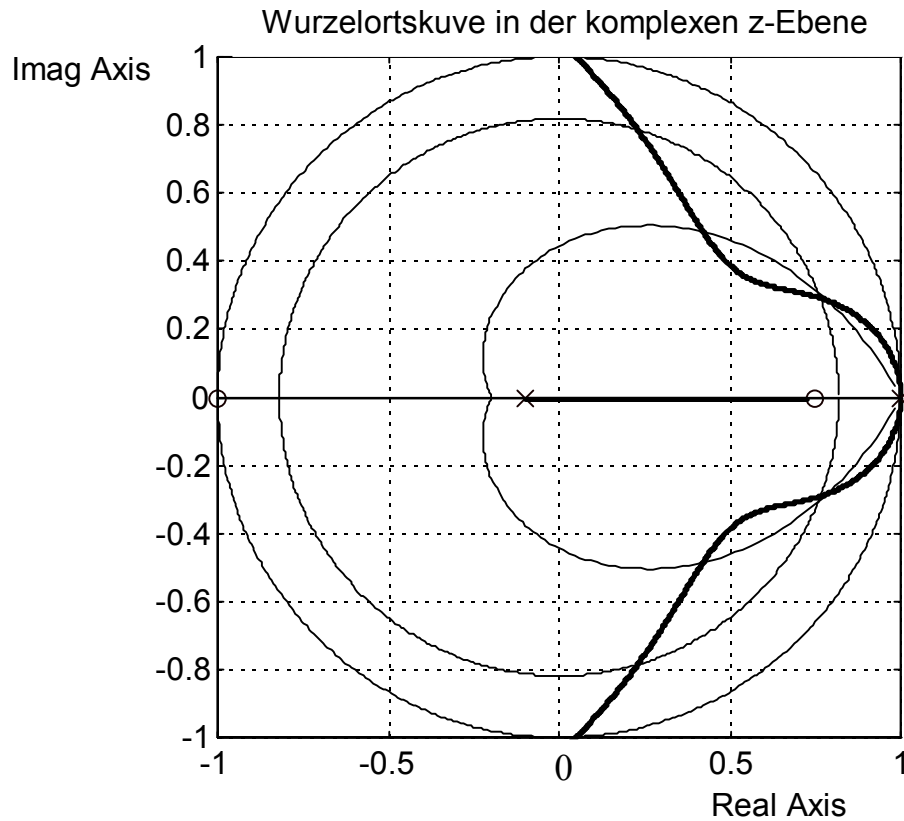


**Bild 4.16:** *Ergebnis der SIMULINK-Simulation. Ausgang  $v(t)$  der (digital geregelten) analogen Strecke. Die Spezifikationen werden nicht eingehalten. Man beachte insbesondere den störenden Einfluß des Klirrpoles.*



**Bild 4.17:** *Ausgang eines (lediglich angenommen) digitalen Übertragungssystems das Nur zwei konjugiert komplexe Pole in der  $z$ -Ebene besitzt die dort innerhalb des geforderten Gebietes liegen. Wir stellen fest, daß die geforderte Überschwingweite im Folgenraum eingehalten wird. Geringfügige Abweichungen infolge der ungenauen Ablesung von  $K$  aus der WOK.*

2. Versuch: Wir entscheiden uns (nach mehreren Versuchen mit dem MATLAB-Programm BSP482.M) für eine Reglerübertragungsfunktion vom Typ  $G_R^\#(z) = K_R \frac{z - 0,75}{z + 0,1}$  und erhalten damit folgende WOK:

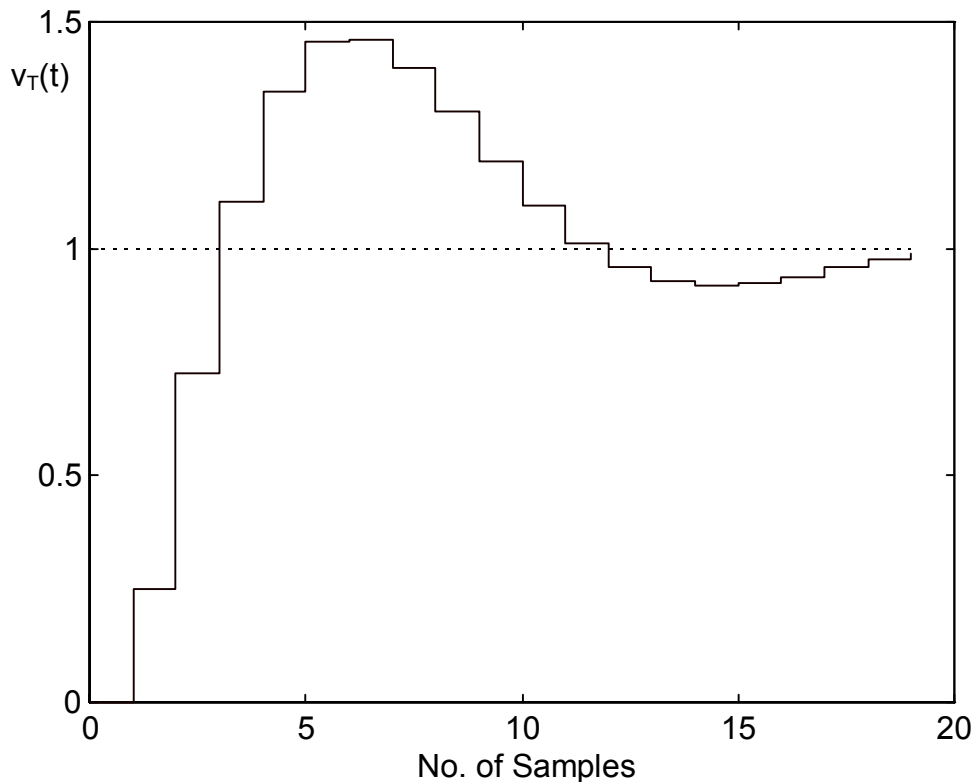


Lesen wir  $K$  ab und rechnen  $K_R$  aus, so kommen wir mit guter Näherung auf  $K_R = 5000$ .

Dies hat für den geschlossenen Kreis Pole bei

$z_{1\infty} = 0.7589 + 0.2931i$ ,  $z_{2\infty} = 0.7589 - 0.2931i$  und  $z_{3\infty} = + 0.1322$  (dies ist kein Klirrpole).  
zur Folge.

Schauen wir uns dazu zunächst die diskrete Sprungantwort an. Diese ist mit Bild 4.14 zu vergleichen.



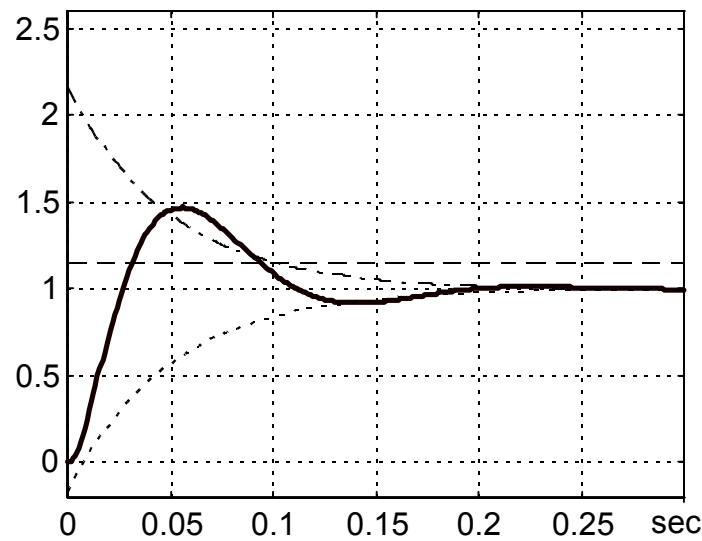
**Bild 4.18:** Diskrete Sprungantwort auf der Grundlage unseres WOK-gestützten Reglerentwurfs vom 2. Versuch. Vgl. Bild 4.14

Das Ergebnis ist auch noch nicht berauschend. Es können dieselben Anmerkungen gemacht werden, wie zum Ergebnis des 1. Entwurfs.

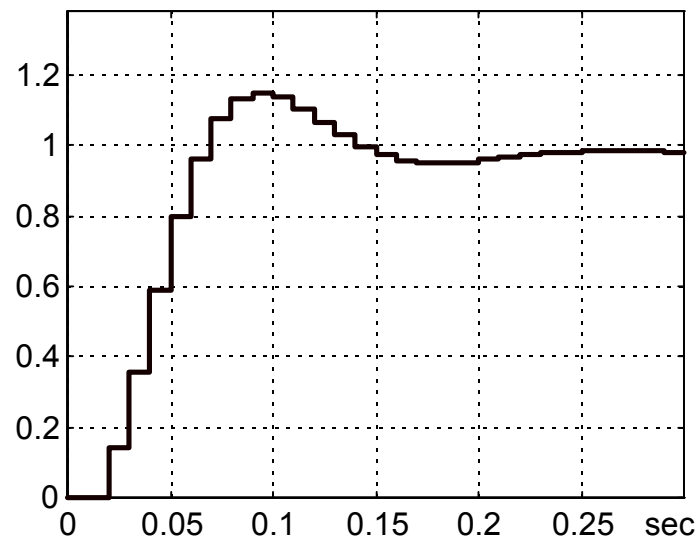
Wie sieht der Ausgang der analogen Strecke aus ? Was kommt schließlich heraus, wenn man nur die konjugiert komplexen Pole des Regelsystems berücksichtigt. Hier hilft wieder die SIMULINK-Simulation weiter.



Vergleichen wir nun auch die SIMULINK-Simulationen:



**Bild 4.19:** *Ergebnis der SIMULINK-Simulation. Ausgang  $v(t)$  der (digital geregelten) analogen Strecke. Die Spezifikationen werden nicht eingehalten. Immerhin ist der störende Einfluß des Klirrpoles verschwunden. Vgl. 4.16*



**Bild 4.20:** *Ausgang eines (lediglich angenommen) digitalen Übertragungssystems das nur zwei konjugiert komplexe Zole in der  $z$ -Ebene besitzt die dort innerhalb des geforderten Gebietes liegen. Wir stellen fest, daß die geforderte Überschwingweite im Folgenraum eingehalten wird. Vgl. 4.17*

„Nichts auf der Welt ist so gerecht verteilt wie der Verstand. Denn jedermann ist überzeugt, daß er genug davon habe.“ (Rene Descartes)

Der zweite Versuch sieht schon besser als der erste aus. Er ist, wie schon gesagt, noch immer unbefriedigend. Aber die Vorgehensweise dürfte nun klar sein. Wagen Sie den 3. Versuch selber. Das MATLAB-Programm, das Sie dazu brauchen, finden Sie anschließend.

**% Programm zur Synthese von Regelalgorithmen im Bildbereich der z-Transformation**

**% unter Verwendung der Wurzelortskurvenverfahren.**

**% Beispiel: analoger Doppelintegrierer; Abtastzeit T = 0.01 sec**

**% Pfad C:\Kap4\K4\_31-40\BSP481.M**

CLF

T = 0.01;

% Z-Übertragungsfunktion der Regelstrecke:

Zs = (T\*T/2.)\*[1 1];

Ns = [1 -2 1];

% Regler:

Zr = [1 -0.74];

Nr = [1 0.9];

% offenen Schleife:

Zo = conv(Zs,Zr);

No = conv(Ns,Nr);

% WOK berechnen ...

K = 1:10:50000;

[r,K]= rlocus(Zo,No,K);

%... und zeichnen:

plot(r,'w-'),AXIS([-1. 1. -1. 1.]),AXIS('square'),grid on

title (' Wurzelortskurve in der komplexen z-Ebene')

pause

hold on

pzmap(Zo,No) % Pol-Nullstellenplan von Go allein

```
for I = 1:1:628
```

```
    Theta(I) = 0.01*I;
```

```
    R(I) = 1.;
```

```
end
```

```
polar(Theta,R,'w'); % Einheitskreis zeichnen
```

```
% Dominanzgebiete vorbereiten und zeichnen:
```

```
Tau_ab = 0.05; % Abklingzeitkonstante
```

```
ue = 0.15; % Überswingfaktor
```

```
Radius = R*exp(-T/Tau_ab);
```

```
polar(Theta, Radius,'w'); % Kreis entsprechend analoger Abklingzeitkonstante
```

```
D = 1/(sqrt(1+(pi/log(ue))^2));
```

```
Phi = asin(D); % Dämpfungswinkel in Rad
```

```
for I = 1:1:3600
```

```
    Rho = I/10;
```

```
    Re(I) = exp(-sin(Phi)*Rho*T)*cos(Rho*T*cos(Phi));
```

```
    Im(I) = exp(-sin(Phi)*Rho*T)*sin(Rho*T*cos(Phi));
```

```
end
```

```
plot(Re,Im,'w',Re,-Im,'w') % "Herzkurve" entsprechend Linien konstanter Dämpfung
```

```
pause
```

```
hold off
```

```
% Überprüfung des Ergebnisses
```

```
% Mit  $K_r = 8.862,6$  bilden wir
```

```
Zor = 8862.6*Zo;
```

```
% z-Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises
```

% SIGN = -1 steht für Gegenkopplung

[NUMc,DENc] = CLOOP(Zor,No,-1);

% Ausplotten der diskreten z-Sprungantwort

DSTEP(NUMc,DENc,20) % 20 Abtastschritte werden gezeichnet

## 4.9 Genauigkeitsfragen I: Der Einfluß den endlichen Abtastzeit.

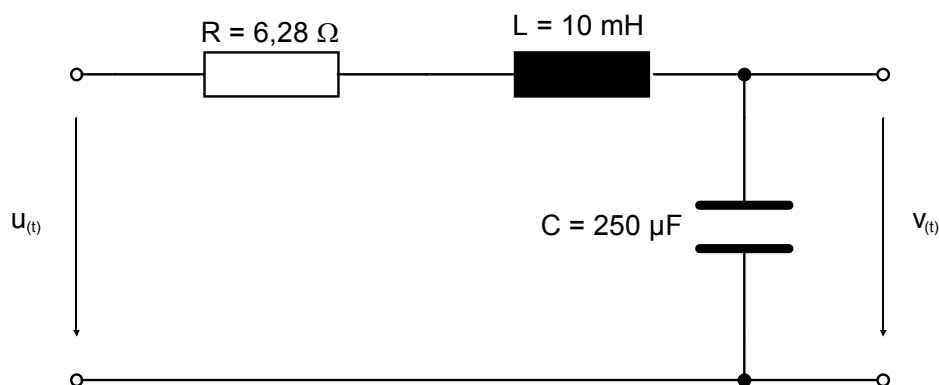
„Alle Menschen streben von Natur aus nach Wissen.“ Aristoteles (384 - 322 v. Chr.)

### 4.9.1 Bezugnahme auf das Rechenbeispiel von 4.2.3

Intuitiv nimmt man an, daß die digitale Nachbildung eines ursprünglich (gerechneten oder tatsächlich vorhandenen) analogen Filters oder eines beliebigen analogen Systems umso genauer ist, je kleiner die dabei gewählte Abtastzeit (die „Simulationsschrittweite“) ist. Diese Annahme ist nur bedingt richtig: Sie gilt dann, wenn die für die Zahldarstellung im Prozessor verwendeten Mantisse „sehr lang“ ist. Wir wollen in diesem Punkt 4.9 so tun, als ob die zur Verfügung stehende Mantisse beliebig lang sei und daß damit die (endlichen) Wortlängeneffekte keine Rolle spielen. Im Punkt 4.10 betrachten wir sodann noch den verblüffenden Einfluß der endlichen Wortlängen.

Wir hätten zunächst gerne eine zuverlässige Aussage, wie gut - in Abhängigkeit von „T“ - die digitale Nachbildung eines analogen Systems ist. Hier sei an das Rechenbeispiel aus 4.2.3 erinnert.

Das analoge Filter :



sollte durch einen Filteralgorithmus ersetzt werden. Abtastzeit  $T=0,1$  Millisekunden (ms)

Als wir das analoge Filter mit Hilfe der Methode der Vorwärtsdifferenzen diskretisierten, hatten wir zum Schluß einen Filteralgorithmus angeben können. Für eine ganz bestimmte Eingangsfunktion  $u(t)$  - diese wurde auch abgetastet und so zur Eingangsfolge  $\{u_n\}$  - konnte man den analogen und den digitalen Filterausgang vergleichen ( Bild 4.6 ). Bei allen anderen Methoden der Diskretisierung kann man genauso vorgehen.

Ist das Ergebnis des Vergleichs nun gut oder schlecht? Im Grunde kann man keine zuverlässige Aussage treffen, da man ja nur ein Eingangssignal zum Vergleich heranzieht. Man bräuchte unendlich viele Testeingangssignale. Hier bietet sich der Vergleich der analogen und digitalen Frequenzgänge an. So etwas haben wir schon einmal experimentell durchgeführt. Vgl. Bild 4.8. Diese Art des Vergleichs gelingt auch rechnerisch. Wir demonstrieren dies anhand der nächsten Aufgabe.

#### 4.9.2 Rechenaufgabe

Von dem analogen Filter aus 4.2.3 läßt sich der ( analoge ) Frequenzgang angeben als:

$$G_F(j\omega) = \frac{4 \cdot 10^5}{s^2 + 6,28 \cdot 10^2 s + 4,0 \cdot 10^5} \quad \Big| \quad s = j\omega$$

Das analoge Filter ist jetzt mit Hilfe der Methode der Vorwärtsdifferenzen zu diskretisieren. Als Abtastzeit sind zu wählen:  $T_1 = 0,1$  msec,  $T_2 = 1$  msec und  $T_3 = 10$  msec.

Zu diesen drei Abtastzeiten sind die drei zugehörigen z-Übertragungsfunktionen anzugeben.

Die zu diesen drei z-Übertragungsfunktionen gehörigen diskreten Frequenzgänge sind zu berechnen und zusammen mit  $G_F(j\omega)$  aufzuzeichnen.

Lösung: Bei der Diskretisierung nach der Methode der Vorwärtsdifferenzen erhält man bekanntlich ( 4.2.3, Lösung a)

$$v_k + (-2,628 \cdot 10^2 T) \cdot v_{k-1} + (1,628 \cdot 10^2 T + 4 \cdot 10^5 \cdot T^2) \cdot v_{k-2} = 4,0 \cdot 10^5 \cdot T^2 \cdot u_{k-2}$$

$$\text{Also für } T=0,1 \text{ msec: } v_k - 1,9372 \cdot v_{k-1} + 0,9412 \cdot v_{k-2} = 0,004 \cdot u_{k-2}$$

$$\text{-für } T=1 \text{ msec: } v_k - 1,372 \cdot v_{k-1} + 0,772 \cdot v_{k-2} = 0,4 \cdot u_{k-2}$$

$$\text{-für } T=10 \text{ msec: } v_k + 4,28 \cdot v_{k-1} + 34,72 \cdot v_{k-2} = 40 \cdot u_{k-2}$$

Und die z-Übertragungsfunktionen lauten

$$\text{- für } T = 0,1 \text{ msec: } G^\#(z) = \frac{0,004}{z^2 - 1,9372 \cdot z + 0,9412}$$

$$\text{- für } T = 1 \text{ msec: } G^\#(z) = \frac{0,4}{z^2 - 1,372 \cdot z + 0,772}$$

$$\text{- für } T = 10 \text{ msec: } G^\#(z) = \frac{40}{z^2 + 4,28 \cdot z + 34,72}$$

Setzt man schließlich  $z = e^{j\omega T}$ , so erhält man unter Verwendung der EULER'schen Formel die (diskreten) Frequenzgänge:

$$\frac{0,004}{\left[0,9412 - 1,9372 \cdot \cos(\omega T) + \cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)\right] + j \cdot \left[2 \cdot \cos(\omega T) \cdot \sin(\omega T) - 1,9372 \cdot \sin(\omega T)\right]} \Big|_{T=0,1 \text{ msec}}$$

$$\frac{0,4}{\left[0,772 - 1,372 \cdot \cos(\omega T) + \cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)\right] + j \cdot \left[2 \cdot \cos(\omega T) \cdot \sin(\omega T) - 1,372 \cdot \sin(\omega T)\right]} \Big|_{T=1 \text{ msec}}$$

$$\frac{40}{\left[34,72 + 4,28 \cdot \cos(\omega T) + \cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)\right] + j \cdot \left[2 \cdot \cos(\omega T) \cdot \sin(\omega T) + 4,28 \cdot \sin(\omega T)\right]} \Big|_{T=10 \text{ msec}}$$

Diese drei Frequenzgänge nach Betrag und Phase dargestellt:

$$\frac{0,004 \cdot e^{-j \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot \cos(\omega T) \cdot \sin(\omega T) - 1,9372 \cdot \sin(\omega T)}{0,9412 - 1,9372 \cdot \cos(\omega T) + \cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)}\right)}}{\sqrt{\left[0,9412 - 1,9372 \cdot \cos(\omega T) + \cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)\right]^2 + \left[2 \cdot \cos(\omega T) \cdot \sin(\omega T) - 1,9372 \cdot \sin(\omega T)\right]^2}} \Big|_{T=0,1 \text{ msec}}$$

$$\frac{0,4 \cdot e^{-j \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot \cos(\omega T) \cdot \sin(\omega T) - 1,372 \cdot \sin(\omega T)}{0,772 - 1,372 \cdot \cos(\omega T) + \cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)}\right)}}{\sqrt{\left[0,772 - 1,372 \cdot \cos(\omega T) + \cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)\right]^2 + \left[2 \cdot \cos(\omega T) \cdot \sin(\omega T) - 1,372 \cdot \sin(\omega T)\right]^2}} \Big|_{T=1 \text{ msec}}$$

$$\frac{40 \cdot e^{-j \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot \cos(\omega T) \cdot \sin(\omega T) + 4,28 \cdot \sin(\omega T)}{34,72 + 4,28 \cdot \cos(\omega T) + \cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)}\right)}}{\sqrt{\left[34,72 + 4,28 \cdot \cos(\omega T) + \cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)\right]^2 + \left[2 \cdot \cos(\omega T) \cdot \sin(\omega T) + 4,28 \cdot \sin(\omega T)\right]^2}} \Big|_{T=10 \text{ msec}}$$

Wie nicht anders zu erwarten, hängen sowohl Amplitudengang (Betrag von  $G^\#$ ) als auch Phasengang (Argument von  $G^\#$ ) von der Abtastzeit  $T$  ab. Beide sind mit dem Amplituden- und Phasengang von  $G_F(j\omega)$  zu vergleichen. Wir beschränken uns auf den Vergleich der Amplitudengänge.

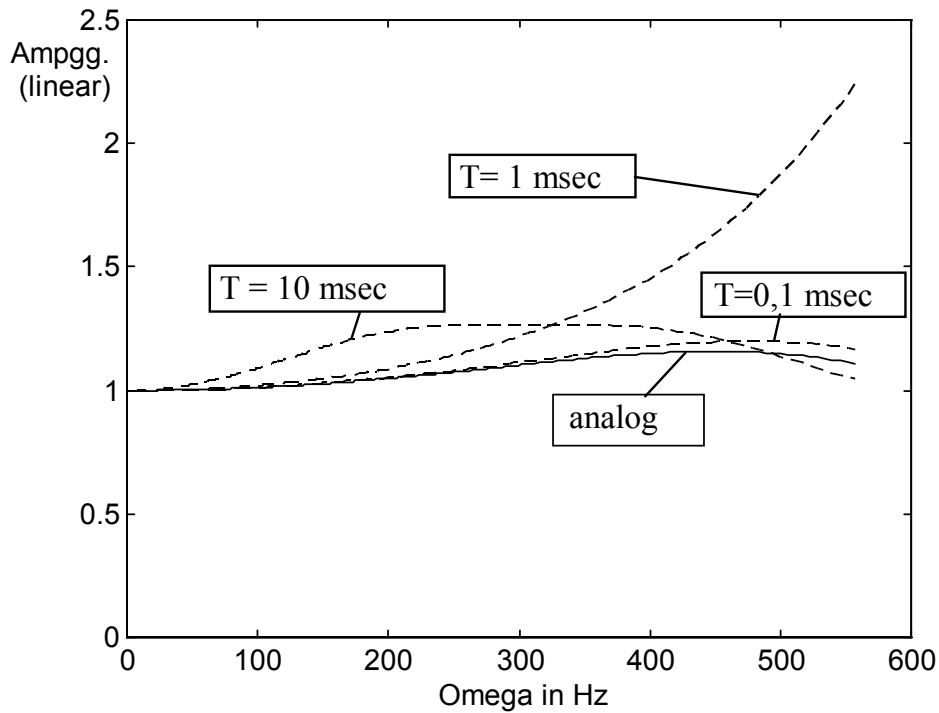
Wir vergleichen also

$$\frac{40}{\sqrt{\left[34,72 + 4,28 \cdot \cos(\omega T) + \cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)\right]^2 + \left[2 \cdot \cos(\omega T) \cdot \sin(\omega T) + 4,28 \cdot \sin(\omega T)\right]^2}} \Big|_{T=10 \text{ msec}}$$

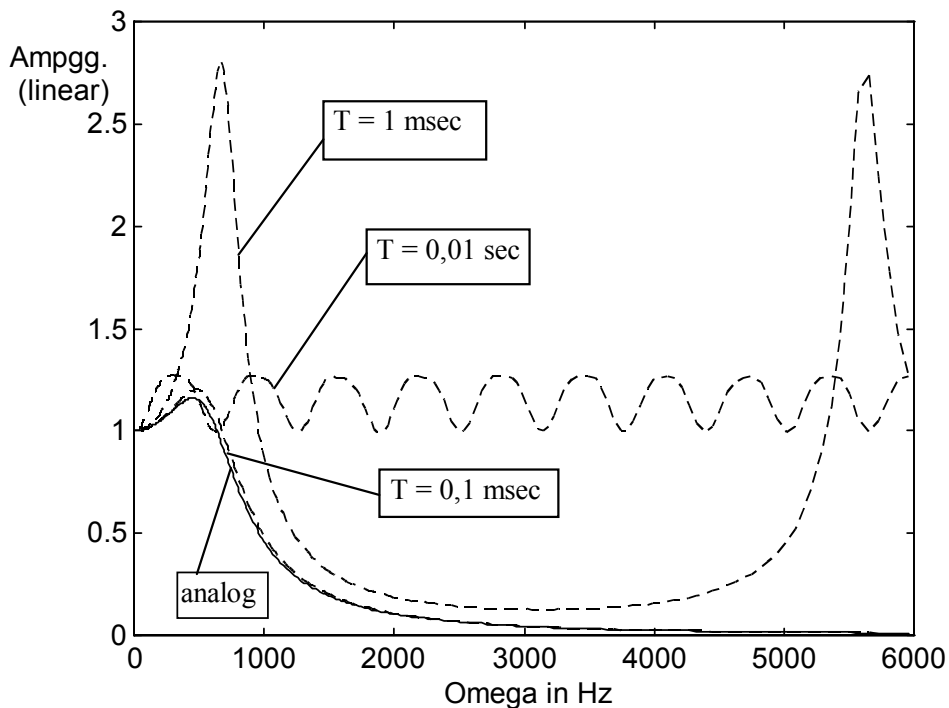
mit  $\frac{0,4}{\sqrt{\left[0,772 - 1,372 \cdot \cos(\omega T) + \cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)\right]^2 + \left[2 \cdot \cos(\omega T) \cdot \sin(\omega T) - 1,372 \cdot \sin(\omega T)\right]^2}} \Big|_{T=1 \text{ msec}}$

usw.

Für verschieden Kreisfrequenzen zeigen dies die Bilder 4.21, 4.22 und 4.23.

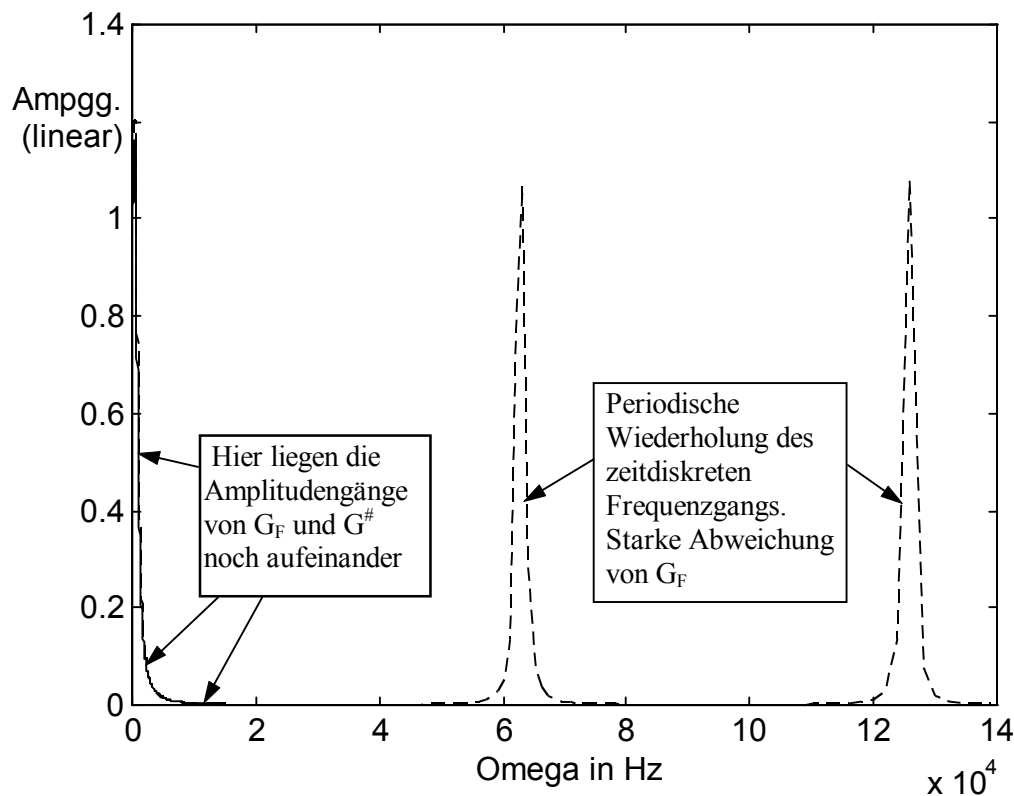


**Bild 4.21:** Vergleich eines analogem Filteramplitudengangs mit den Amplitudengängen von digitalen Nachbildungen.  $\omega = 0 - 600$



**Bild 4.22** Vergleich eines analogem Filteramplitudengangs mit den Amplitudengängen von digitalen Nachbildungen.  $\omega = 0 - 6000$





**Bild 4.23:** Vergleich eines analogen Filteramplitudengangs mit dem Amplitudengang einer digitalen Nachbildungen.  $T = 0,1 \text{ msec}$

Periodische Wiederholung von  $|G^\#(j\omega)|$  nach  $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$



Jeder zeitdiskrete Frequenzgang wiederholt sich periodisch in  $\omega$ . Und zwar unabhängig davon, wie das zugörige digitale System gewonnen wurde (also egal ob mit Hilfe der Vorwärtsdifferenzen, der TUSTIN-Trafo, der sprunginvarianten Trafo etc.). Die Periodizität ist eine Eigenschaft der komplexen e-Funktion die ja bei „ $z = e^{j\omega T}$ “ deutlich auftritt.

Um den nachteiligen Effekt der Periodizität unwirksam zu machen, empfiehlt es sich, vor dem Eingang der diskreten Regeleinrichtung (also vor dem AD-Wandler), einen analogen Tiefpaß der Bandbreitenfrequenz

$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T}$  einzuschalten. Allerdings kann sich die damit verbundene

Ordnungserhöhung des analogen Systems nachteilig auf die gesamte Systemdynamik auswirken (→ Überprüfung mittels WOK).

Durch Vergleich der analogen und diskreten Frequenzgänge kann man entweder folgern: „Wie klein muß man die Abtastzeit machen, damit man bis zu einer bestimmten Frequenz eine geforderte Filterwirkung erzielt“

oder: „Bis zu welcher Frequenz leistet ein zeitdiskretes System die gewünschten Filterwirkungen“.

## 4.10 Genauigkeitsfragen II: Endliche Abtastzeiten / Mantissenlängen.

### 4.10.1 Die Abbildungseigenschaft der (komplexen) e-Funktion

Bekanntlich wird der Zusammenhang zwischen dem Bildbereich der Laplacetransformation und der z-Transformation durch die Abbildungsvorschrift  $z = e^{s \cdot T}$  ( T-Abtastzeit ) hergestellt. Das bedeutet natürlich auch, daß die Pole einer Laplace-Übertragungsfunktion - nennen wir sie einmal  $s_{1,\infty}, s_{2,\infty}, s_{3,\infty}, \dots$  - abgebildet werden in die Pole einer zugehörigen

z-Übertragungsfunktion  $z_{1,\infty} = e^{s_{1,\infty} \cdot T}, z_{2,\infty} = e^{s_{2,\infty} \cdot T}, z_{3,\infty} = e^{s_{3,\infty} \cdot T}, \dots$ .

Fallts nur die Abtastzeit „T“ hinreichend klein ist, so werden also die Pole der Laplace-Übertragungsfunktion abgebildet in Pole der z-Übertragungsfunktion die beliebig nahe bei  $z = 1$  liegen. Dabei ist es ohne Belang, wo die Pole der Laplaceübertragungsfunktion lagen und wie also die analoge Systemdynamik ist: Lediglich „T“ muß hinreichend klein sein.



Wenn nur die Abtastzeit „T“ hinreichend klein ist, dann werden die Pole der Laplace-Übertragungsfunktion abgebildet in Pole der z-Übertragungsfkt. die beliebig nahe bei  $z = 1$  liegen. Dabei ist es ohne Belang, wo die Pole der Laplace-Übertragungsfunktion lagen und wie also die analoge Systemdynamik ist: Lediglich „T“ muß hinreichend klein sein.

Lägen alle Pole der z-Übertragungsfunktion genau bei  $z = 1$ , so wäre das Nennerpolynom von  $G^{\#}(z)$  das bekannte Binominalpolynom  $(z-1)^n$ .

In der Tat nähern sich die Nenner-Koeffizienten einer ( beliebigen ) z-Übertragungsfkt. für hinreichend kleine Abtastzeiten solchen Binominalkoeffizienten an. Dynamisch sehr verschiedene analoge Systeme unterscheiden sich in ihrer z-Übertragungsfunktion lediglich in den „hintersten Nachkommastellen“. Ein Abschneiden dieser Nachkommastellen führt auf ein System mit völlig anderer Dynamik.

Eine Verkleinerung der Abtastzeit kann in Verbindung mit endlichen Wortlängeneffekten bzw. mit Abschneideoperationen also auch zu einer Verschlechterung einer Filter- oder Regelaufgabe führen.

4.10.2 Beispiele hierzu

Gegeben sei:

$$G(s) = \frac{(-1,38) \cdot (-0,71) \cdot (0,784 \cdot 0,784)}{(s^2 + 2 \cdot 0,4 \cdot 0,784 \cdot s + 0,784 \cdot 0,784) \cdot (s + 0,71) \cdot (s + 1,38)}$$

Hiervon werde  $G^\#(z)$  erstellt.  $G^\#(z) = \underline{c}^T (zE - \underline{\Phi}(T))^{-1} \underline{h}(T)$  ausrechnen bzw. die dazugehörigen MATLAB-Befehle anwenden liefert:

```
Z = (-1.38)*(-0.71)*(0.784*0.784);
T1 = [1 2.*0.4*0.784 0.784*0.784];
T2 = [1 0.71];
T3 = [1. 1.38];
N1 = conv(T1,T2);
N = conv(N1,T3);

[A,b,c,d]= tf2ss(Z,N);
[Phi,h]=c2d(A,b,T); %Hier findet also die Diskretisierung statt

[Zd,Nd] = ss2tf(Phi,h,c,d);
```

Ergebnisse bei einer Abtastzeit : T = 0.5 sec

Zähler und Nenner der z-Übertragungsfkt  $G^\#(z)$ , beginnend mit der höchsten Potenz in z:

$Z^\#(z)$	und	$N^\#(z)$
0		1.000000000000000
0.00119539757239		-2.80333602594880
0.01002557680044		3.00760776227303
0.00764572505261		-1.44189611075397
0.00052927983110		0.25702035368627

Die SIMULINK-Simulation hierzu wird durch die hardcopy der nächsten Seite vorbereitet:

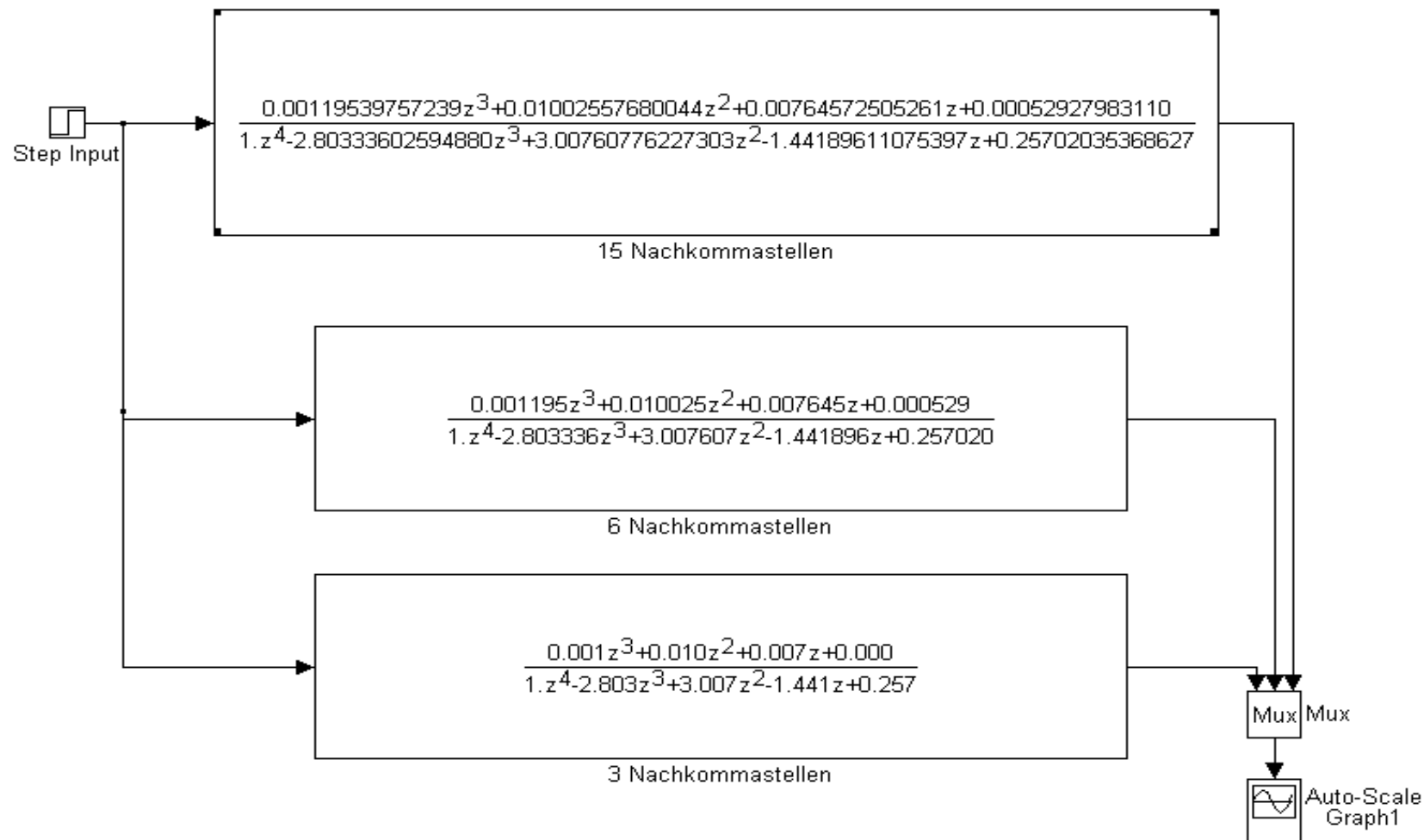
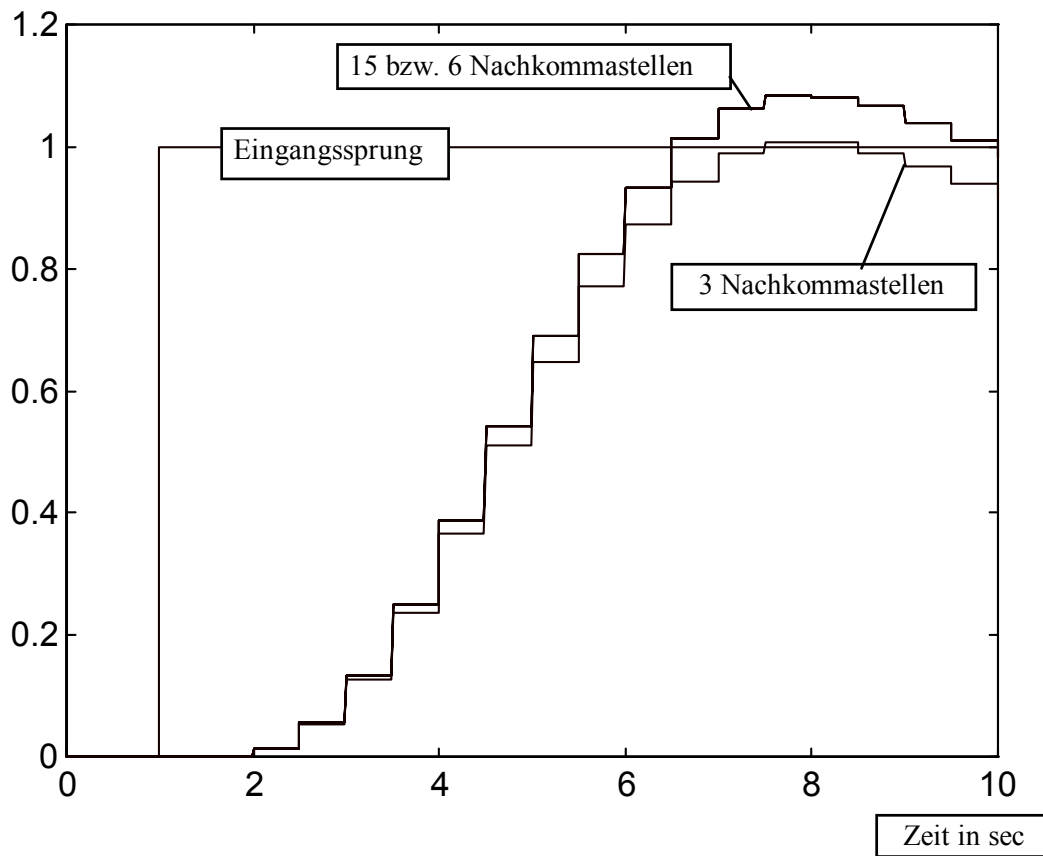


Bild 4.24:

Gleichzeitige SIMULINK-Simulation einer diskreten Sprungantwort bei verschieden vielen Nachkommastellen. Die Vokabel „Nachkommastellen“ wird statt „Mantisse“ benutzt: Die Mantisse steht ja normalerweise zur Verfügung – es werden aber nur 3 oder 6 Stellen davon genutzt.

Simulationsergebnisse zur Abtastzeit  $T = 0,5$  sec:



**Bild 4.25:** Gleichzeitige SIMULINK-Simulation einer diskreten Sprungantwort bei verschieden vielen Nachkommastellen;  $T = 0,5$  sec

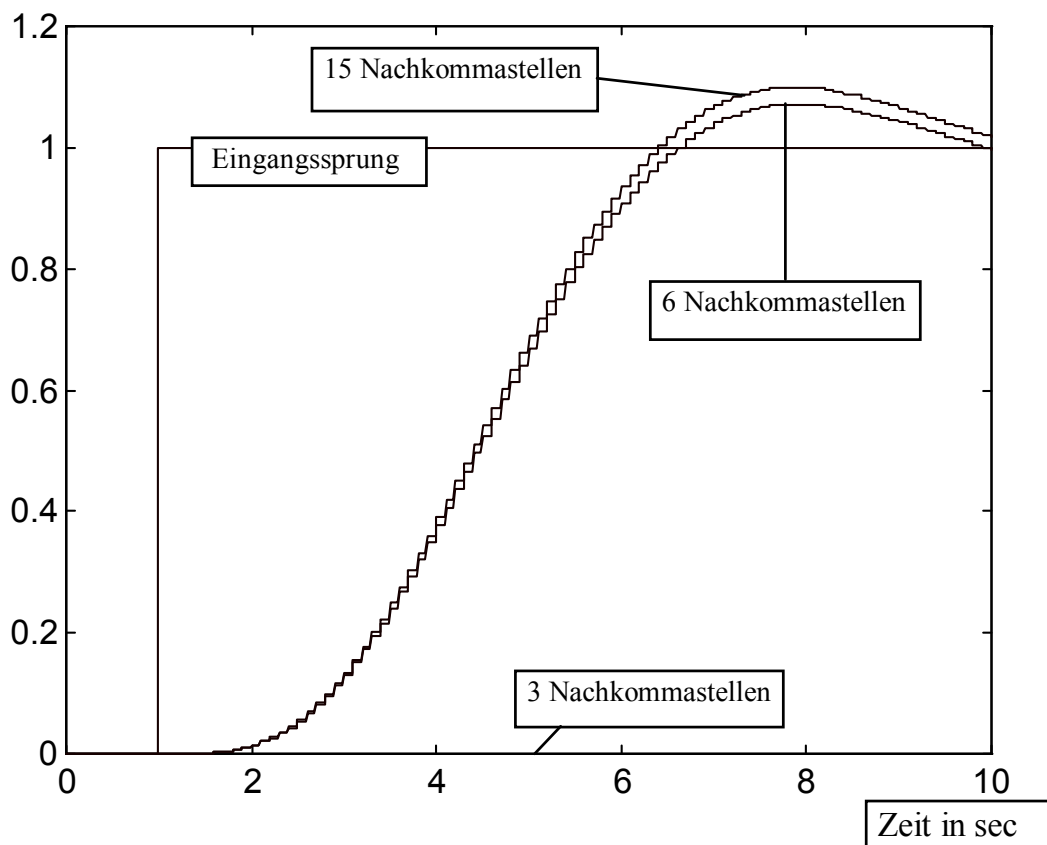
**Anmerkung:** Es wird hier wiederum absichtlich von „Nachkommastellen“ gesprochen. Die Mantisse ist ja immer gleich lang. Nur der Ingenieur rundet häufig bei seinen Rechnungen und verwendet dann lediglich ein paar Nachkommastellen – eine ggf. gefährliche Vereinfachung.

Ergebnisse bei einer Abtastzeit :  $T = 0.1$  sec

Zähler und Nenner der z-Übertragungsfkt  $G^\#(z)$ , beginnend mit der höchsten Potenz in z:

$Z^\#(z)$	und	$N^\#(z)$
0		1.000000000000000
0.00000237663888		-3.73581227800777
0.00002476084364		5.23540495286829
0.00002345128581		-3.26160767712860
0.00000201911400		0.76206761015042

Simulationsergebnisse zur Abtastzeit  $T = 0,1$  sec:



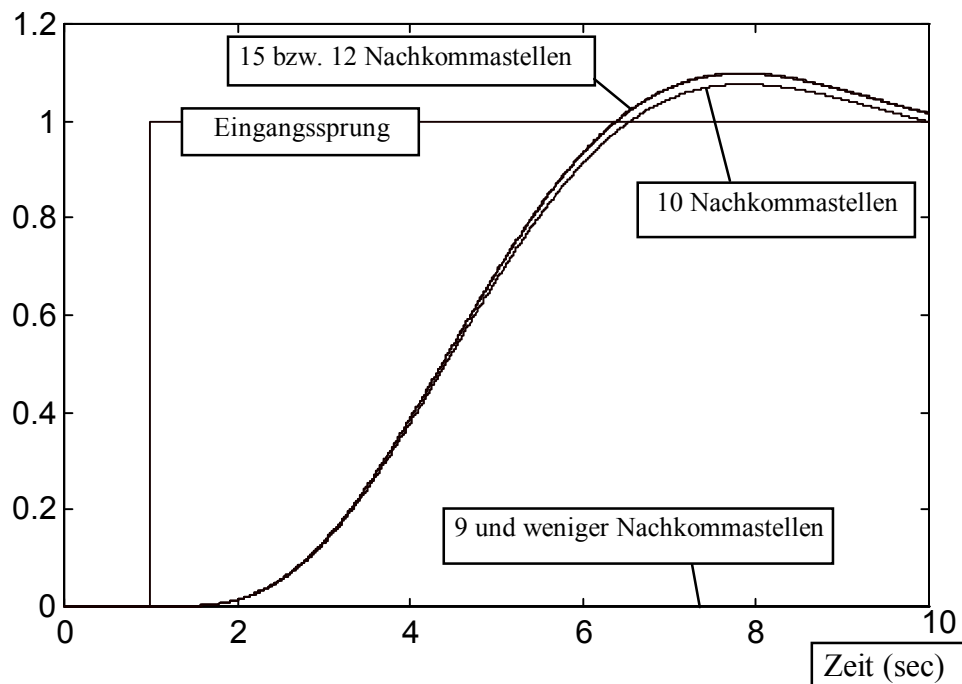
**Bild 4.26:** Gleichzeitige SIMULINK-Simulation einer diskreten Sprungantwort bei verschieden vielen Nachkommastellen;  $T = 0,1$  sec

Ergebnisse bei einer Abtastzeit :  $T = 0.01$  sec

Zähler und Nenner der z-Übertragungsfkt  $G^{\#}(z)$ , beginnend mit der höchsten Potenz in z:

$Z^{\#}(z)$	und	$N^{\#}(z)$
0		1.0000000000000000
0.00000000024957		-3.97290628395158
0.00000000273043		5.91900828519206
0.00000000271563		-3.91929583308724
0.00000000024554		0.97319383778793

Simulationsergebnisse zur Abtastzeit  $T = 0.01$  sec:



**Bild 4.27:** Gleichzeitige SIMULINK-Simulation einer diskreten Sprungantwort bei verschieden vielen Nachkommastellen;  $T = 0.01$



Ein Ingenieur, der einen digitalen Filter- oder Regelalgorithmus berechnet hat und diesen sodann auf einem Prozessor implementieren will, ist gut beraten, wenn er die vorhandene Mantisse voll ausnutzt.

Abschneideoperationen sind bei kleinen Abtastzeiten gefährlich.

Beachten Sie auch noch Bild 4.30.

#### 4.11 Die Deltatransformation von Folgen und verwandte Transformationen

Während man die Tatsache „Verkleinerung der Abtastzeit → Erhöhung der Genauigkeit“ intuitiv sofort akzeptiert, ist die Einsicht in den gleichzeitig wirkenden Zusammenhang: „Verkleinerung der Abtastzeit → Erniedrigung der Genauigkeit“ nicht so leicht zu verdauen.

Dieser zuletzt genannte Zusammenhang ist Folge der Abbildungseigenschaft der (komplexen) e-Funktion in Verbindung mit endlichen Wortlängeneffekten.

Weiterhin hatten wir schon angemerkt, daß für hinreichend kleine Abtastzeiten die z-Übertragungsfunktion eines dynamischen Systems nicht (wie man intuitiv vermuten möchte) in die Laplaceübertragungsfunktion übergeht. Auch dies ist eine Folge der Abbildungseigenschaft der (komplexen) e-Funktion.

Man hat sich deshalb immer wieder nach alternativen Transformationen umgesehen, welche Filter- und Regelalgorithmen unempfindlich gegenüber Wortlängeneffekten machen und für welche die Eigenschaft zutrifft, daß die daraus abgeleiteten Übertragungsfunktionen für hinreichend kleine Abtastzeiten gegen die Laplaceübertragungsfunktionen konvergieren.

Die nachfolgenden Ausführungen sind Teil eines Vortrags den der Verfasser dieses Skripts 1996 gehalten hat. Die vollständige Version davon findet sich als Fachartikel : „The Application of Special Transform Methods derived from the Laplace Transform“. MECCANICA 32, S. 241-249, 1997, Kluwer Academic Publishers.

*„Typisch Dr. Karl. Arrogant bis auf die Knochen, dachte ich“. Hera Lind (Das Weibernetz)*

Der erwähnte Vortrag hatte folgende Inhaltsangabe:

1. Einleitung
2. Vergleich von einigen Aspekten der Laplace-Transformation und der z-Transformation mit den neuen Transformationen
3. Der Einfluß von Koeffizientenungenauigkeiten auf die Empfindlichkeit von z-Transformation und  $\delta$ -Transformation
4. Identifikation von dynamischen Systemen mit Hilfe der  $\alpha$ -Transformation
5. Zwischenbemerkungen
6. Tichonovsche Regularisierungen



## 1. Einleitung

„ $\delta$ -Transformation“ (GOODWIN und MIDDELTON 1985)

$$\{x_k\}, k \in \mathbb{N}_0 \mapsto X_\delta(\delta) = D[\{x_k\}] := T \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(1 + \delta \cdot T)^k};$$

$$\delta \in \mathbb{C}; T \in \mathbb{R}_+ \quad (1.1)$$

Die  $\delta$ -Transformation hat zwei interessante Eigenschaften:

- Formale Verwandtschaft mit der Laplace-Transformation
- Reduzierte Empfindlichkeit gegenüber Koeffizientenungenauigkeiten.

Die  $\delta$ -Transformation wird häufig als Sonderfall der allgemeineren „ $\gamma$ -Transformation“ angesehen (**at** 1/95)

„ $d\alpha$ -Transformation“ (Karl 1995)

$$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \mapsto X_\alpha(d) = D_\alpha[\{x_k\}] := T \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x_k \left( \frac{e^{\alpha T}}{1 + d \cdot \alpha \cdot T} \right)^k \quad (1.2)$$

$$d \in \mathbb{C}; T, \alpha \in \mathbb{R}_+$$

Diese Transformation hat zusätzliche Vorteile bei der

- Identifikation von dynamischen Systemen.

## 2. Vergleich von einigen Aspekten der Laplace-Transformation und der z-Transformation mit den neuen Transformationen.

### 2.1 Laplace-Transformation, z-Transformation und $\delta$ -Transformation

Gegeben sei eine zeitabhängige Funktion

$$\begin{aligned} x: \mathcal{R}_+ &\longrightarrow \mathcal{R}, \\ t &\mapsto x(t) \quad . \end{aligned}$$

Durch „Abtastung mit der Abtastzeit  $T$ “

entstehe  $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  ;  $x_k = x(t = k \cdot T)$  .

Die Verwandtschaft zwischen der Laplace-transformierten Funktion  $X(s)$  und der  $\delta$ -transformierten Funktion  $X_\delta(\delta)$  kann folgendermaßen motiviert werden:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot x(t) dt = \int_0^\infty \frac{1}{e^{st}} x(t) dt \approx \sum_{k=0}^\infty \frac{x(kT) \cdot T}{(e^{sT})^k} = T \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{x(kT)}{\left(1 + sT + \frac{s^2 T^2}{2!} + \dots\right)^k} \approx \\ &\approx T \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{x(kT)}{(1 + sT)^k} = X_\delta(s) \quad (2.1) \end{aligned}$$

Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\lim_{T \rightarrow 0} X_{\delta}(\delta) = X(s) \Big|_{s=\delta} \quad (2.2)$$

Zur Verwandtschaft zwischen der z-Transformation und der  $\delta$ -Transformation:

$$X_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot z^{-k} \quad \mapsto \quad X_{\delta}(\delta) = T \cdot X_z(1 + \delta \cdot T) \quad (2.3)$$

Mit Hilfe der Substitution

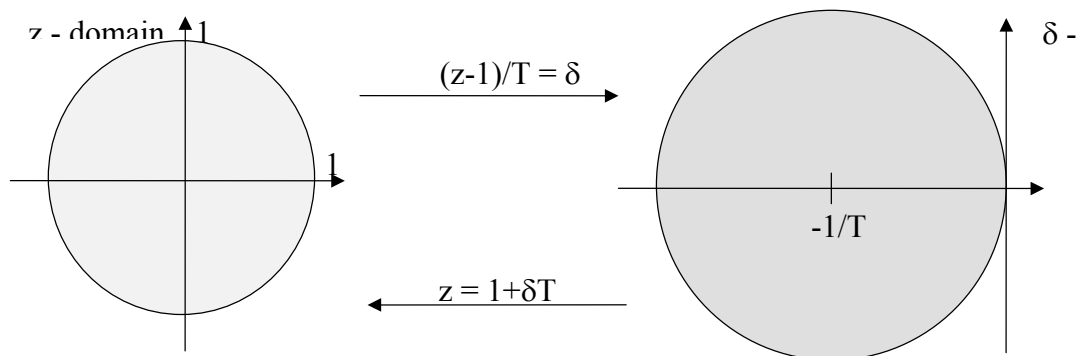
$$z = 1 + \delta \cdot T \quad (2.4)$$

können alle bekannten Ergebnisse aus dem Gebiet der z-Transformation auf die Theorie der  $\delta$ -Transformation übertragen werden.

Ein Beispiel hierfür ist das Shift-Theorem:

$$D\left[\{f_{k-v}\}\right] = (1 + \delta \cdot T)^{-v} \cdot F_{\delta}(\delta) \quad (2.5)$$

Die Substitution (2.4) bildet die komplexe „z-Ebene“ in die komplexe „ $\delta$ -Ebene“ ab:



**Bild 4.28:** Abbildungen zwischen der komplexen  $z$ -Ebene und der komplexen  $\delta$ -Ebene.

## 2.2 Laplace-Transformation, z-Transformation und d $\alpha$ -Transformation

Ausgehend von der definierenden Gleichung (1.2) für die d $\alpha$ -Transformation erkennt man sofort die Gültigkeit folgender Gleichung:

$$X_{\alpha}(d) = T \cdot X_z(z) \left|_{z = \frac{1+d \cdot \alpha \cdot T}{e^{\alpha \cdot T}}} \right. \quad (2.6)$$

Für  $T \rightarrow 0$  gilt sodann folgender Grenzwertsatz:

$$\lim_{T \rightarrow 0} X_{\alpha}(d) = X(s) \left|_{s = \alpha(d-1)} \right. \quad (2.7)$$

Mit Hilfe der Substitution

$$d = \frac{1}{\alpha \cdot T} \cdot (z \cdot e^{\alpha \cdot T} - 1) \quad (2.8)$$

können alle bekannten Ergebnisse aus der Theorie der z-Transformation auf die d $\alpha$ -Transformation übertragen werden.

Ein Beispiel hierfür sei wieder das Shift- Theorem:

$$D_{\alpha}[\{x_{k-v}\}] = \left( \frac{e^{\alpha \cdot T}}{1 + d \cdot \alpha \cdot T} \right)^v \cdot X_{\alpha}(d) \quad (2.9)$$

Die Substitution (2.8) definiert eine Abbildung zwischen der komplexen  $z$ -Ebene und der komplexen  $d\alpha$ -Ebene:

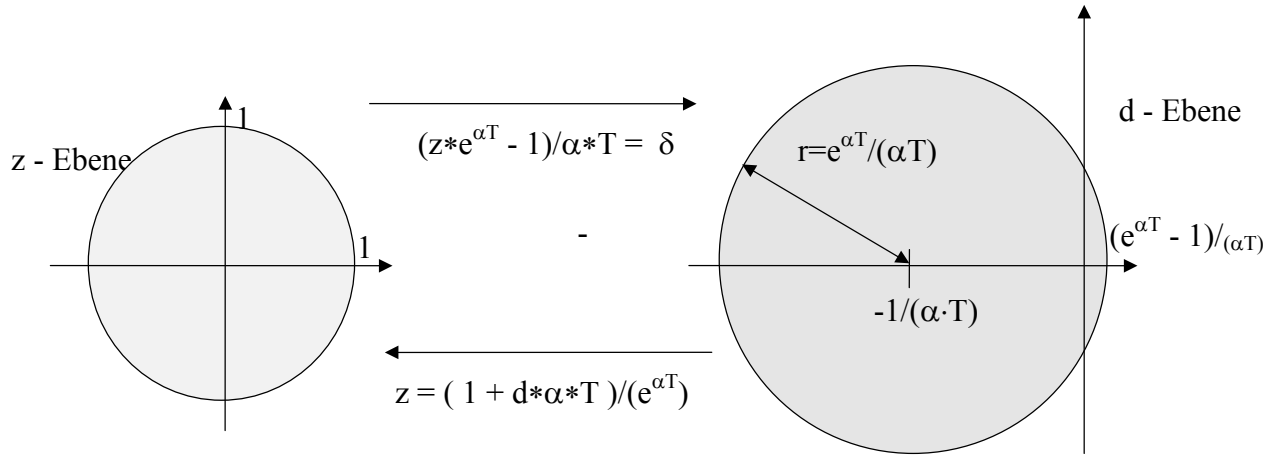


Bild 4.29: Abbildungen zwischen der komplexen  $z$ -Ebene und der komplexen  $d\alpha$ -Ebene.

## 2.3 Einige Funktionen, Folgen und deren Transformierte:

### 2.3.1 Die „Sprung-Funktion“

$$\sigma(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

bzw.

$$\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} := \{1, 1, 1, \dots\} \quad \text{„Sprungfolge“}$$

$$\begin{aligned} L\{\sigma(t)\} &= \frac{1}{s}; & D[\{\sigma_k\}] &= \frac{1 + \delta \cdot T}{\delta}; \\ Z[\{\sigma_k\}] &= \frac{z}{z-1}; & D_\alpha[\{\sigma_k\}] &= T \cdot \frac{1 + d \cdot \alpha \cdot T}{e^{\alpha \cdot T} \cdot \left( \frac{1 + d \cdot \alpha \cdot T}{e^{\alpha \cdot T}} - 1 \right)} \end{aligned}$$

### 2.3.2 Die „e-Funktion“

$$f(t) = e^{a \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad \text{bzw.} \quad \{f_k\} = \{f(t = k \cdot T)\}$$

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= \frac{1}{s+a}; & D[(f_k)] &= T \cdot \frac{1 + \delta \cdot T}{1 + \delta \cdot T - e^{-a \cdot T}}; \\ Z[\{f_k\}] &= \frac{z}{z - e^{-a \cdot T}}; & D_\alpha[\{f_k\}] &= T \cdot \frac{1 + d \cdot \alpha \cdot T}{(1 + d \cdot \alpha \cdot T) \cdot e^{(\alpha - a) \cdot T}}; \end{aligned}$$

## 2.4 Die $\delta$ -Übertragungsfunktion

Während bei der z-Übertragungsfunktion

$$G_z(z) := \left( \frac{X_z(z)}{U_z(z)} \right)_{X_0=0} \quad (2.10)$$

alle Pole  $z_\infty$  für  $T \rightarrow 0$ , gegen  $\lim_{T \rightarrow 0} z_\infty = 1$   
konvergieren,

gilt für die  $\delta$ -Übertragungsfunktion

$$G_\delta(\delta) := \left( \frac{X_\delta(\delta)}{U_\delta(\delta)} \right)_{X_0=0} \quad (2.11)$$

im Grenzfall  $T \rightarrow 0$ , daß sämtliche Polstellen gegen die Pole der zugehörigen Laplace-Übertragungsfunktion  $G_s(s)$  konvergieren.

## 3. Der Einfluß von Koeffizientenungenauigkeiten



## auf die Empfindlichkeit von z-Transformation und $\delta$ -Transformation.

Laplace-Übertragungsfunktion:

$$G_s(s) = \frac{(-1.38) \cdot (-0.71) \cdot (0.784)^2}{(s + 1.38) \cdot (s + 0.71) \cdot (s^2 + 2 \cdot 0.4 \cdot 0.784 \cdot s + (0.784)^2)}$$

Unter Verwendung der Abtastzeit  $T=0.5$  sec erhalten wir ein zeitdiskretes System mit der z-Übertragungsfunktion:

$$G_z(z) = \frac{0.00052928 + 0.00764725 \cdot z + 0.01002557 \cdot z^2 + 0.00119539 \cdot z^3}{0.25702035 - 1.44189611 \cdot z + 3.00760776 \cdot z^2 - 2.80333602 \cdot z^3 + z^4}$$

Die zugehörige  $\delta$ -Übertragungsfunktion lautet:

$$G_\delta(\delta) = \frac{0.31033567 + 0.25026457 \cdot \delta + 0.05444708 \cdot \delta^2 + 0.00239079 \cdot \delta^3}{0.31033566 + 1.30649068 \cdot \delta + 2.39039874 \cdot \delta^2 + 2.39332795 \cdot \delta^3 + \delta^4}$$

Auf die beiden Algorithmen welche  $G_z(z)$  bzw.  $G_\delta(\delta)$  realisieren werde dieselbe Eingangsfolge geschaltet.  
Z.B. die „Sprungfolge“:

$$\{\sigma_k\} = \{1, 1, 1, \dots\}.$$

Es ist klar, daß - im Folgenraum - die entsprechenden Ausgangsfolgen übereinstimmen.

Gleichverteilte Zufallszahlen aus  $[-0.01, +0.01]$  werden zusätzlich zu den Nennerkoeffizienten addiert.

Es wurden insgesamt 100 verschiedene Nenner-Realisierungen von  $G_z(z)$  und  $G_g(g)$  untersucht.

200 Werte der Ausgangsfolge wurden jeweils aufgezeichnet. Alle Zahlenwerte sind überdies auf den Grenzwert  $x_{k \rightarrow \infty}$  normiert.

A. Oberhofer : „Über die Realisierung digitaler Zustandsregler und deren Einsatz am Beispiel der Lageregelung eines hydraulischen Vorschubantriebes“ (Diss. 1989).

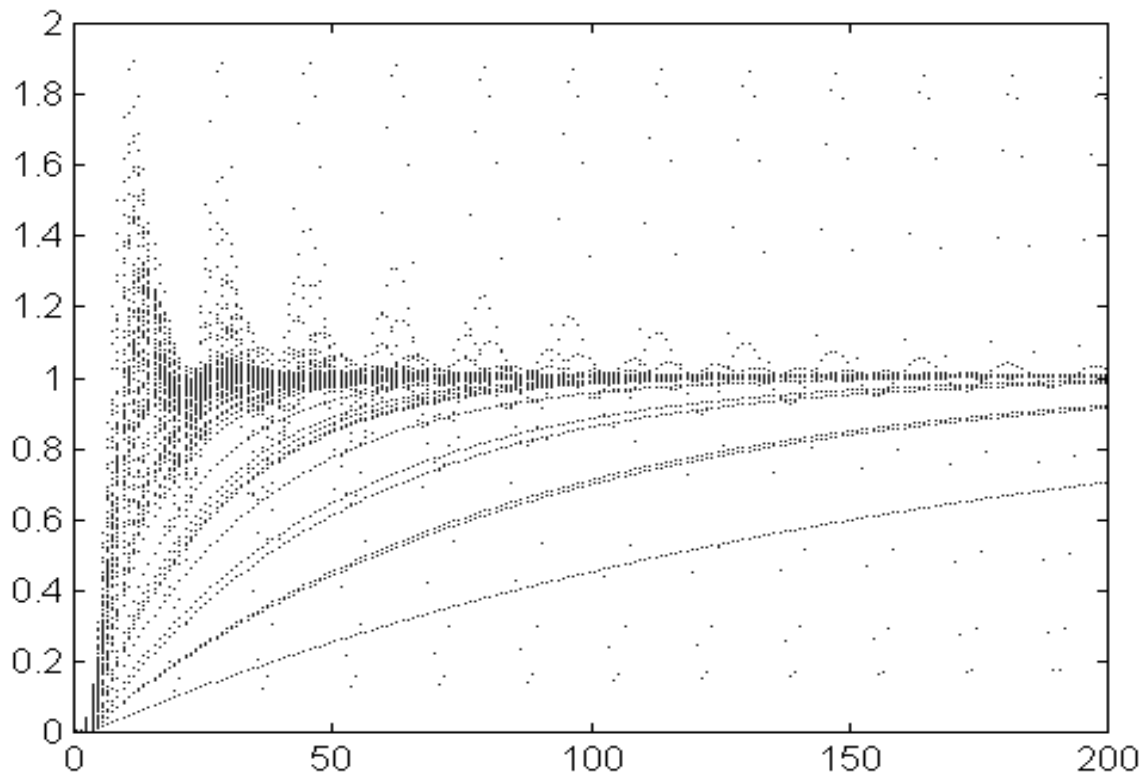


Bild 4.30:      Simulationsergebnisse für den Ausgang  
von  $G_z(z)$

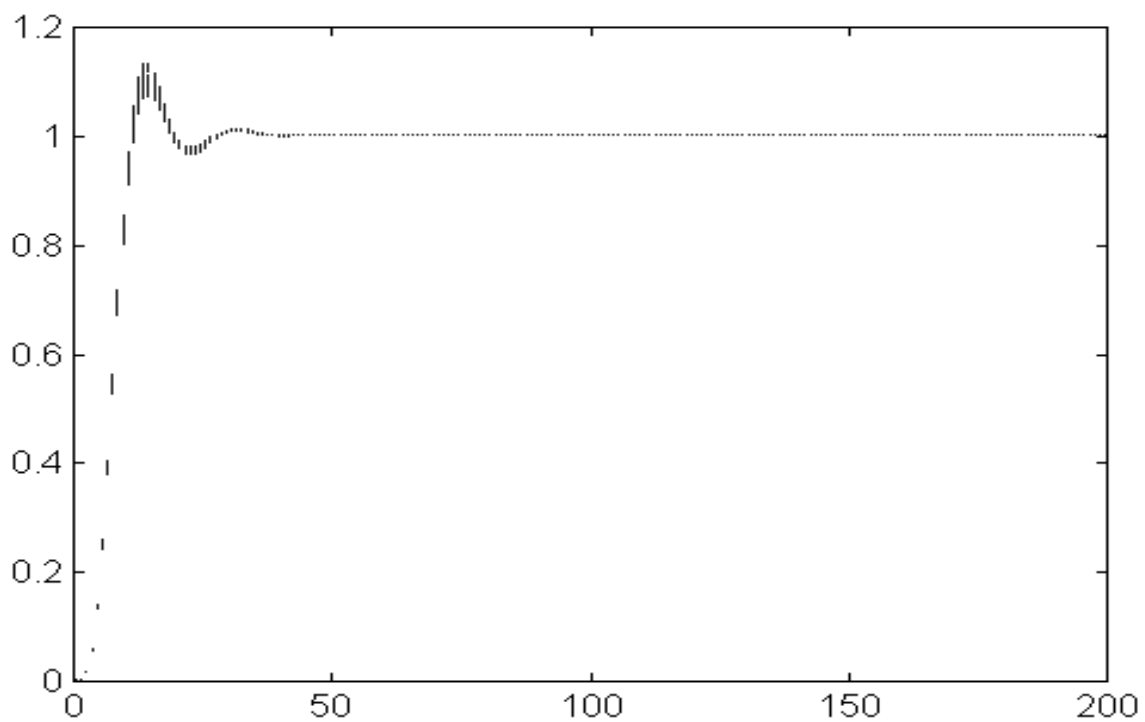


Bild 4.31:      Simulationsergebnisse für den Ausgang  
von  $G_\delta(\delta)$

An dieser Stelle erscheint es zweckmäßig, die  $\delta$ -Transformation auf ihre Tauglichkeit für andere regelungstechnische Aufgaben zu überprüfen. Insbesondere erschien uns die Anwendung dieser Transformation für die Identifikation zeitdiskreter Systeme interessant. Es ist bekannt, daß die Qualität der Identifikation zeitdiskreter Systeme in hohem Maß von der numerischen Kondition der Koeffizienten der  $z$ -Übertragungsfunktion abhängt: Selbst bei stabilen Systemen kann (bei sehr kleinen Abtastzeiten) die Identifikation sehr schnell instabil werden. Dieser Aspekt ist in der Praxis bestens bekannt und es wird auch in der Fachliteratur stets darauf verwiesen. Uns war eine interessante Publikation aus der **at** 1/95 („Identifikation zeitkontinuierlicher Systeme mit Block-Puls-Funktionen und bilinearen Transformationen“) bekannt welche die Leistungsfähigkeit von Identifikationsverfahren beschreiben, welche die  $\delta$ -Transformation und die allgemeinere  $\gamma$ -Transformation verwenden. Allerdings ergaben sich für uns bei der praktischen Realisierung dieser Verfahren anhand realer Strecken (servopneumatische Antriebe; Eingangsgröße = Servoventilspannung, Ausgangsgröße = Kolbenweg mit einem Linearpotentiometer gemessen; LS-Identifikation unter Verwendung eines schnellen Signalprozessors) große Schwierigkeiten. Dies soll nun kurz beschrieben werden.

Hier soll der Exkurs über die Deltatransformation von Folgen und damit verwandte Transformationen abgebrochen werden. Interessierte Leser seien auf die Diplomarbeit von Herrn Eckehard Reinfelder :“Parameteridentifikation eines servopneumatischen Antriebes.“ DA GSO-FH Nürnberg, 1995 verwiesen.

#### 4.12 Aufgaben zum 4. Kapitel

„Soviele Dinge müssen getan werden - und alle gleichzeitig. Tausend Jahre sind zu lang. Nutzen wir diese Stunde!“ Mao Tse Tung

1. Aufgabe: Die Integration nach der rekursiven SIMPSON-Regel lautet:

$$v_n = v_{n-2} + \frac{T}{3} \cdot (u_{n-2} + 4 \cdot u_{n-1} + u_n)$$

1.1 Geben Sie die z-Übertragungsfunktion zur vorgelegten Rekursion und den Pol-Nullstellenplan hierzu an.

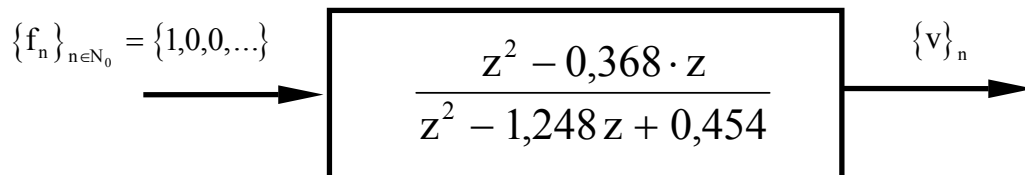
1.2 Geben Sie ein zeitdiskretes Zustandsmodell hierzu in der Form

$$\begin{aligned} \underline{x}_{n+1} &= \underline{\Phi} \cdot \underline{x}_n + \underline{h} \cdot u_n \\ y_n &= \underline{c}^T \cdot \underline{x}_n + d \cdot u_n \end{aligned}$$

2. Aufgabe: Man gebe die z-Transformierte der „Exponentialfolge“

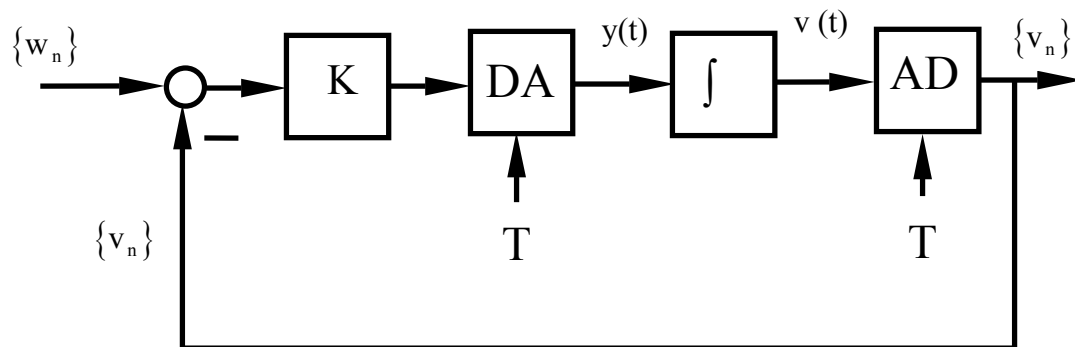
$$\{f_k\} = \{e^{\alpha \cdot k \cdot T}\}; \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{an.}$$

3. Aufgabe: Auf ein zeitdiskretes Übertragungssystem das durch die folgende z-Übertragungsfunktion gegeben ist (vgl. Skizze)



wird die „Stoßfolge“ gegeben. Berechnen Sie die Ausgangsfolge bzw. gewinnen Sie die Ausgangsfolge durch Simulation.

**4. Aufgabe:** Vorgelegt sei die folgende Regelkreisstruktur



Sei  $K = 1$ .

4.1) Berechnen Sie (exakt) die z-Übertragungsfunktion des Regelsystems für  $T = 0,5 \text{ sec}$ ,

$T = 1 \text{ sec}$ ,  $T = 1,5 \text{ sec}$ ,  $T = 2 \text{ sec}$  und  $T = 2,1 \text{ sec}$ .

4.2) Geben Sie für jede dieser Abtastzeiten die Ausgangsfolge und die Stellfolge an. Hierzu können Sie die C-Programme aus dem Skript oder die Simulationssprache SIMULINK verwenden.

### 4.13 Lösung der Aufgaben zum 4. Kapitel

#### 1. Aufgabe:

$$1.1) \quad G^{\#}(z) = \frac{T}{3} \cdot \left( 1 + 2 \cdot \frac{1 + 2 \cdot z}{z^2 - 1} \right)$$

$$1.2) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u_n$$

$$y_n = \left( \frac{2}{3}T \quad \frac{4}{3}T \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_n + \left( \frac{T}{3} \right) \cdot u_n$$

$$2. \text{ Aufgabe: } Z\{ \{f_k\} \} = \frac{Z}{Z - e^{-\alpha \cdot T}}$$

$$3. \text{ Aufgabe: } \{v\}_n = \{1, 0.88, 0.644, 0.404, 0.212, 0.081, 0.005, -0.031, \dots\}$$

#### 4. Aufgabe:

4.1) Da die Regelstrecke nur aus einem Integrierer besteht und also besonders einfach ist, fällt die exakte Diskretisierung schon wieder schwer. Versuchen wir es doch einmal.

Analoges Modell der Strecke:

$$\dot{x} = \dot{x} = y; \quad x(0) = x_0$$

$$v = x$$

oder (mehr formal) :

$$\dot{x} = 0 \cdot x + 1 \cdot y; \quad x(0) = x_0$$

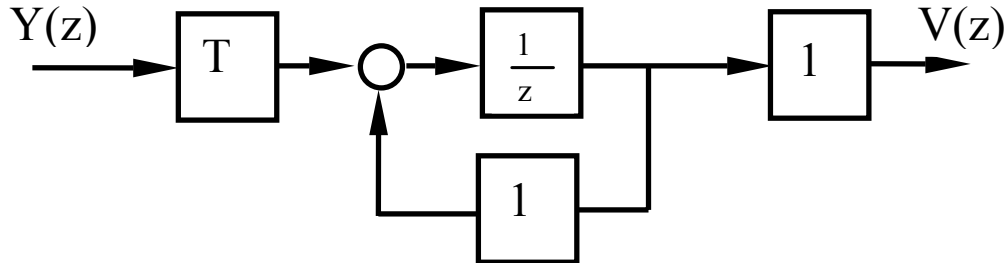
$$v = 1 \cdot x$$

und damit

$$\underline{\Phi}(T) = \varphi(T) = e^{AT} = 1;$$

$$\underline{h}(T) = \int_0^T \varphi(\tau) \cdot b d\tau = \int_0^T 1 \cdot 1 d\tau = T$$

Strukturbild der Regelstrecke im Bildbereich der z-Trafo:



Damit lässt sich  $G_s^{\#}(z)$  sofort angeben als:  $G_s^{\#}(z) = T \cdot \frac{1/z}{1 - 1/z} \cdot 1 = T \cdot \frac{1}{z-1}$ .

Und  $G_w^{\#}(z)$  als:

$$G_w^{\#}(z) = \frac{\frac{KT}{z-1}}{1 + \frac{KT}{z-1}} = \frac{KT}{z-1+KT}$$

$K=1$  und  $T=0,5$  sec

$$G_w^{\#}(z) = \frac{0,5}{z-0,5}$$

$K=1$  und  $T = 1$  sec

$$G_w^{\#}(z) = \frac{1}{z}$$

$K=1$  und  $T = 1,5$  sec

$$G_w^{\#}(z) = \frac{1,5}{z+0,5}$$

$K=1$  und  $T = 2$  sec

$$G_w^{\#}(z) = \frac{2,0}{z-1} \quad \text{An der Stabilitätsgrenze}$$

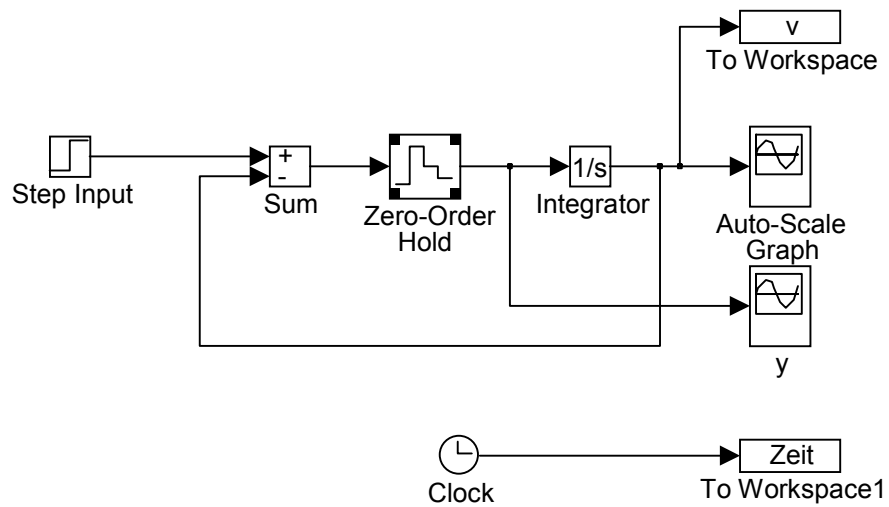
$K=1$  und  $T = 2,1$  sec

$$G_w^{\#}(z) = \frac{2,1}{z+1,1} \quad \text{Instabil!}$$

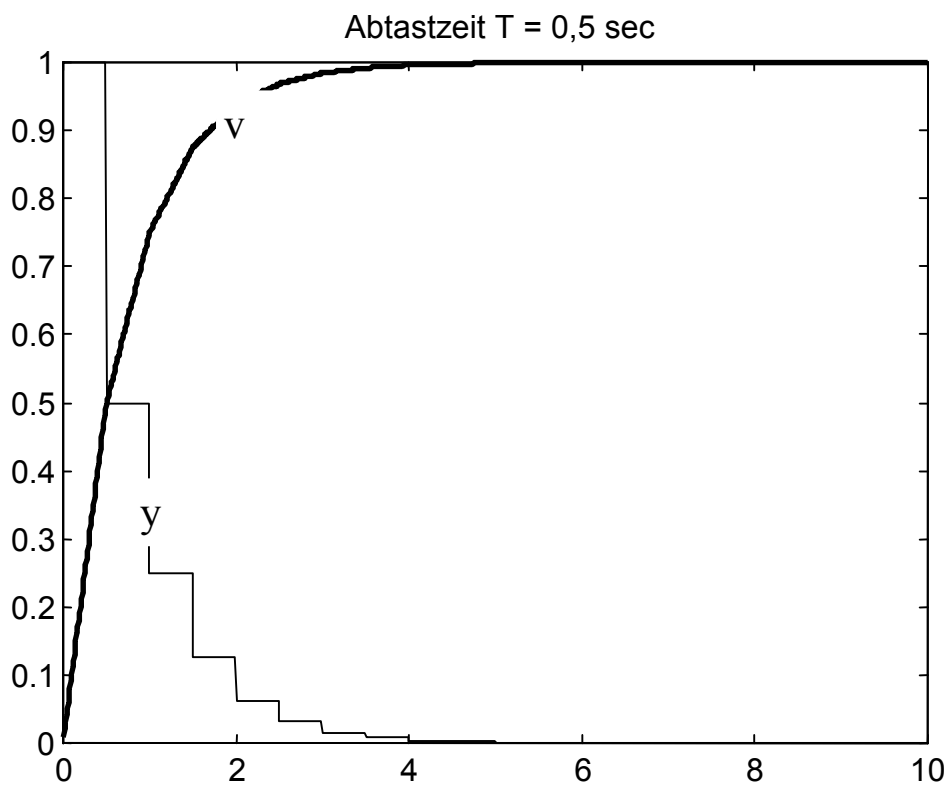
Wie nicht anders zu erwarten, kann bei hinreichend großen Abtastzeiten das Regelsystem instabil werden (obwohl die Regler- und Streckenparameter gar nicht verändert werden).

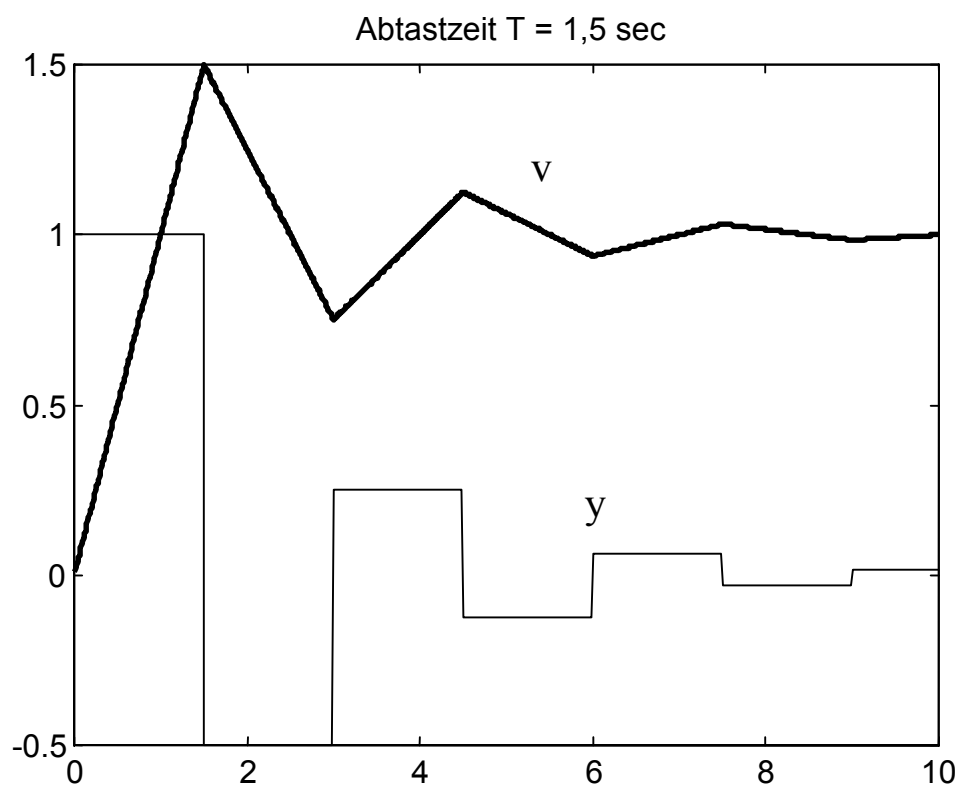
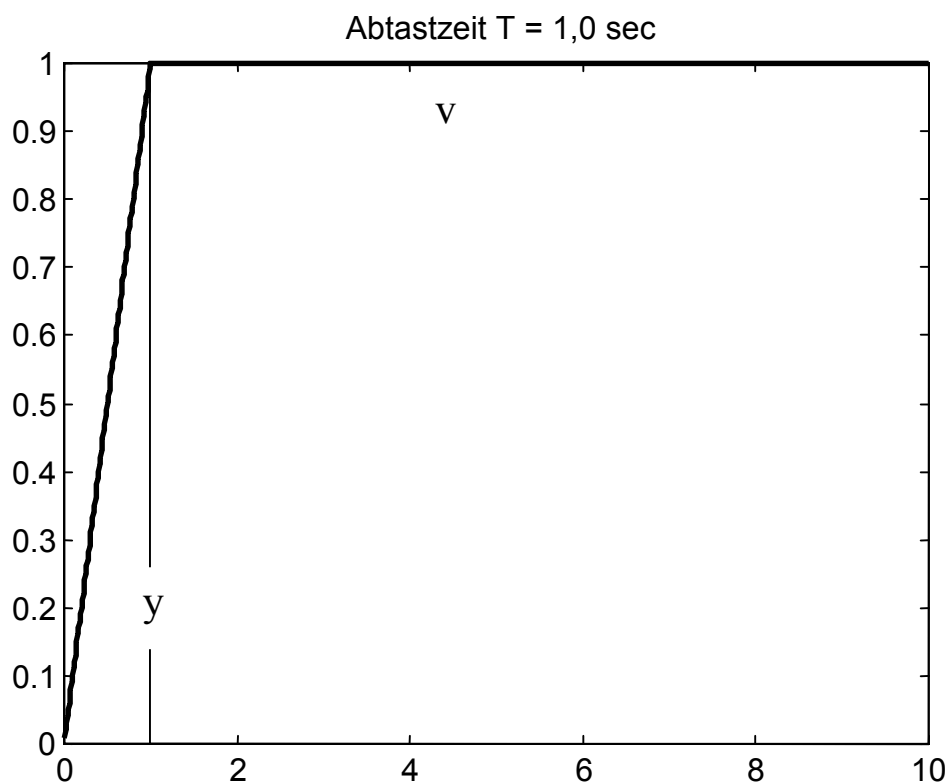


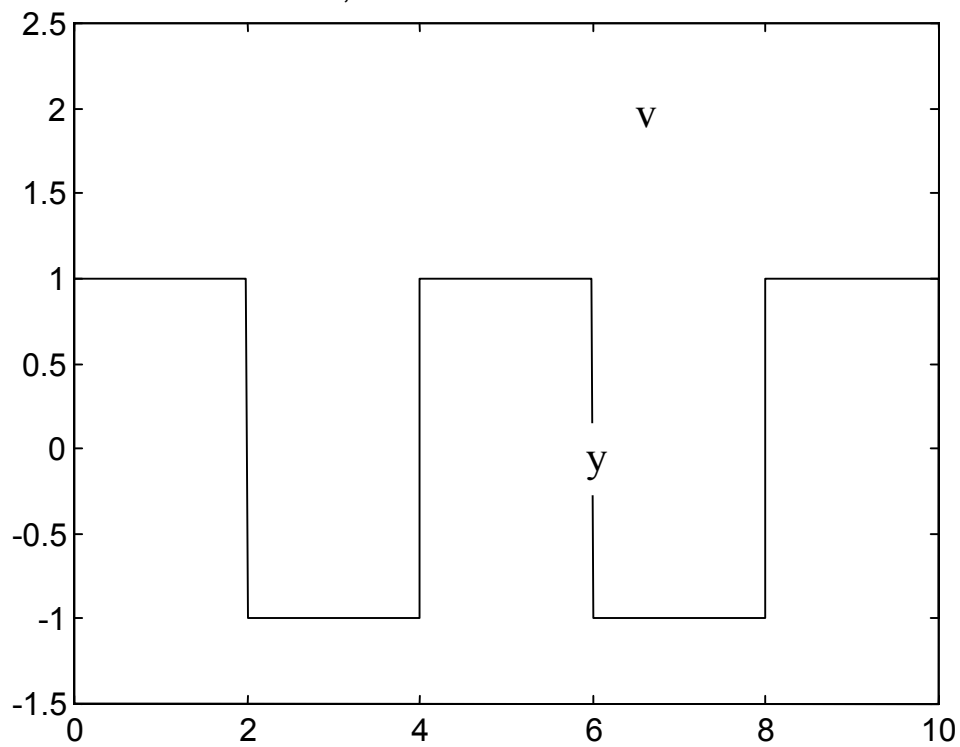
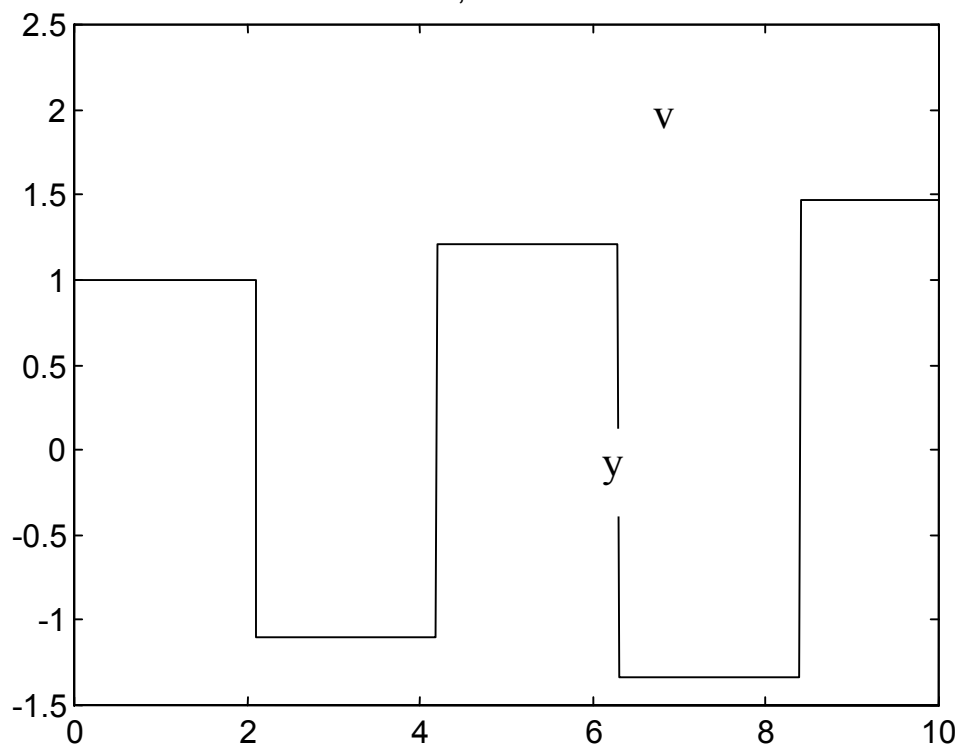
Schauen wir uns auch noch die Simulationen hierzu an. Anstatt des C-Programms aus dem Skript wurde die folgende SIMULINK-Simulation verwendet:



Die Simulationen hierzu ergeben:

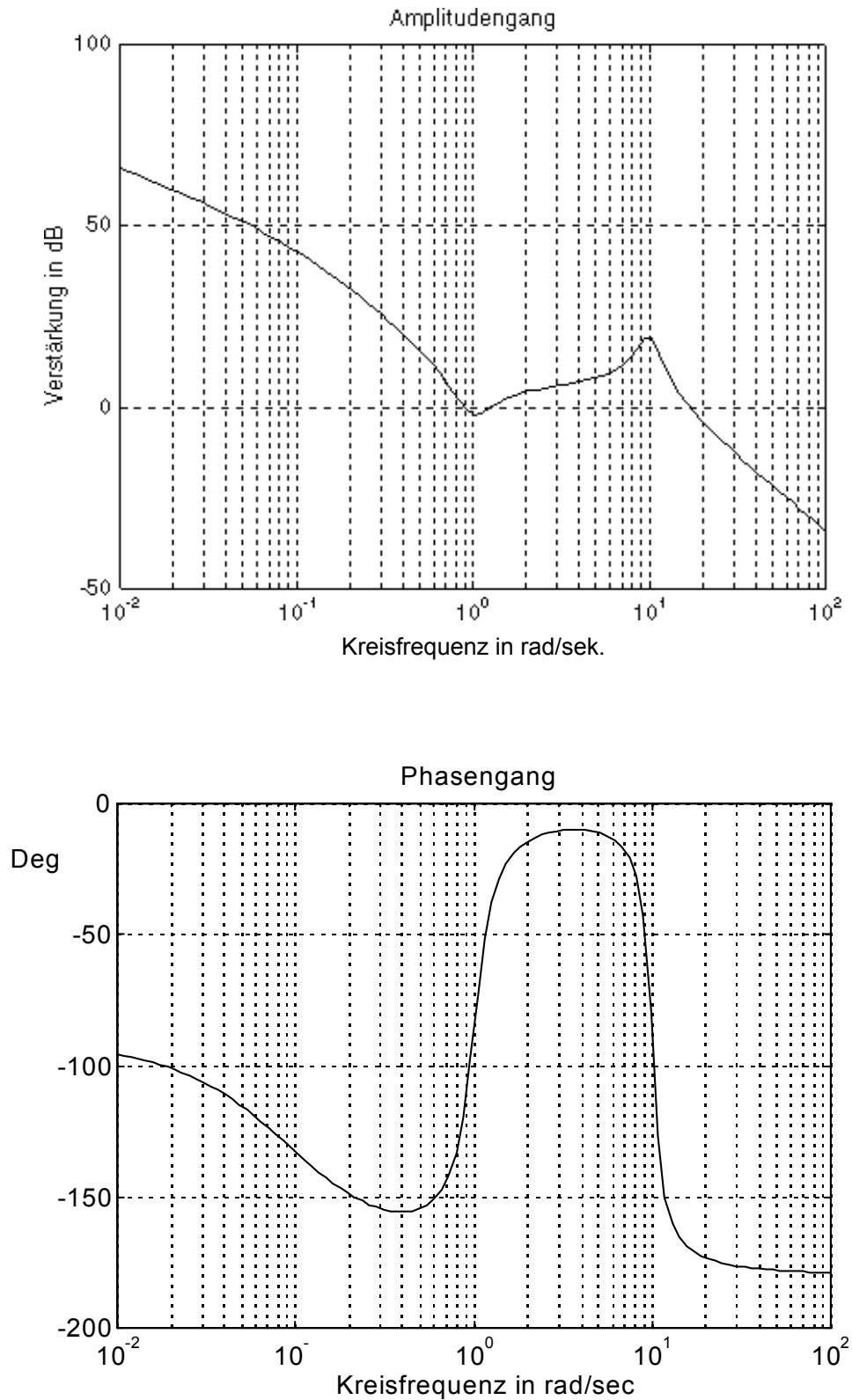




Abtastzeit  $T = 2,0$  sec: Grenzfall der StabilitätAbtastzeit  $T = 2,1$  sec: instabil

## 5. Frequenzgangdarstellung; BODE-Diagramm

„ Das menschliche Hirn ist eine großartige Sache. Es funktioniert vom Augenblick der Geburt an bis zu dem Moment wo du aufstehst um eine Vorlesung zu halten.“ Nach M. Twain.



## 5.1. Herleitung von Darstellungen im BODE-Diagramm anhand eines Beispiels

**Beispiel:**  $G(s) = \frac{200s^2 + 80s + 200}{s^4 + 2,1s^3 + 100,2s^2 + 10s} \Big|_{s=j\omega}$

**Allgemeine Vorgehensweise, dargestellt am vorgelegten Beispiel:**

### (1) V-Normalform erstellen

$G(s)$  hat Nullstellen bei  $s_{0,1} = -0.2 \pm j0.98 = -\tilde{D}_1 \tilde{\omega}_{n1} \pm j \tilde{\omega}_{n1} \sqrt{1 - \tilde{D}_1^2}$   
 $s_{\infty,0} = 0$

und Pole bei  $s_{\infty,1} = -0.1 \hat{=} -\frac{1}{\tau_1} = -\omega_1$

$s_{\infty,2,3} = -1 \pm j9.94 = -D_1 \omega_{n1} \pm j \omega_{n1} \sqrt{1 - D_1^2}$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{200}{s} \cdot \frac{(s + 0.2 + j0.98)(s + 0.2 - j0.98)}{(s + 0.1)(s + 1 + j9.94)(s + 1 - j9.94)} = \frac{200}{s} \cdot \frac{s^2 + 0.4s + 1}{(s + 0.1)(s^2 + 2s + 100)}$$

$$\Rightarrow \text{Mit Abkürzungen: } G(s) = \frac{200}{s} \cdot \frac{s^2 + 2\tilde{D}_1 \tilde{\omega}_{n1} s + \tilde{\omega}_{n1}^2}{(s + \omega_1)(s^2 + 2D_1 \omega_{n1} s + \omega_{n1}^2)}$$

$$\omega_{n1} = 10; \tilde{\omega}_{n1} = 1; \omega_1 = 0.1; D_1 = 0.1; \tilde{D}_1 = 0.2$$

$$G(s) = \frac{200}{s} \cdot \frac{1 + 2\left(\frac{0.2}{1}\right)s + \left(\frac{s}{1}\right)^2}{0.1\left(1 + \frac{s}{0.1}\right)100\left(1 + 2\left(\frac{0.1}{10}\right)s + \left(\frac{s}{10}\right)^2\right)} = \frac{20}{s} \cdot \frac{1 + 2\left(\frac{0.2}{1}\right)s + \left(\frac{s}{1}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{0.1}\right)\left(1 + 2\left(\frac{0.1}{10}\right)s + \left(\frac{s}{10}\right)^2\right)}$$

$$\text{Typ: } \frac{V}{s^p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{\tilde{\omega}_1}\right) \cdots \left(1 + 2\left(\frac{\tilde{D}_1}{\tilde{\omega}_{n1}}\right)s + \left(\frac{s}{\tilde{\omega}_{n1}}\right)^2\right) \cdots}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) \cdots \left(1 + 2\left(\frac{D_1}{\omega_{n1}}\right)s + \left(\frac{s}{\omega_{n1}}\right)^2\right) \cdots}$$

"V - Normalform"

(Beachte: Stets gilt  $|D_i| < 1$  und  $|\tilde{D}_i| < 1$ )

**(2) Bode-Papier einteilen**

$\omega_1, \omega_{n1}, \tilde{\omega}_{n1}$  müssen dargestellt werden.

Man verwendet häufig Bode-Papier mit 4 Dekaden (vgl. Anhang A1).

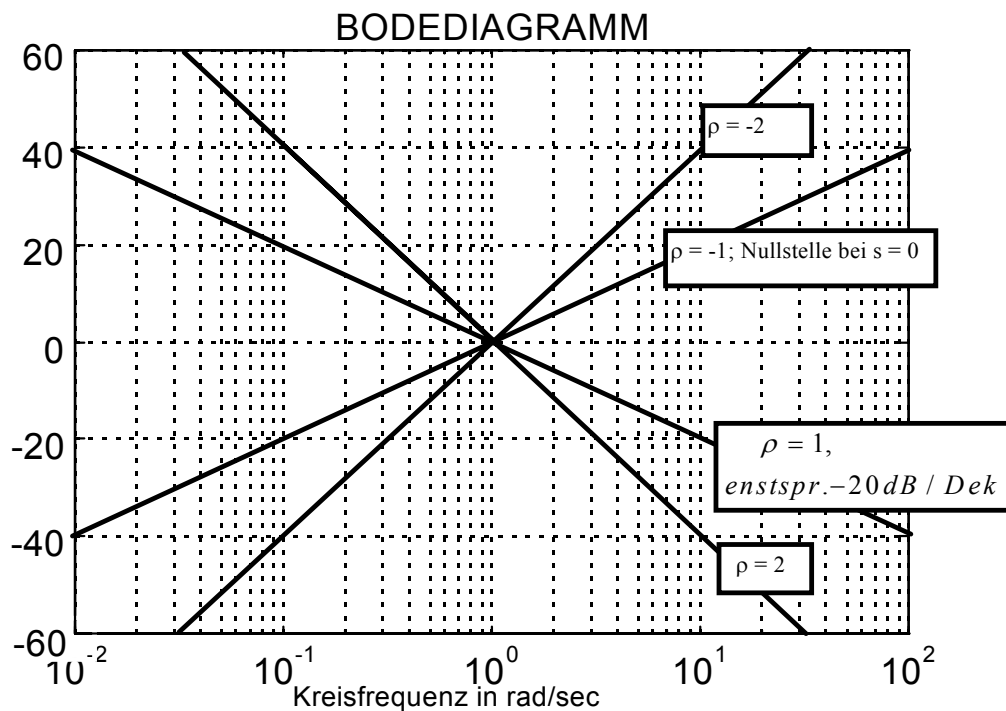
**(3) dB-Maßstab für y-Achse eintragen**

$$|V|_{dB} = 20 \cdot \lg|V|$$

tabellarischer Überblick über die wichtigsten Werte:

$ V $		$ V _{dB}$		$ V $		$ V _{dB}$
100	→	40		1/2	→	-6
10	→	20		1/10	→	-20
2	→	6		1/100	→	-40
1	→	0		$\sqrt{2}$	→	3
				$1/\sqrt{2}$	→	-3

(4)  $\left| \frac{1}{(j\omega)^\rho} \right|_{dB}$  **eintragen**  $\left| \frac{1}{(j\omega)^\rho} \right|_{dB} = 20 \cdot \lg\left(\frac{1}{\omega^\rho}\right) = -20 \cdot \rho \cdot \lg(\omega) = \begin{cases} -20\rho \text{ in dB für } \omega = 10 \\ 0 \text{ dB für } \omega = 1 \\ +20\rho \text{ in dB für } \omega = 1/10 \end{cases}$



Im betrachteten Beispiel:  $\rho = 1$

**(5) Amplitudengang um  $|V|_{dB}$  korrigieren**

$$V = 20 \Rightarrow V_{dB} = 26dB \Rightarrow \text{Verschiebung der 0dB-Achse um -26dB}$$

$$\left| \frac{V}{j\omega} \right|_{dB} = |V|_{dB} - |j\omega|_{dB} = -|j\omega|_{dB} + |V|_{dB}$$

**(6) Amplitudengang von  $\left| \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\tilde{\omega}_i}} \right|_{dB}$  und von  $\left| 1 + \frac{j\omega}{\tilde{\omega}_i} \right|_{dB}$  zeichnen**

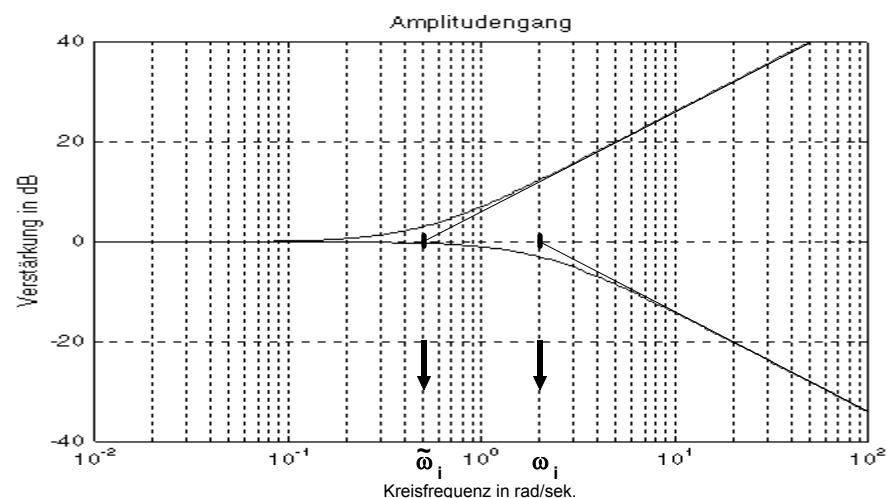
$$\text{einfache Nullstelle:} \quad \left| 1 + \frac{j\omega}{\tilde{\omega}_i} \right|_{dB} = 20 \cdot \lg \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\tilde{\omega}_i} \right)^2} \right) = \begin{cases} 0dB \text{ für } \omega \ll \tilde{\omega}_i \\ 3dB \text{ für } \omega = \tilde{\omega}_i \\ 20dB \cdot \lg \left( \frac{\omega}{\tilde{\omega}_i} \right) \text{ für } \omega \gg \tilde{\omega}_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow 20dB/\text{Dekade} - \text{Steigung für } \omega \gg \omega_i$$

$$\text{einfache Polstelle:} \quad \left| \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_i}} \right|_{dB} = -20 \cdot \lg \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_i} \right)^2} \right) = \begin{cases} 0dB \text{ für } \omega \ll \omega_i \\ -3dB \text{ für } \omega = \omega_i \\ 20dB \cdot \lg \left( \frac{\omega_i}{\omega} \right) \text{ für } \omega \gg \omega_i \end{cases}$$

$$= 20dB \cdot \lg(\omega_i) - 20dB \cdot \lg(\omega)$$

$$\Rightarrow 20dB/\text{Dekade} - \text{Gefälle für } \omega \gg \omega_i$$



(7) Amplitudengänge von  $\left(1 + 2\left(\frac{\tilde{D}_i}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right)j\omega + \left(\frac{j\omega}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right)^2\right)$  und  $\frac{1}{1 + 2\left(\frac{D_i}{\omega_{n_i}}\right)j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}}\right)^2}$  zeichnen

**Beachte:**  $|D_i|, |\tilde{D}_i| < 1$

konjugiert komplexes Nullstellenpaar:

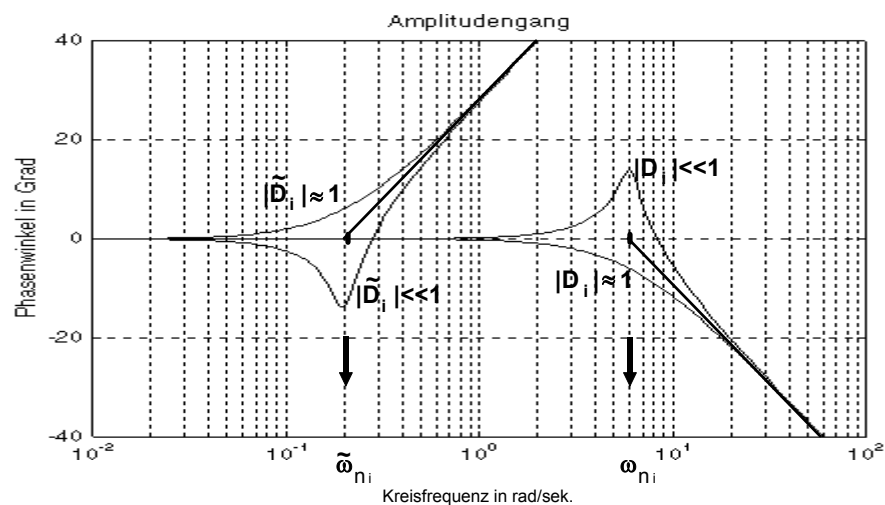
$$\left|1 + 2\left(\frac{\tilde{D}_i}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right)j\omega + \left(\frac{j\omega}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right)^2\right|_{dB} = 20dB \cdot \lg \left( \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right)^2}^2 + 4\left(\frac{\tilde{D}_i \omega}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right)^2} \right) = \begin{cases} 0dB \text{ für } \omega \ll \tilde{\omega}_{n_i} \\ 20dB \cdot \lg(2\tilde{D}_i) \text{ für } \omega = \tilde{\omega}_{n_i} \\ 40dB \cdot \lg\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right) \text{ für } \omega \gg \tilde{\omega}_{n_i} \end{cases}$$

$\Rightarrow 40dB/\text{Dekade} - \text{Steigung}$

konjugiert komplexes Polstellenpaar:

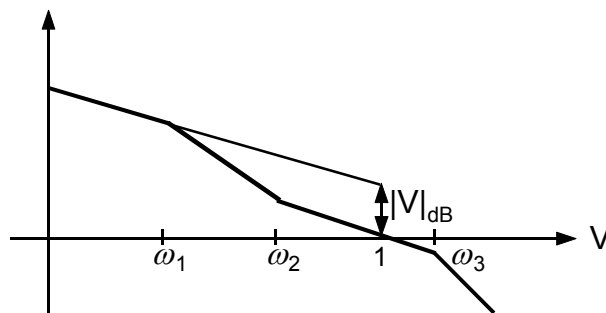
$$\left|\frac{1}{1 + 2\left(\frac{D_i}{\omega_{n_i}}\right)j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}}\right)^2}\right|_{dB} = \begin{cases} 0dB \text{ für } \omega \ll \omega_{n_i} \\ -20dB \cdot \lg(2D_i) \text{ für } \omega = \omega_{n_i} \\ 40dB \cdot \lg\left(\frac{\omega_{n_i}}{\omega}\right) \text{ für } \omega \gg \omega_{n_i} \end{cases}$$

$\Rightarrow 40dB/\text{Dekade} - \text{Gefälle}$



**Korrekturkennlinien für den einzelnen Amplitudengang verwenden!**



**(8) Einzelne Amplitudengänge aufaddieren**

$$\frac{V}{j\omega} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_3}\right)}$$

zunehmendes Gefälle: es handelt sich um eine weitere Polstelle

abnehmendes Gefälle: es handelt sich um eine weitere Nullstelle

**(9) Phasengang zeichnen**

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j \arg\{G(j\omega)\}}$$

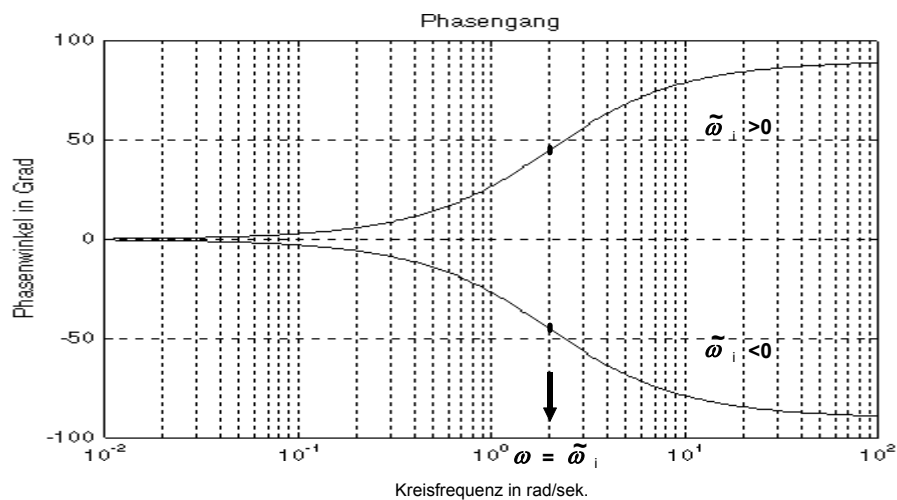
$$\arg\{G(j\omega)\} = \arg\left\{1 + 2\left(\frac{0.2}{1}\right)(j\omega) + \left(\frac{j\omega}{1}\right)^2\right\} - \arg\{j\omega\} - \arg\left\{1 + \frac{j\omega}{0.1}\right\} - \arg\left\{1 + 2\left(\frac{0.1}{10}\right)(j\omega) + \left(\frac{j\omega}{10}\right)^2\right\}$$

Im vorliegenden Fall ist:  $\arg\{j\omega\} = -90^\circ$

einfache Nullstelle:

$$\arg\left\{1 + \frac{j\omega}{\tilde{\omega}_i}\right\} = \arctan\left(\frac{\omega/\tilde{\omega}_i}{1}\right) = \begin{cases} 0^\circ & 0^\circ & |\omega| \ll |\tilde{\omega}_i| \\ +45^\circ & -45^\circ & |\omega| = |\tilde{\omega}_i| \\ +90^\circ & -90^\circ & |\omega| \gg |\tilde{\omega}_i| \end{cases}$$

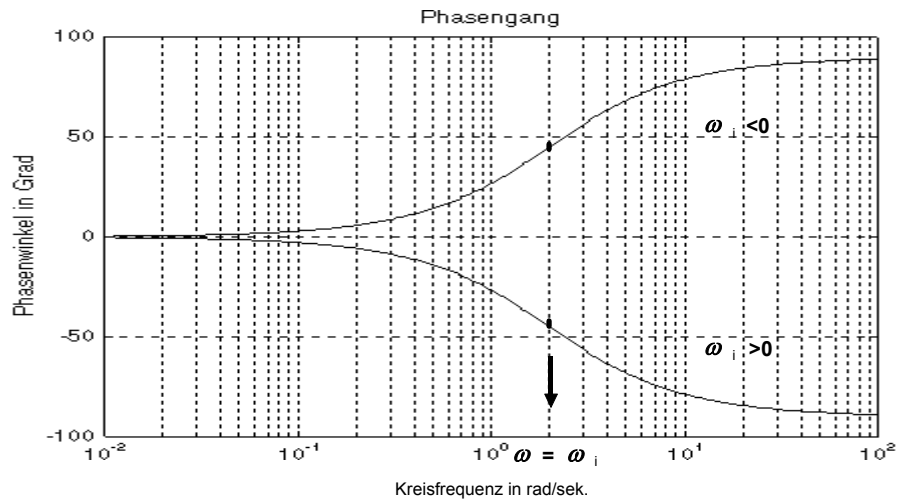
$\underbrace{\quad}_{\text{falls } \tilde{\omega}_i > 0 \text{ Nullstelle links}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{falls } \tilde{\omega}_i < 0 \text{ Nullstelle rechts}}$



einfache Polstelle:

$$\arg \left\{ \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_i}} \right\} = -\arctan \left( \frac{\omega}{\omega_i} \right) = \begin{cases} 0^\circ & \text{falls } \omega_i > 0 \\ -45^\circ & \text{falls } \omega_i < 0 \\ -90^\circ & \text{falls } \omega_i < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0^\circ & \text{falls } \omega_i < 0 \\ +45^\circ & \text{falls } \omega_i < 0 \\ +90^\circ & \text{falls } \omega_i < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |\omega| \ll |\omega_i| \\ |\omega| = |\omega_i| \\ |\omega| \gg |\omega_i| \end{cases}$$

falls  $\omega_i > 0$  Polstelle links      falls  $\omega_i < 0$  Polstelle rechts

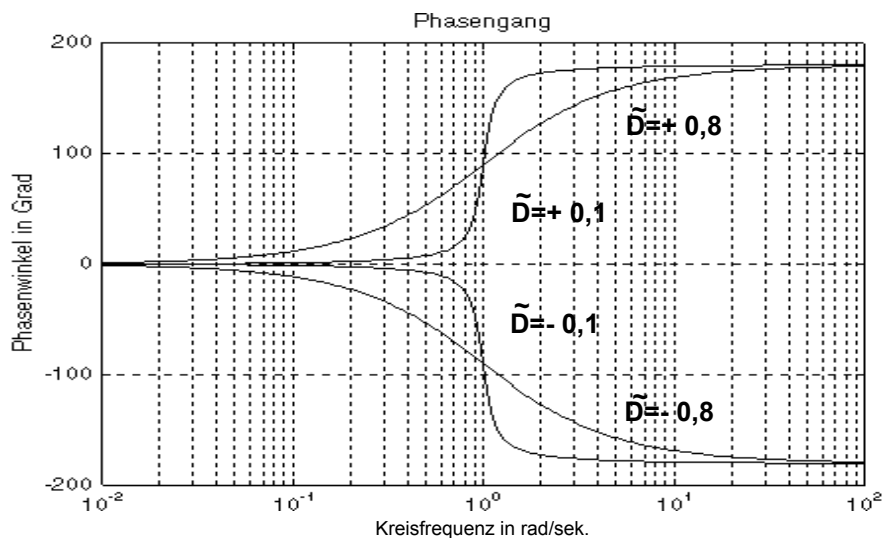


Zum Zeichnen der Phasengänge einfacher (reeller) Pol- bzw. Nullstellen verwendet man das Phasenlineal (siehe Anhang A4).

konjugiert komplexes Nullstellenpaar:

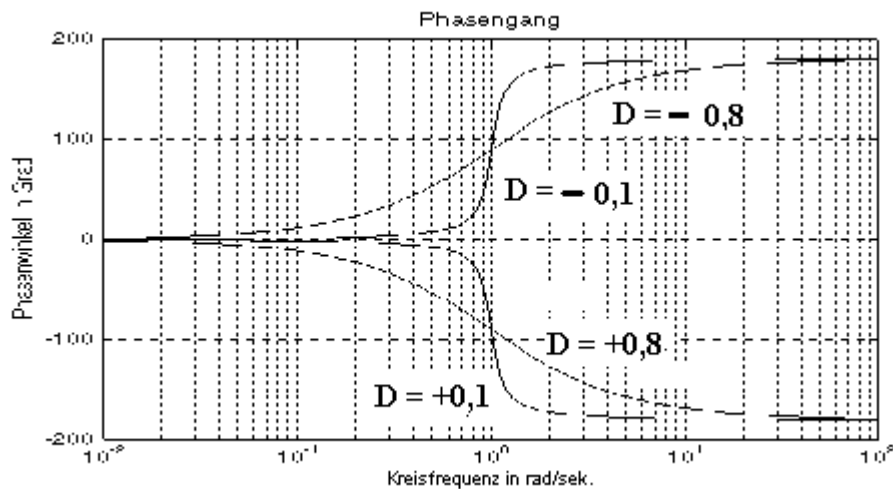
$$\arg \left\{ 1 + 2\tilde{D} \left( \frac{j\omega}{\tilde{\omega}_n} \right) + \left( \frac{j\omega}{\tilde{\omega}_n} \right)^2 \right\} = \arctan \left\{ \frac{2\tilde{D} \left( \frac{\omega}{\tilde{\omega}_n} \right)}{1 - \left( \frac{\omega}{\tilde{\omega}_n} \right)^2} \right\} = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \omega \ll \tilde{\omega}_n \\ +90^\circ & \text{für } \omega = \tilde{\omega}_n \\ +180^\circ & \text{für } \omega \gg \tilde{\omega}_n \end{cases} \quad \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \omega \ll \tilde{\omega}_n \\ -90^\circ & \text{für } \omega = \tilde{\omega}_n \\ -180^\circ & \text{für } \omega \gg \tilde{\omega}_n \end{cases}$$

falls  $\tilde{D} > 0$  Nullstelle links      falls  $\tilde{D} < 0$  Nullstelle rechts



*konjugiert komplexes Polstellenpaar:*

$$\arg \left\{ \frac{1}{1 + 2D \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2} \right\} = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \omega \ll \omega_n \\ -90^\circ & \text{für } \omega = \omega_n \\ -180^\circ & \text{für } \omega \gg \omega_n \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{falls } D > 0 \\ \text{Polstelle links} \end{matrix} \quad \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \omega \ll \omega_n \\ +90^\circ & \text{für } \omega = \omega_n \\ +180^\circ & \text{für } \omega \gg \omega_n \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{falls } D < 0 \\ \text{Polstelle rechts} \end{matrix}$$



Zum Zeichnen der Phasengänge von konjugiert komplexen Pol- bzw. Nullstellenpaaren verwendet man den Phasengang (siehe Anhang A4).

Endlich addiert man alle Phasenbeiträge zusammen und stellt die summe graphisch dar. Das Ergebnis (sowohl Amplitudengang als auch Phasengang ) steht auf der Titelseite dieses Kapitels.

Noch eine Schlußbemerkung:



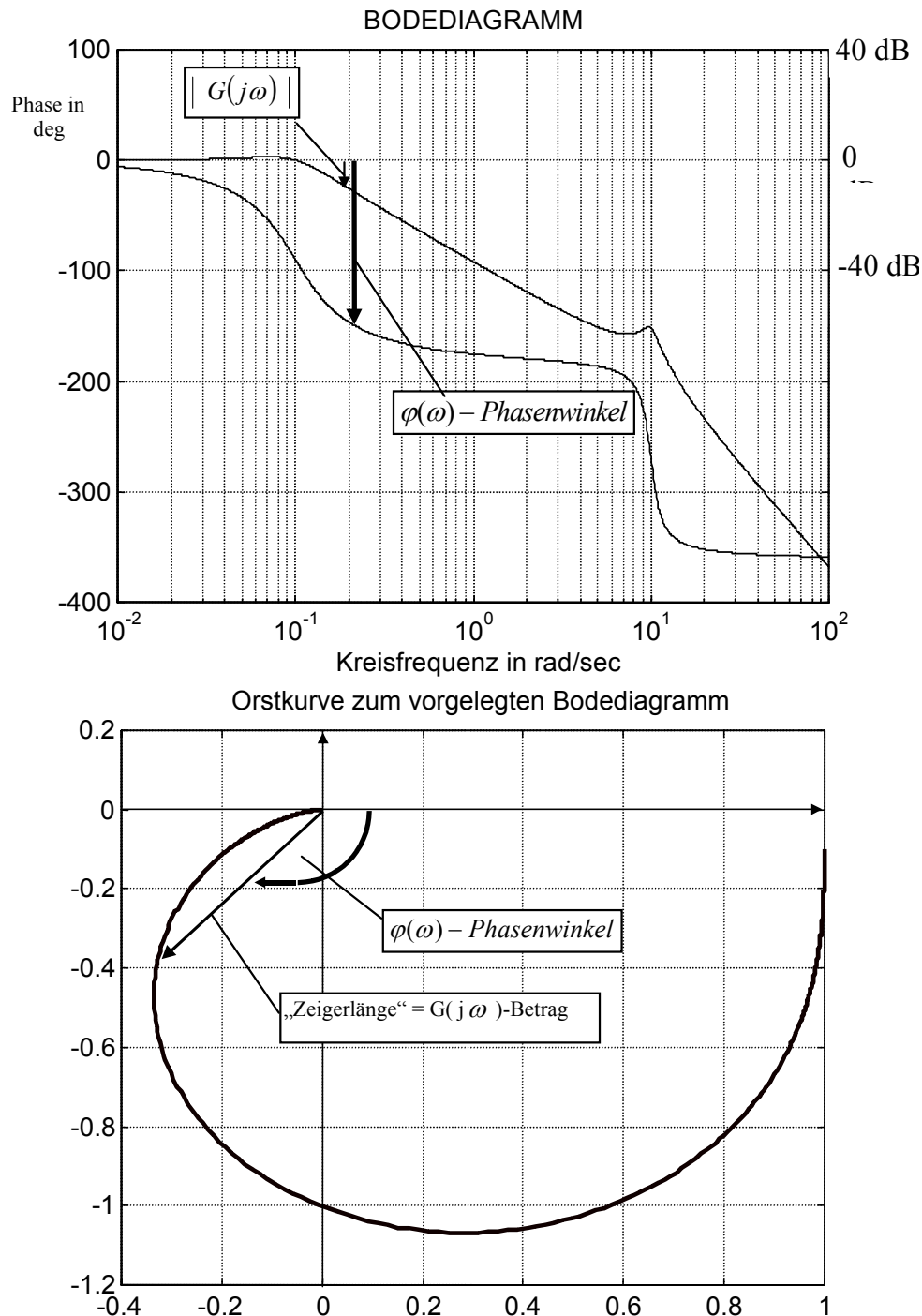
Bekanntlich nennt man Übertragungssysteme, bei denen mit dem Amplitudengang der Phasengang bereits eindeutig festliegt und nicht mehr gezeichnet werden muß:  
Phasenminimumsysteme, minimalphasige Systeme oder  
 allpaßfreie Systeme.

Phasenminimumsysteme sind also stabil und haben nur Nullstellen mit  $\text{Re}\{s_{i0}\} < 0$ .

## 5.2. Skizzieren der Ortskurve des Frequenzgangs mit Unterstützung des BODE-Diagramms

Hier können wir uns mit einigen beispielhaften Hinweisen begnügen.

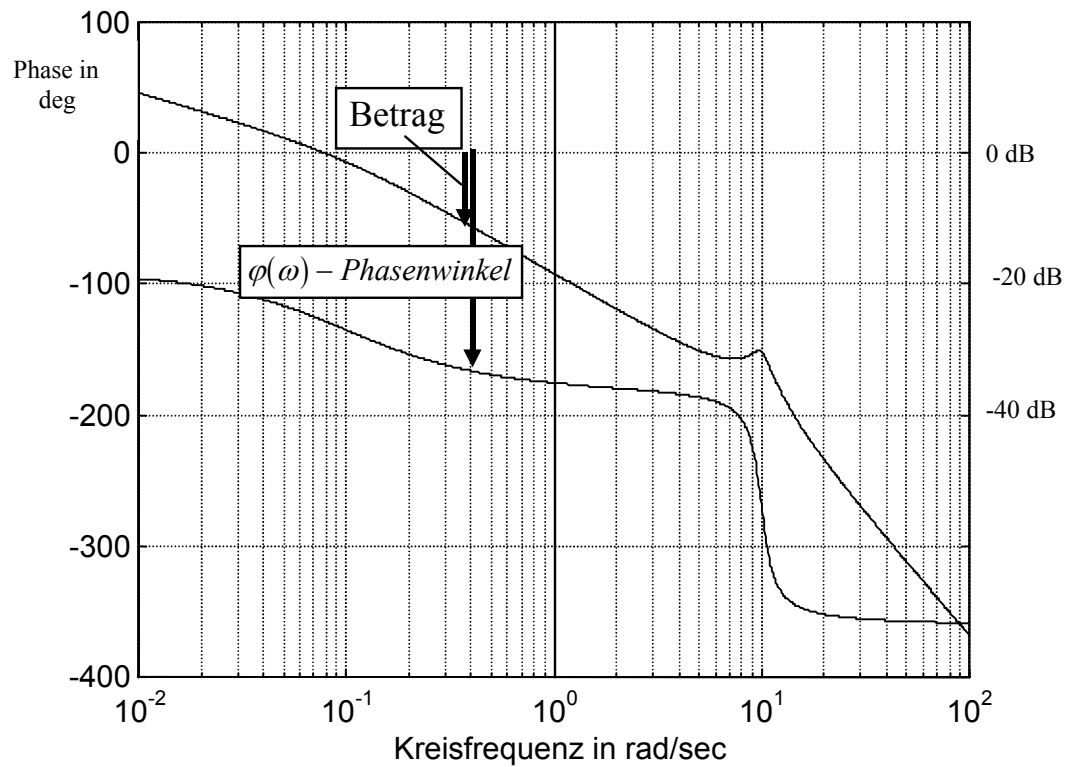
Beispiel 1:  $G(j\omega)$  sei durch sein Bodediagramm gegeben



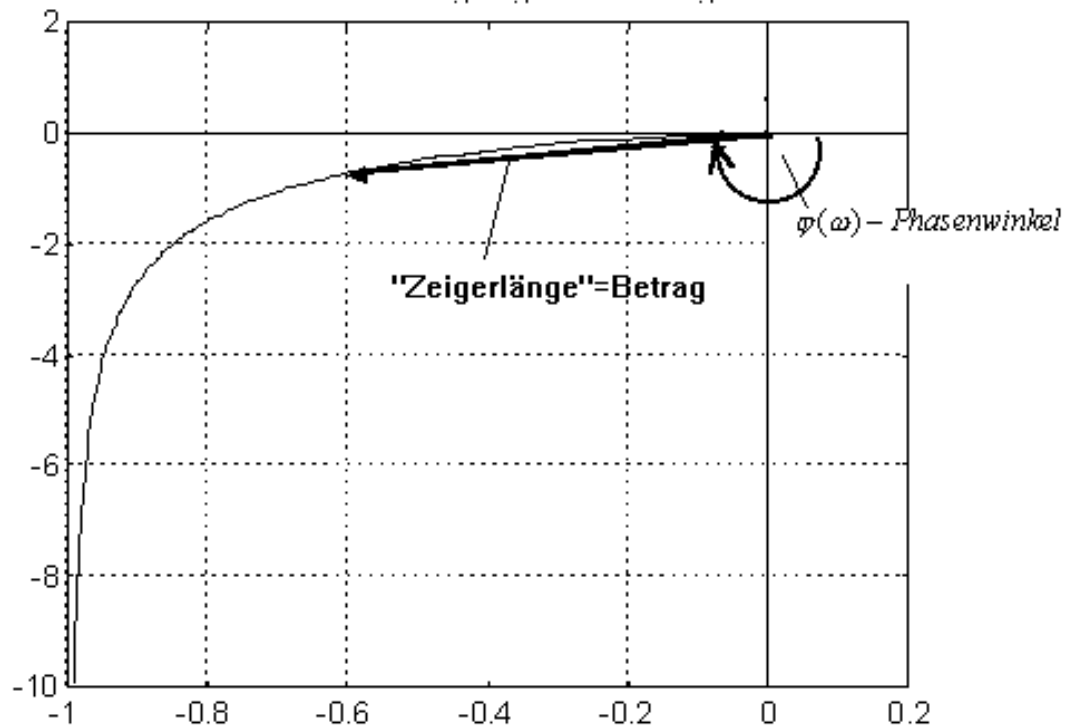
Für verschiedene Kreisfrequenzen liest man aus dem Bodediagramm den Betrag und die Phase von  $G(j\omega)$  aus und trägt diese als komplexen Zeiger in die Ortskurvenebene ein. Auf diese Weise erzeugt man sich qualitativ den Verlauf der Ortskurve des Frequenzgangs („Nyquistortskurve“).

Beispiel 2:  $G(j\omega)$  sei durch sein Bodediagramm gegeben

### BODEDIAGRAMM



### Orstkurve zum vorgelegten Bodediagramm



Für verschiedenen Kreisfrequenzen liest man aus dem Bodediagramm den Betrag und die Phase von  $G(j\omega)$  aus und trägt diese als komplexen Zeiger in die Ortskurvenebene ein. Überlegen Sie sich, wie hier der Verlauf der Ortskurve in der Nähe des Koordinatenursprungs aussieht.

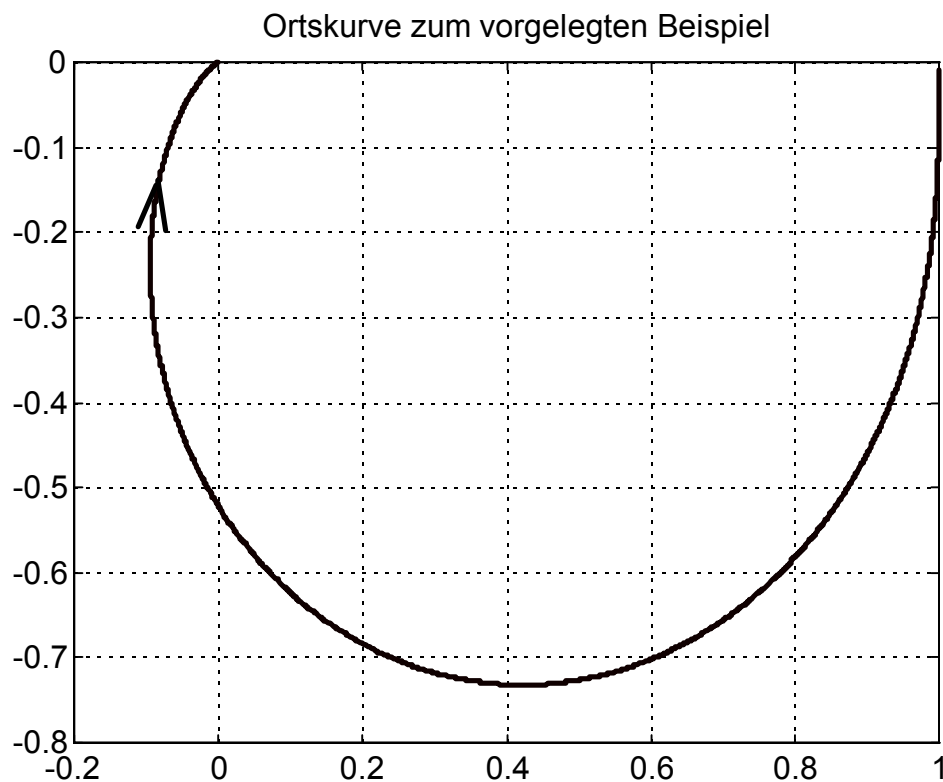


Versuchen sie die folgende Aufgabe zu lösen:

Von einer Regelstrecke ist bekannt, daß  $G_s(s)$  vom Typ

$$G_s(s) = \frac{K}{s^6 + a_5 s^5 + \dots + a_0} \quad \text{ist.}$$

Folgende Ortskurve des Frequenzgangs wurde aufgenommen:



Ist die Regelstrecke stabil ?

Lösung:

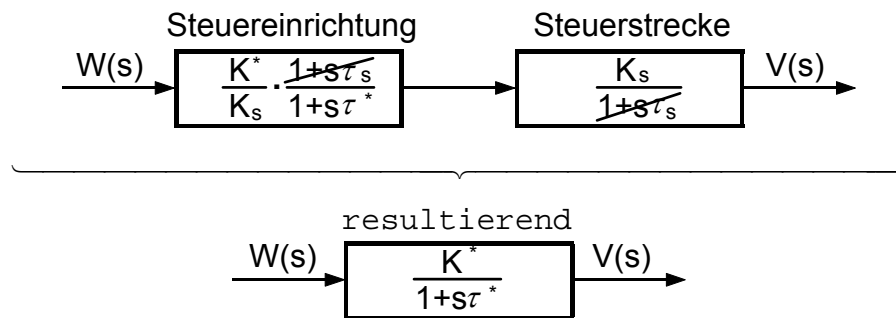
Die Regelstrecke ist natürlich instabil. Wenn die Strecke stabil wäre, dann müßte der Phasenwinkel von  $\omega = 0$  bis  $\omega \rightarrow \infty$  einen Winkelbetrag von  $6 \cdot (-90^\circ) = -540^\circ$  durchlaufen. Es wurden aber nur eine Winkeländerung von  $-180^\circ$  festgestellt. Es muß also ein instabiles System sein das 2 Pole „rechts“ und 4 Pole „links“ hat. Die Reglerübertragungsfunktion lautet übrigens:

$$G(s) = \frac{1}{s^6 + 0,5s^5 - 10s^4 - 10s^3 + s^2 + s + 1}$$

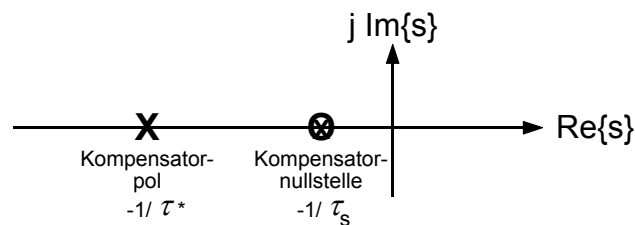
$G_s(s)$  hat Pole bei  $s_\infty = +3.3455, -2.7705, -1.1658, +0.4905, -0.1999 \pm 0.3856i$ .

### 5.3 Kürzen von Polstellen durch Nullstellen

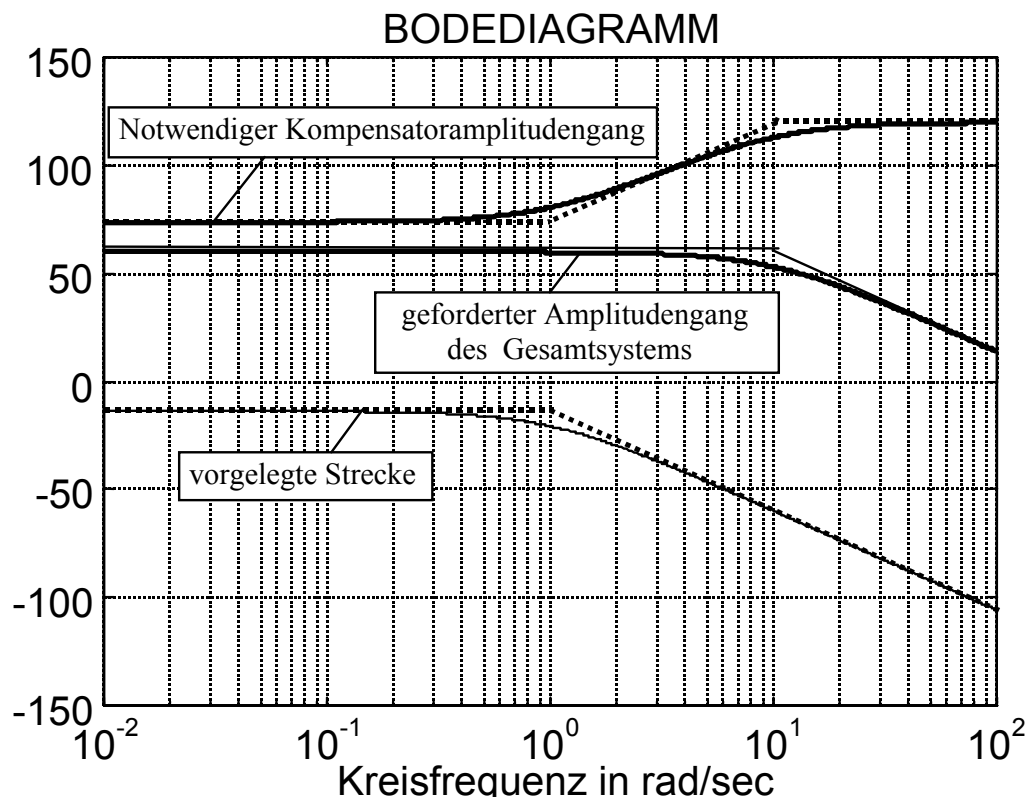
Es sei an 3.5 (Anmerkungen zum Steuerungsproblem = Kürzen von langsamen Polstellen der Steuerstrecke durch Kompensatornullstellen) erinnert.



Interpretation der Kürzung im P/N-Plan:



Neben der Interpretation im PN-Plan gibt es noch die aussagekräftigere Darstellung mit dem BODE-Diagramm. Wir begnügen uns mit den Amplitudengängen:





Kürzen von langsamen Streckenpolen durch Kompensatornullstellen kann man also folgendermaßen verstehen:

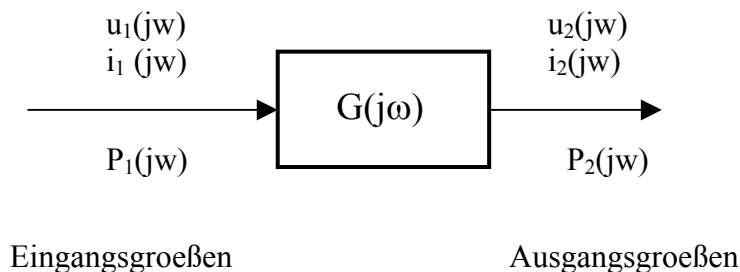


Da, wo ein Gefälle im Amplitudengang der Strecke einsetzt (Verursacher hierfür ist ja ein Streckenpol), ist dieser durch eine entsprechende Steigung des Kompensatoramplitudengangs (verursacht durch eine Kompensatornullstelle) zu begradigen.

Wenn man zur Lösung des vorgelegten Problems statt der Rechnung oder statt der Verwendung des PN-Plans das Bodediagramm heranzieht, so hat dies den Vorteil, daß die mathematische Beschreibung der Strecke gar nicht bekannt sein muß. Es genügt der gemessene Streckenfrequenzgang. Durch Anlegen von Asymptoten an den Streckenfrequenzgang gewinnt man sofort die richtige Vorstellung von Kompensatorfrequenzgang. Sowohl als Kurve als auch als mathematischen Ausdruck. Wie der Kompensator dann schaltungstechnisch zu realisieren ist, steht in Kapitel 3.

#### 5.4 Weitere Anmerkungen zum Rechnen mit „dB“

Wir betrachten folgende beispielhafte Situation :



Unter „Amplitudengang“  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log \frac{|V(j\omega)|}{|U(j\omega)|}$  versteht man hier entweder

$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log \frac{|U_2(j\omega)|}{|U_1(j\omega)|}$  oder alternativ  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log \frac{|I_2(j\omega)|}{|I_1(j\omega)|}$  (je nachdem, welche Signale Ein- und Ausgangsgrößen sein sollen) – das „Signalverhältnis“

oder  $|G(j\omega)|_{dB} = 10 \cdot \log \frac{|P_2(j\omega)|}{|P_1(j\omega)|}$  - das „Leistungsverhältnis“ weil bei gleichen

Widerständen sich die Leistungen wie die Quadrate wie der Spannungen bzw. der Ströme verhalten.

Manchmal wird statt des Amplitudengangs auch angegeben:

$$a_{dB} = 20 \cdot \log \frac{|U_1(j\omega)|}{|U_2(j\omega)|} \text{ oder alternativ } a_{dB} = 20 \cdot \log \frac{|I_1(j\omega)|}{|I_2(j\omega)|} \text{ oder } a_{dB} = 10 \cdot \log \frac{|P_1(j\omega)|}{|P_2(j\omega)|}$$

die Dämpfung (bzw. auch Dämpfungsmaß genannt)

und statt des Phasengangs  $b = -\arg(G(j\omega)) = -\varphi(j\omega)$ , das Phasenmaß.

Zusammengefaßt nennt man  $g = a + j \cdot b \in \mathbb{C}$  das (komplexe) Übertragungsmaß.

In der Nachrichtentechnik wird nicht selten als Eingangsquelle ein sogenannter „Milliwattsender“ verwendet. Um dies zu kennzeichnen schreibt man beim Amplitudengang:

$$|G(j\omega)|_{dBm} = 10 \cdot \log \frac{|P_2(j\omega)[mW]|}{|P_1(j\omega)[1mW]|}.$$

Oder man verwendet einen „Wattsender“ und kennzeichnet dies durch:

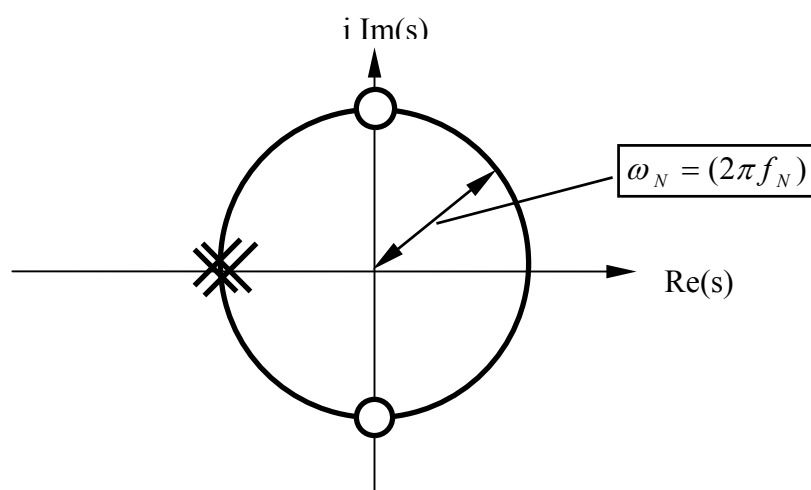
$$|G(j\omega)|_{dBW} = 10 \cdot \log \frac{|P_2(j\omega)[W]|}{|P_1(j\omega)[1W]|}.$$

In diesem Fall spricht man nicht mehr vom Amplitudengang sondern vom Leistungspegel.

Man beachte: 30dBm = 0 dBW bzw. 0 dBm = -30dBW.

## 5.5 Nochmals: Entwurf eines Notchfilters

In 3.7 heißt es: „Nachstehende Skizze zeigt den PN-Plan des Notchfilters. Warum gerade diese und keine andere PN-Konfiguration günstig ist, wird letztlich erst bei der Betrachtung zum BODE-Diagramm klar. Hier sei auf das 5. Kapitel verwiesen.“

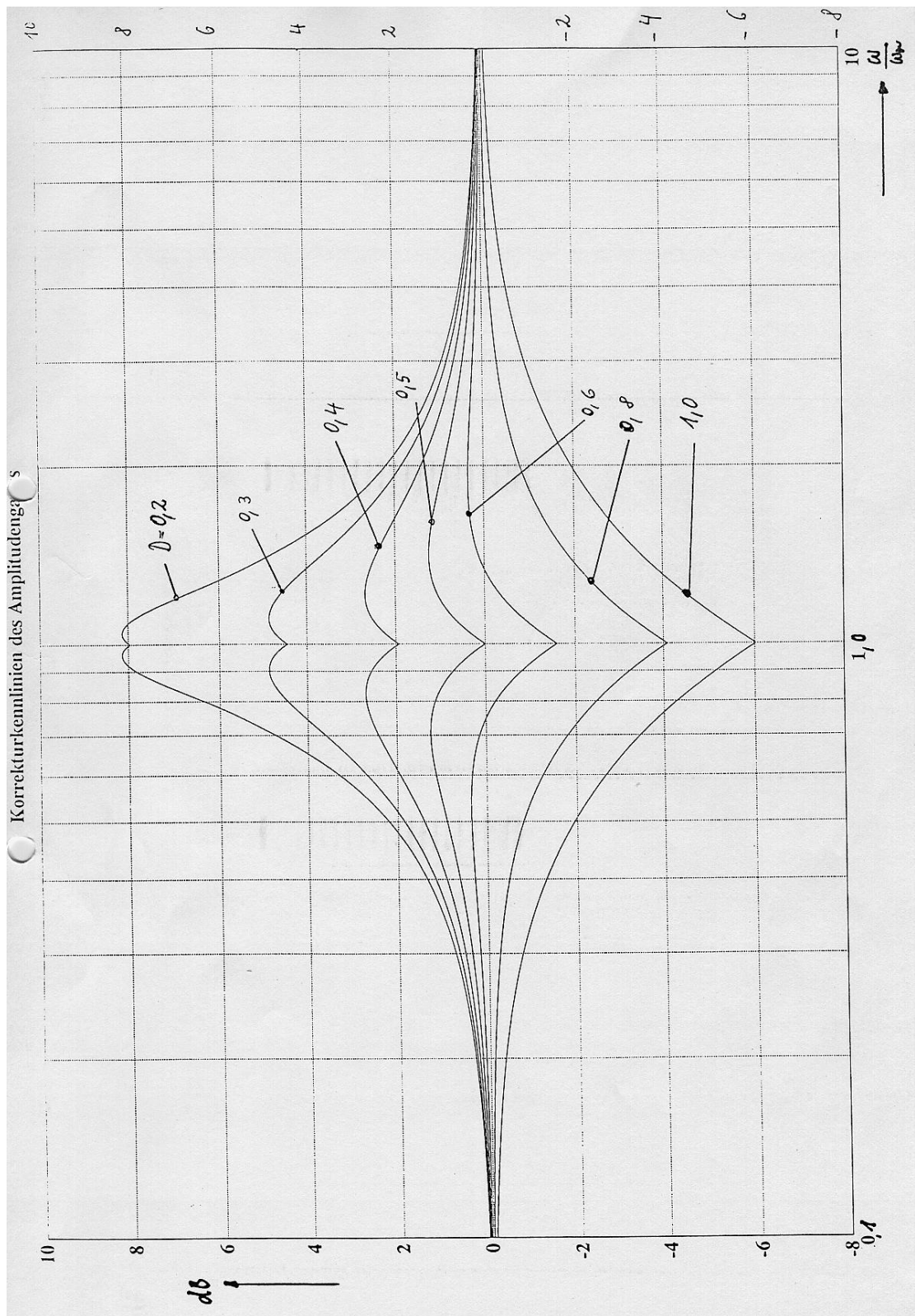


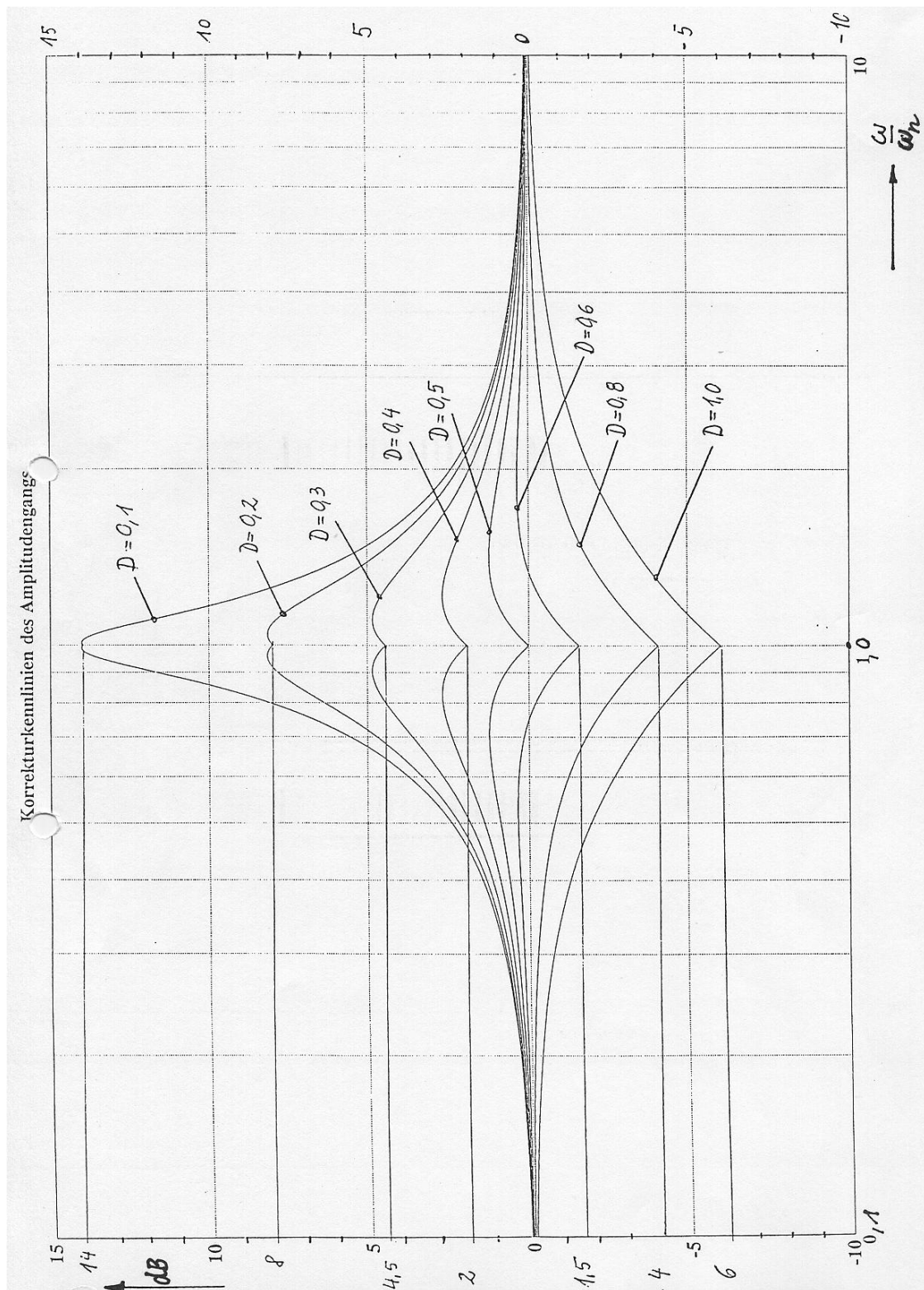
Die Lage der Nullstellen war ja zwangsläufig klar!

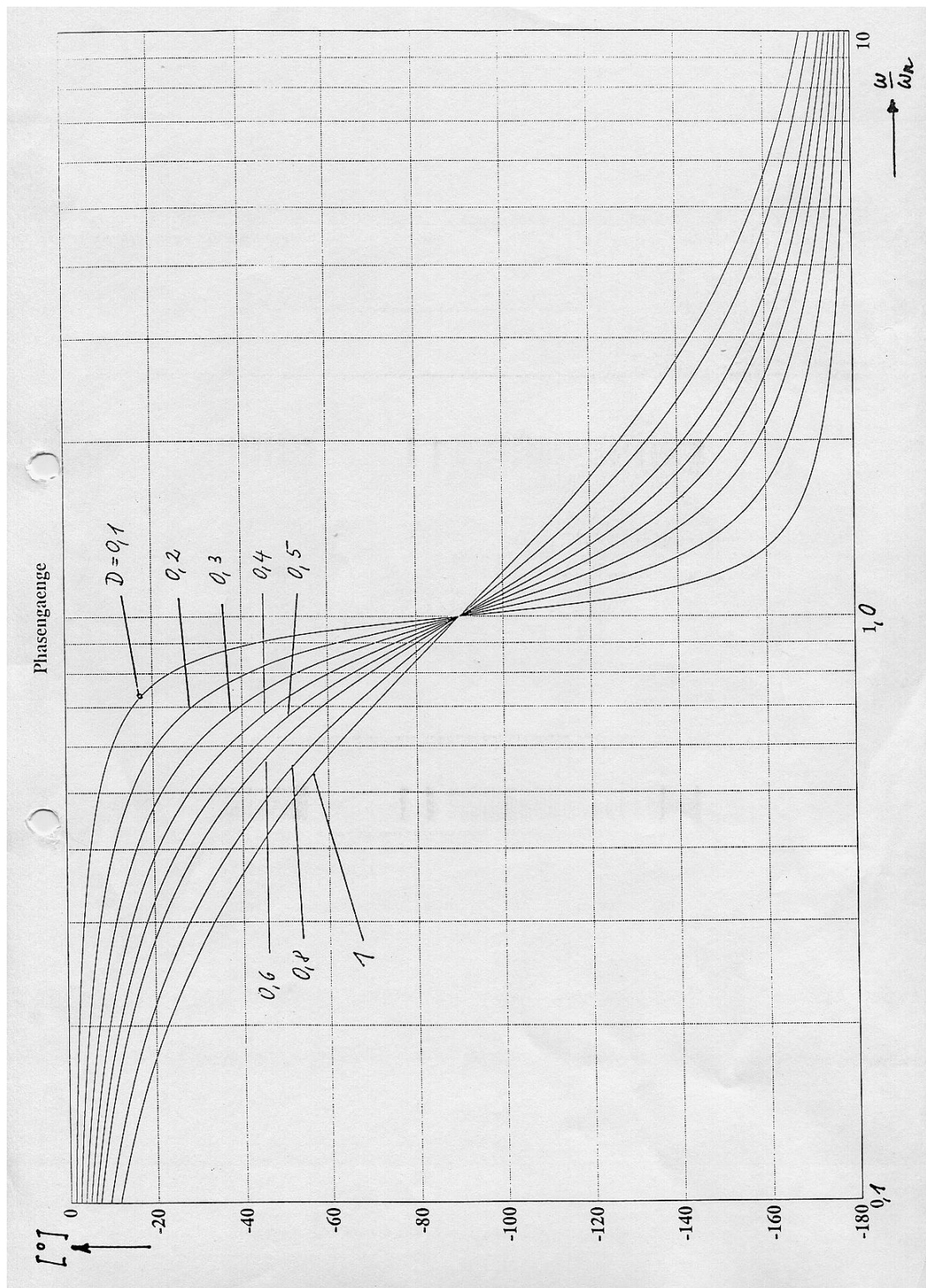
Welchen Vorteil hat gerade die oben gezeigte Lage der doppelten Polstellen? Argumentieren Sie mit Hilfe des BODE-Diagramms!

5.6 Anlagen :

In dieser Anlage finden Sie:	<b>2</b>	<b>Korrekturkennlinien des Amplitudengangs</b>
	<b>1</b>	<b>Phasenlineal</b>
	<b>1</b>	<b>Darstellung der Phasengänge</b>
	<b>1</b>	<b>BODE-Papier in Grobstruktur</b>
	<b>3</b>	<b>BODE-Papiere in Feinstruktur</b>





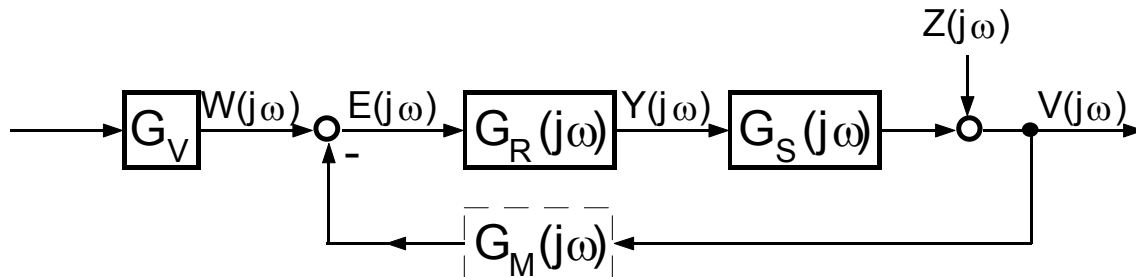


## 6. Betrachtungen am geschlossenen Regelkreis; Reglerparametrierungen

„Wer die Praxis ohne die Theorie liebt, ist wie ein Seemann, der auf ein Schiff steigt und nie weiß, wohin er gerät.“ (Leonardo da Vinci)

### 6.1 Regelungen mit einem und zwei Freiheitsgraden

Betrachtet werde der einschleifige Regelkreis von Bild 6.1.



**Bild 6.1:** Regelkreis mit Vorfilter und Meßwandler; die Störgröße greift (repräsentativ) am Streckenausgang an. Es bezeichnet  $G_O(j\omega) = G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega) \cdot (G_M(j\omega))$  den Schleifenfrequenzgang (= Frequenzgang der offenen Regelschleife).

Es sei jetzt  $G_M(j\omega) = 1$  und  $G_V(j\omega) = 1$ , dann gilt  $G_O(j\omega) = G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega)$  und folglich:

#### Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises:

$$G_W(s) = \left. \frac{V(s)}{W(s)} \right|_{Z=0}$$

$$G_W(s) = \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)} \quad (6.1)$$

#### Störübertragungsfunktion des Regelkreises:

$$G_Z(s) = \left. \frac{V(s)}{W(s)} \right|_{W=0}$$

$$G_Z(s) = \frac{1}{1 + G_O(s)} \quad (6.2)$$

$$\text{Offenbar gilt wegen } G_W(s) + G_Z(s) = 1 \Rightarrow G_Z(s) = 1 - G_W(s) \quad (6.3)$$

Regelung mit einem Freiheitsgrad, da mit dem Führungsfrequenzgang der Störfrequenzgang schon festliegt.

M. a. W.: “Aus dem Führungsverhalten folgt in diesem Fall das Störverhalten und umgekehrt.”



Überlegen Sie sich selbst, daß bei frei wählbarem  $G_V(j\omega)$  ein Regelkreis mit 2 Freiheitsgraden entsteht.

Wir bleiben beim Regelkreis mit 1 Freiheitsgrad.

## 6.2 Regelfehler und die Stabilität von Regelkreisen

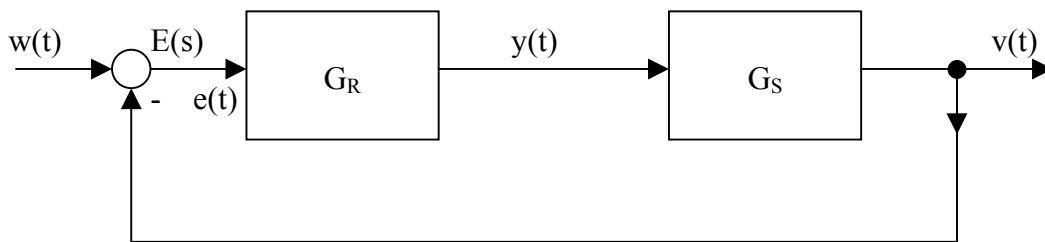
„Zwei Dinge sind unendlich: Das Universum und die Menschliche Dummheit. Aber beim Universum bin ich mir nicht ganz sicher.“ (Albert Einstein)

### 6.2.1 Regelfehler

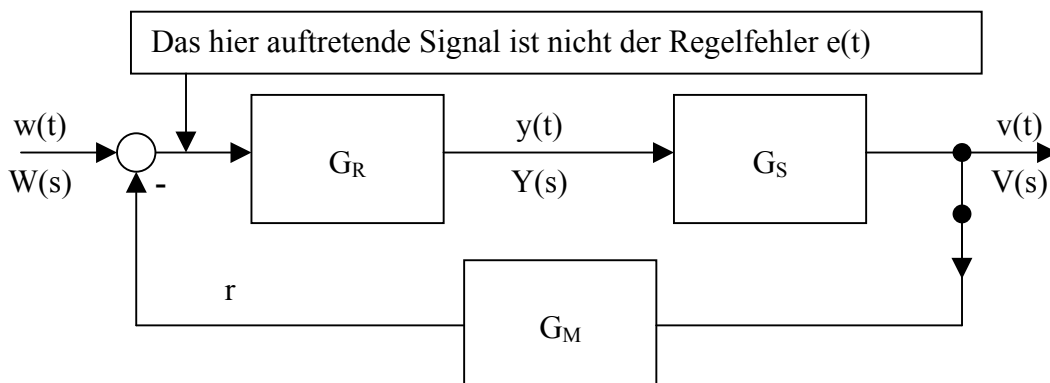
Der Regelfehler  $e(t)$  = error, nach DIN 19226 auch mit  $x_d(t)$  bezeichnet, ist definiert als

$$e(t) = x_d(t) = w(t) - v(t). \quad (6.4)$$

Im nachfolgendem Bild 6.2 ist  $e(t)$  eine ( physikalische ) Größe die tatsächlich im Regelkreis auftritt. Es sollte aber darauf hingewiesen werden, daß  $e(t)$  normalerweise nur eine Rechengröße ist. In Bild 6.3 tritt  $e(t)$  nicht explizit auf.



**Bild 6.2:**  $e(t)$  tritt als physikalische Größe direkt im Regelkreis auf.



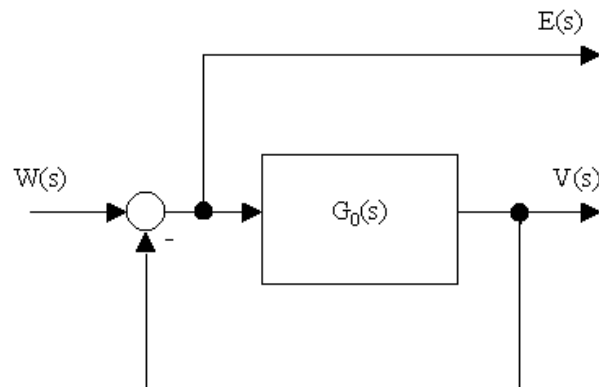
**Bild 6.3:**  $e(t)$  tritt nicht im Regelkreis auf.

Als stationären Regelfehler definiert man:  $e_\infty = x_{d\infty} := \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$

Falls $w(t)$ speziell	$w(t) = \sigma(t)$	$\Rightarrow e_\infty = e_{1\infty} = \text{stationärer Lagefehler}$
	$w(t) = t \cdot \sigma(t)$	$\Rightarrow e_\infty = e_{2\infty} = \text{stationärer Geschwindigkeitsfehler}$
	$w(t) = (t^2/2) \cdot \sigma(t)$	$\Rightarrow e_\infty = e_{3\infty} = \text{stationärer Beschleunigungsfehler}$



Für den Sonderfall in Bild 6.2...



... lassen sich Ausdrücke für  $e_{1\infty}$ ,  $e_{2\infty}$ ,  $e_{3\infty}$  besonders einfach angeben.

Aus Bild 6.2, bzw. oben, liest man ab:

$$E(s) = W(s) - V(s) = W(s) - \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \cdot W(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot W(s)$$

$G_0$  sei in der V-Normalform gegeben:

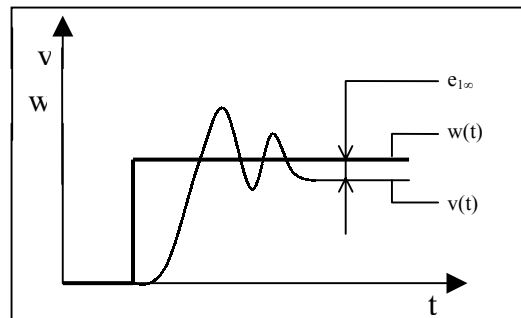
$$G_0(s) = \frac{V}{s^\rho} \cdot \frac{Z(s)}{N(s)}; \quad Z(0) = N(0) = 1$$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{s^\rho N(s)}{s^\rho N(s) + V \cdot Z(s)} \cdot W(s)$$

Es sei  $w(t) = \sigma(t)$  ("Sprung")

$$\Rightarrow e_{1\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s^\rho N(s)}{s^\rho N(s) + V \cdot Z(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

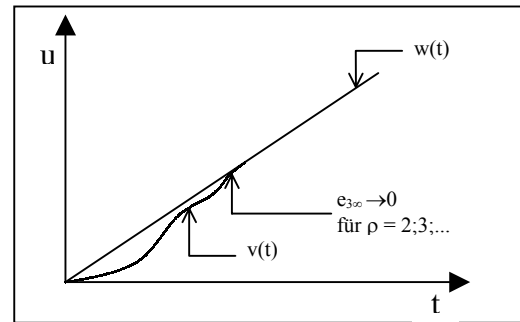
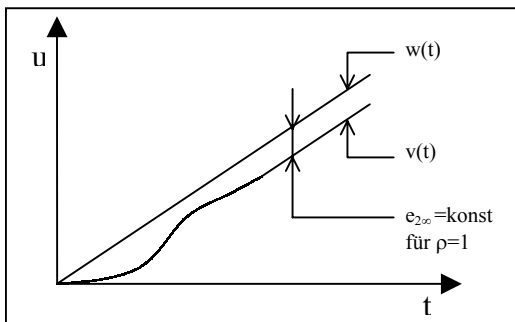
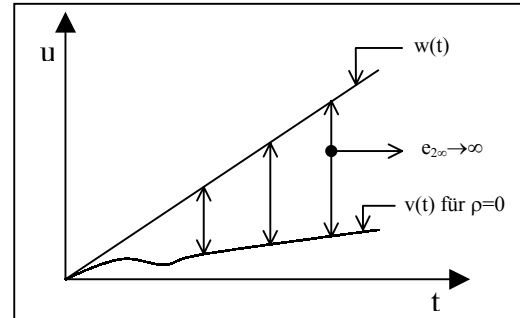
$$\text{für } t \rightarrow \infty \Rightarrow e_{1\infty} = \begin{cases} \frac{1}{1+V} & \text{für } \rho = 0 \\ 0 & \text{für } \rho = 1; 2; 3; \dots \end{cases}$$



Es sei  $w(t) = t \cdot \sigma(t)$  ("Rampe")

$$\Rightarrow e_{2\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s^\rho N(s)}{s^\rho N(s) + V \cdot Z(s)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$\text{für } t \rightarrow \infty \Rightarrow e_{2\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } \rho = 0 \\ \frac{1}{V} & \text{für } \rho = 1 \\ 0 & \text{für } \rho = 2; 3; \dots \end{cases}$$



Es sei  $w(t) = \frac{t^2}{2} \cdot \sigma(t)$  ("Parabel")

$$\text{für } t \rightarrow \infty \Rightarrow e_{3\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } \rho = 0; 1 \\ \frac{1}{V} & \text{für } \rho = 2 \\ 0 & \text{für } \rho = 3; 4; \dots \end{cases}$$

Zusammenstellung der Ergebnisse (für die spezielle Struktur von Bild 6.2):

$\rho \rightarrow$ $w \downarrow$	0	1	2	3	...
$\sigma(t)$	$\frac{1}{1+V}$	0	0	0	...
$t \cdot \sigma(t)$	$\infty$	$\frac{1}{V}$	0	0	...
$\frac{1}{2!} t^2 \cdot \sigma(t)$	$\infty$	$\infty$	$\frac{1}{V}$	0	...
$\frac{1}{3!} t^3 \cdot \sigma(t)$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\frac{1}{V}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

**(6.5)**

Aufgabe: Für eine Regelkreisstruktur wie in Bild 6.1 dargestellt stelle man ein vergleichbares Tableau auf.

## 6.2.2 Die Stabilität in Regelkreisen

Vorbemerkung zur Stabilität von rückgekoppelten und nicht rückgekoppelten Systemen

Definition:

Ein Übertragungssystem ist stabil, wenn zu jeder beschränkten Eingangsfunktion eine beschränkte Ausgangsfunktion gehört (=BIBO-Stabilität).

Bekanntlich (vgl. VL Systemtheorie) gilt für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten (=zeitunveränderlichen) Parametern:

System BIBO-stabil  $\Leftrightarrow$  für alle Pole  $s_{i\infty}$  von  $G(s)$  gilt:  **$\operatorname{Re}\{s_{i\infty}\} < 0$**



Alle Teilsysteme eines Regelsystems können stabil sein, zusammenschaltet kann instabiles Regelsystem entstehen.

Es werden jetzt Stabilitätskriterien angegeben.

(Ein Kriterium ist ein Merkmal, an dem man ablesen kann, ob eine Eigenschaft im Sinne der Definition vorliegt oder nicht).

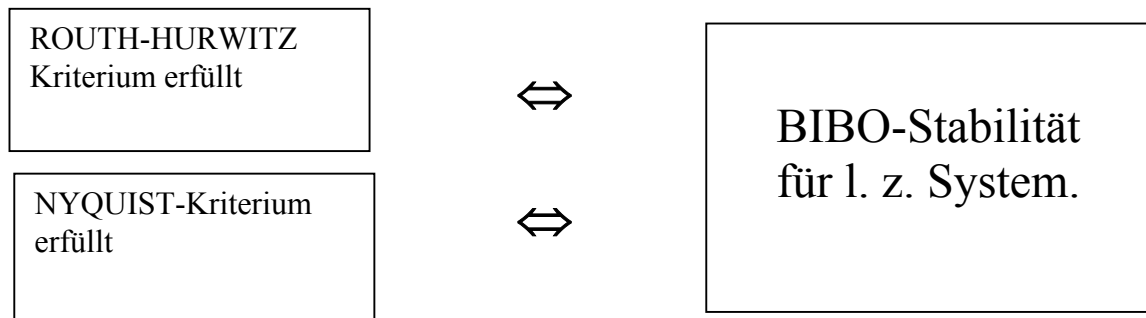
Es gibt notwendige und hinreichende Kriterien.

Damit ist folgendes gemeint:

Hinreichendes Kriterium erfüllt  $\Rightarrow$  Stabilitätseigenschaft liegt vor.

Stabilitätseigenschaft liegt vor  $\Rightarrow$  Notwendiges Kriterium kann daraus abgeleitet werden.

Die nachfolgenden Kriterien sind notwendig und hinreichend.



Wir beginnen mit dem ROUTH-HURWITZ Kriterium und definieren zunächst das HURWITZ-Polynom:

Man nennt ein Polynom  $P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0$

(z.B. Nennerpolynom einer Übertragungsfunktion) ein HURWITZ-Polynom, wenn für alle Nullstellen gilt:  **$\operatorname{Re}\{s_{i0}\} < 0$**

Offenbar gilt für ein HURWITZ-Polynom folgendes:

Ein HURWITZ-Polynom besitzt nur Koeffizienten  $\neq 0$  mit gleichem Vorzeichen.

#### Erläuterung :

Man erinnere sich an den Wurzelsatz (Koeffizientensatz) von VIETA. Seien  $x_1, \dots, x_n$  die Nullstellen eines Polynom  $n$ -ten Grades, gegeben als  $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$ , dann gilt :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i = -a_{n-1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n x_i x_j = a_{n-2}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^n x_i x_j x_k = -a_{n-3}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n a_0$$

$$\text{Wegen } P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = a_n (s - s_{01})(s - s_{02}) \dots (s - s_{0n}) =$$

$$= a_n [s^n - (s_{01} + s_{02} + \dots + s_{0n}) \cdot s^{n-1} + \dots + (-1)^n (s_{01} s_{02} \cdot \dots \cdot s_{0n}) \cdot s^0] \text{ müssen also bei}$$

Bei Polynomnullstellen mit ausschließlich negativen Realteilen müssen alle Polynomkoeffizienten gleiches Vorzeichen haben.

Beispiele :

$$P_3(s) = s^3 + 8s + 5 \quad \underline{\text{kein}} \text{ HW - Polynom "wegen } 0 \cdot s^2"$$

$$P_5(s) = 5s^5 + 2s^4 - s^3 + 2s^2 + 3s + 6 \quad \underline{\text{kein}} \text{ HW - Polynom "wegen } -s^3"$$

$$P_3(s) = s^3 + 6s^2 + 8s + 4 \quad \underline{\text{könnte}} \text{ ein HW - Polynom sein}$$

Sind bei einem Polynom n-ten Grades also alle Koeffizienten vorhanden und findet kein Vorzeichenwechsel statt, dann könnte ein Hurwitzpolynom vorliegen. Man muß weiter untersuchen. Hierzu zieht man den ROUTH-Algorithmus heran.

ROUTH'scher Algorithmus :

Beispiel :

$$P_4(s) = 1s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 8s + 1$$

Man trägt die Polynomkoeffizienten in zwei Zeilen ein, beginnend mit dem Koeffizient der höchsten Potenz in "s". Man kann sich das zweizeilige Feld mit Nullen vorbesetzt denken :

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ \hline 4 & 8 & 0 & 0 \end{array}$$

Dann arbeitet man wie folgt ab :

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 < & 1 & 6 & 1 & 0 \\ \hline 0 < & 4 & 8 & 0 & 0 \\ \hline 0 < & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 < & 7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 < & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

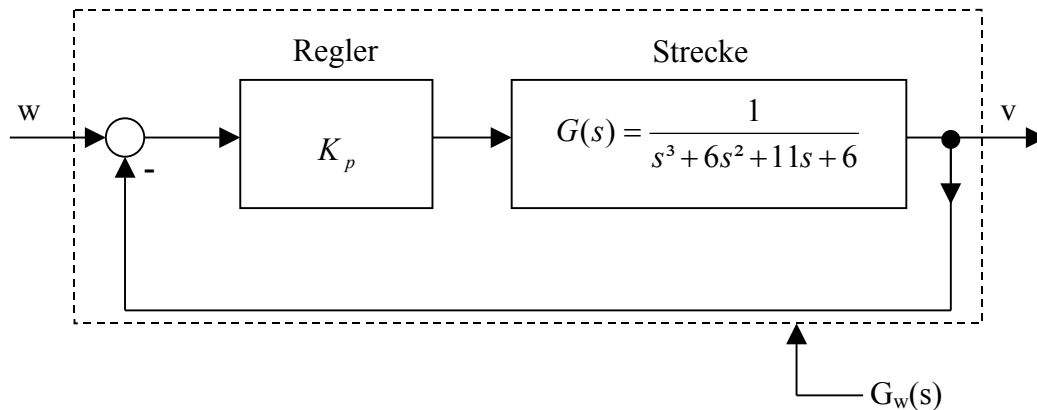
Rechnungen :

$$\frac{4 \cdot 6 - 8 \cdot 1}{4} = 4 \quad ; \quad \frac{4 \cdot 1 - 0 \cdot 1}{4} = 1 \quad ; \quad \frac{4 \cdot 8 - 1 \cdot 4}{4} = 7 \quad ; \quad \frac{7 \cdot 1 - 0 \cdot 4}{7} = 1$$

Wenn alle Koeffizienten in der ersten Spalte von Null verschieden sind und gleiches Vorzeichen haben, folgt daraus :

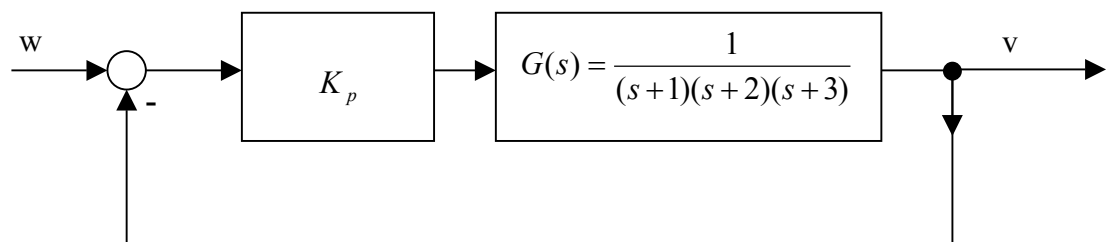
Es liegt ein HURWITZ - Polynom vor.

Beispiel 1:



Frage: Für welche  $K_p$ -Werte ist das System stabil?

Lösung1: WURZELORTSKURVENMETHODE



Man sollte an dieser Stelle noch einmal darauf hinweisen: Obwohl jedes Teilsystem für sich (also sowohl Strecke als auch Regler) stabil ist, kann das Regelsystem instabil werden.

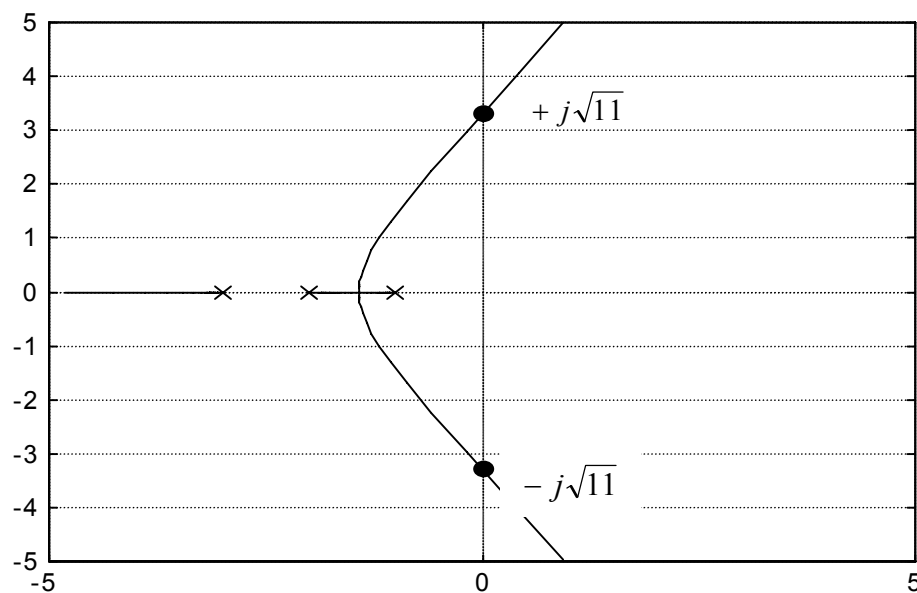


Bild1 zu Beispiel1: **Wurzelortskurve ( für  $K_p > 0$  ) hierzu**

Mit Hilfe der K-Normalform liest man aus Bild 1 zu Beispiel 1 ab:

$$K_0 = |-1 - j\sqrt{11}| \cdot |-2 - j\sqrt{11}| \cdot |-3 - j\sqrt{11}| = 60 = K_s \cdot K_p = 1 \cdot K_p$$

In diesem Fall liegen die Pole von  $G_0$  bei  $s_{\infty 1} = -60$ ;  $s_{\infty 2} = +j\sqrt{11}$ ;  $s_{\infty 3} = -j\sqrt{11}$

Lösung2: ROUTH-HURWITZ

$$G_w(s) = \frac{K_p}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K_p}$$

$\Rightarrow K_p$  muß so gewählt werden, daß  $N_w(s) = \text{HWP}$ , es muß also  $K_p > -6$  gefordert werden.

Weiteruntersuchung mit ROUTH - Algorithmus :

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c} 0 < & 1 & 11 \\ \hline 0 < & 6 & (6 + K_p) \\ \hline 0 < & \frac{66 - (6 + K_p)}{6} & 0 \\ \hline 0 < & 6 + K_p & 0 \end{array}$$

Aus den Zeilen 3 und 4 folgt somit :

$$\Rightarrow K_p > (-6)$$

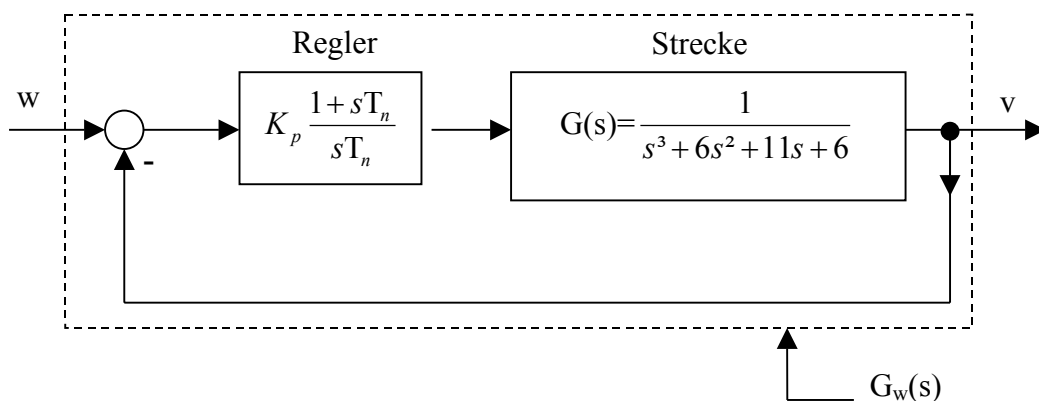
$$\Rightarrow 66 - 6 - K_p > 0 \Rightarrow K_p < 60$$

Die Zusammenstellung beider Gleichungen liefert :

$$-6 < K_p < 60$$

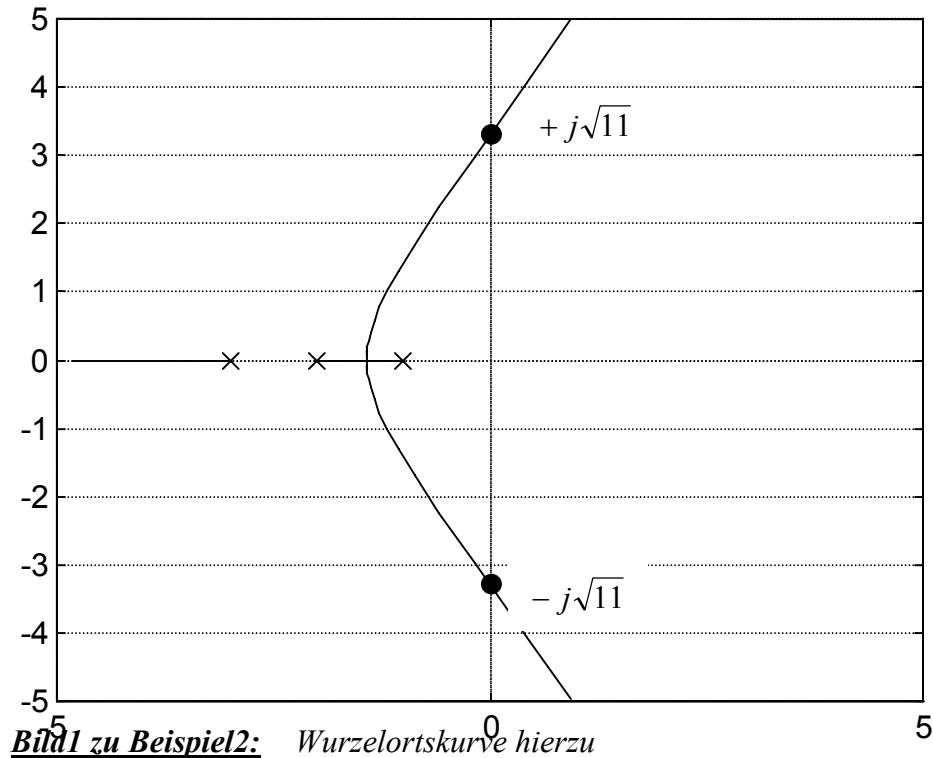
Man vergleiche auch mit der Wurzelortskurve.

Beispiel 2:



Der PI-Regler ist nach ZIEGLER–NICHOLS einzustellen.

Lösung: Wir nehmen zunächst an, der Regler sei ein P-Regler (d.h. nur  $K_p$ ). Mit Hilfe des ROUTH – HURWITZ Kriteriums bestimmt man  $K_{pkrit}$  kritisch zu  $K_{pkrit} = 60$ . Bei  $K_{pkrit}$  hat das Regelsystem ein Paar konjugiert komplexe Pole bei  $\pm j\omega_{krit}$  ( $\rightarrow$  WOK), d.h. das System schwingt ungedämpft mit der Kreisfrequenz  $\omega_{krit}$ .



$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } N_w(s) &= (s - s_{\infty 1})(s + j\omega_{krit})(s - j\omega_{krit}) = (s - s_{\infty 1})(s^2 + \omega_{krit}^2) = \\ &= s^3 - s_{\infty 1}s^2 + s\omega_{krit}^2 - s\omega_{\infty 1krit}^2 \stackrel{!}{=} s^3 + 6s^2 + 11s + 66 \end{aligned}$$

nach Koeffizientenvergleich erhält man  $\omega_{krit}^2 = 11$

$$\Rightarrow T_{krit} = \frac{2\pi}{\omega_{krit}} = \frac{2\pi}{\sqrt{11}} \approx 1,89 \text{ sec}$$

Zusammen mit  $K_{pkrit} = 60$  können die Reglerparameter nach den Formeln von ZIEGLER - NICHOLS eingestellt werden.



Das NYQUIST-Kriterium:

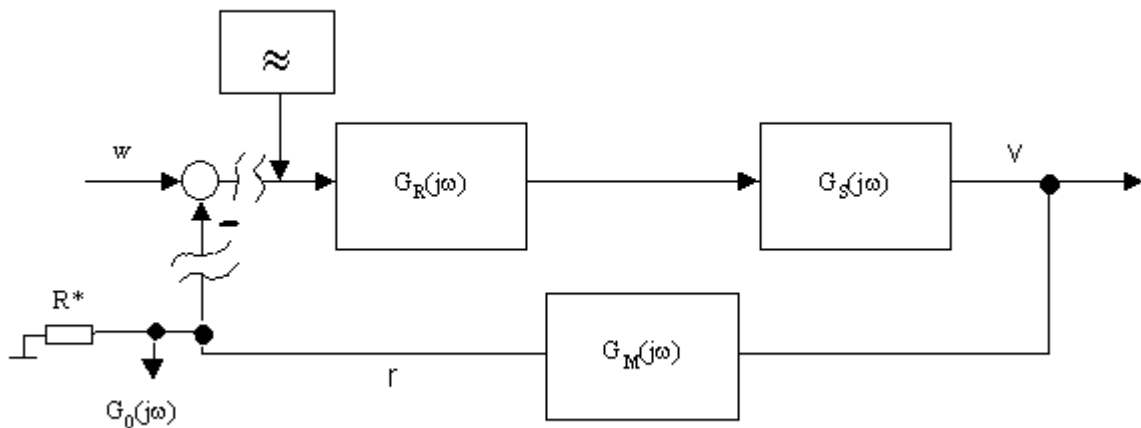
„Mit leerem Kopf nickt es sich leichter.“ (Zarko Petan, slowenischer Aphoristiker)



Das NYQUIST – Kriterium liefert eine Stabilitätsaussage für die Stabilität eines geschlossenen Regelkreises aufgrund der Kenntnis des Frequenzgangs der offenen Regelschleife.

Der Wert des NYQUIST – Kriteriums liegt in seiner meßtechnischen Bedeutung. Es zeigt sich, daß man einen mathematischen Ausdruck für die offene Regelschleife nicht kennen muß. „Messung genügt“

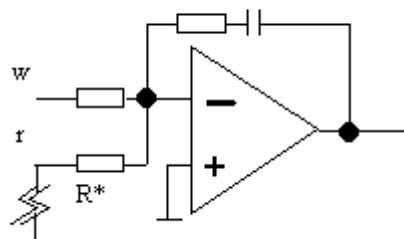
Hierzu betrachte man auch das nachfolgende Bild



**Bild 6.4 :** Offene Regelschleife (aufgeschnittene Anordnung) zur meßtechnischen Erfassung von  $G_0(j\omega)$ .  $R^*$  stellt den Abschlußwiderstand von  $G_M$  dar.

Falls der Eingang der Regeleinrichtung niederohmig ist, muß  $G_M$  mit  $R^*$  abgeschlossen werden. Dies zeigt Bild 6.4.

Der Eingang der Regeleinrichtung kann z.B. der Widerstand  $R^*$  eines PI-Reglers sein wie dies die nachstehende Skizze zeigt.



Das NYQUIST–Kriterium in seiner vereinfachten Form besagt:

Ein Regelsystem ist nach dem Schließen der Rückkopplung stabil, wenn die Ortskurve von  $G_0(j\omega)$  den Punkt  $(-1+j0)$  nicht umschlingt bzw. wenn der Phasenrand  $\varphi_R > 0$  ist.

„Vereinfachte Form“ meint: Die offene Regelschleife muß selber stabil sein, bzw. die Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  darf höchstens einen Pol bei  $s_\infty=0$  besitzen.

Zur Erklärung des bereits verwendeten Begriffs „Phasenrand“ und des noch einzuführenden Begriffs „Amplitudenrand“ sowie zur Interpretation des Nyquistkriteriums in seiner vereinfachten Form betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 3: Es seien drei offene Regelschleifen durch ihre Frequenzgänge gegeben.

$$G_1(j\omega) = \frac{1 \cdot e^6}{(j\omega)^3 + 111(j\omega)^2 + 1110(j\omega) + 1000}$$

Nämlich

$$G_2(j\omega) = \frac{1 \cdot e^5}{(j\omega)^3 + 111(j\omega)^2 + 1110(j\omega) + 1000}$$

$$G_3(j\omega) = \frac{5 \cdot e^3}{(j\omega)^3 + 111(j\omega)^2 + 1110(j\omega) + 1000}$$

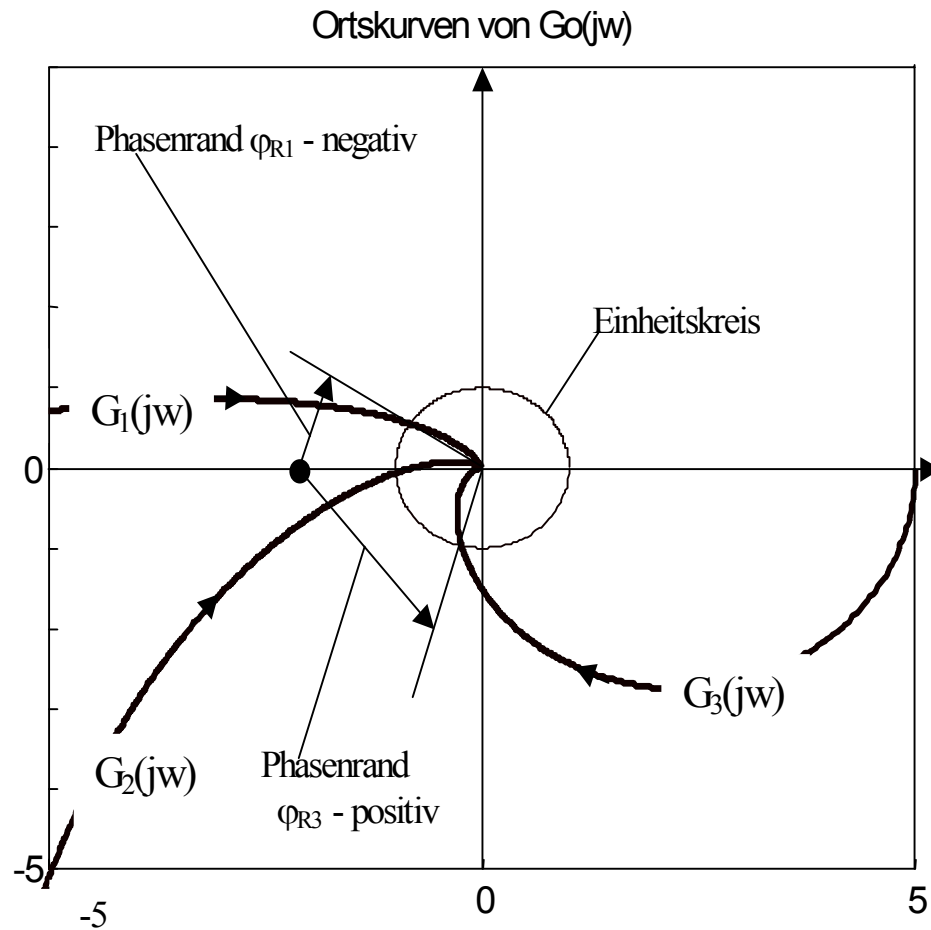
Man beachte: Gleiche Nenner, unterschiedliche Zähler.

Man bestimme mit Hilfe des Nyquistkriteriums (in seiner vereinfachten Form), welche der angegebenen ( offenen ) Regelschleifen nach Rückkopplung noch stabil sind.

Lösung1 mit Hilfe der Ortskurvendarstellung des Nyquistkriteriums:

Man betrachte das untenstehende Bild1 zu Beispiel 1. Dort erkennt man, daß die Ortskurve von  $G_3(j\omega)$  den Punkt „-1+j0“ nicht umschlingt. Der genannte Punkt liegt an der Stelle des Schnittpunktes von Einheitskreis mit der negativ reellen Achse. Die Regelschleife mit  $G_3(j\omega)$  wird also nach Rückkopplung stabil sein. Weiterhin erkennt man daß die Regelschleife mit  $G_1(j\omega)$  nach Rückkopplung instabil sein wird: Der Punkt „-1 + jw“ wird umschlungen. Die Regelschleife mit  $G_2(j\omega)$  wird nach Rückkopplung ebenfalls zu einem instabilen Regelsystem werden. Man spricht hier , da der Punkt „-1+jw“ gerade getroffen wird, von einem grenzstabilen System: Nach Rückkopplung schwingt das System bereits ungedämpft, wenn man kein Eingangssignal aufschaltet – es gibt aber auch Eingangssignale bei dem das System mit  $G_2(j\omega)$  instabil wird.

Alternativ zur Tatsache „ der Punkt  $-1+j0$  wird umschlungen“ kann man auch mit dem Phasenrand argumentieren. Diesen erhält man wenn man einen Strahl vom Koordinatenursprung zum Durchstoßpunkt der Ortskurve des Frequenzgangs durch den Einheitskreis zieht. Der Winkel den dieser Strahl mit der negativ reellen Achse bildet ist der Phasenrand. Er wird positiv gezählt, wenn der Winkel gegen den Uhrzeigersinn gezählt wird – und er wird negativ gezählt wenn der Winkel im Uhrzeigersinn gezählt wird.

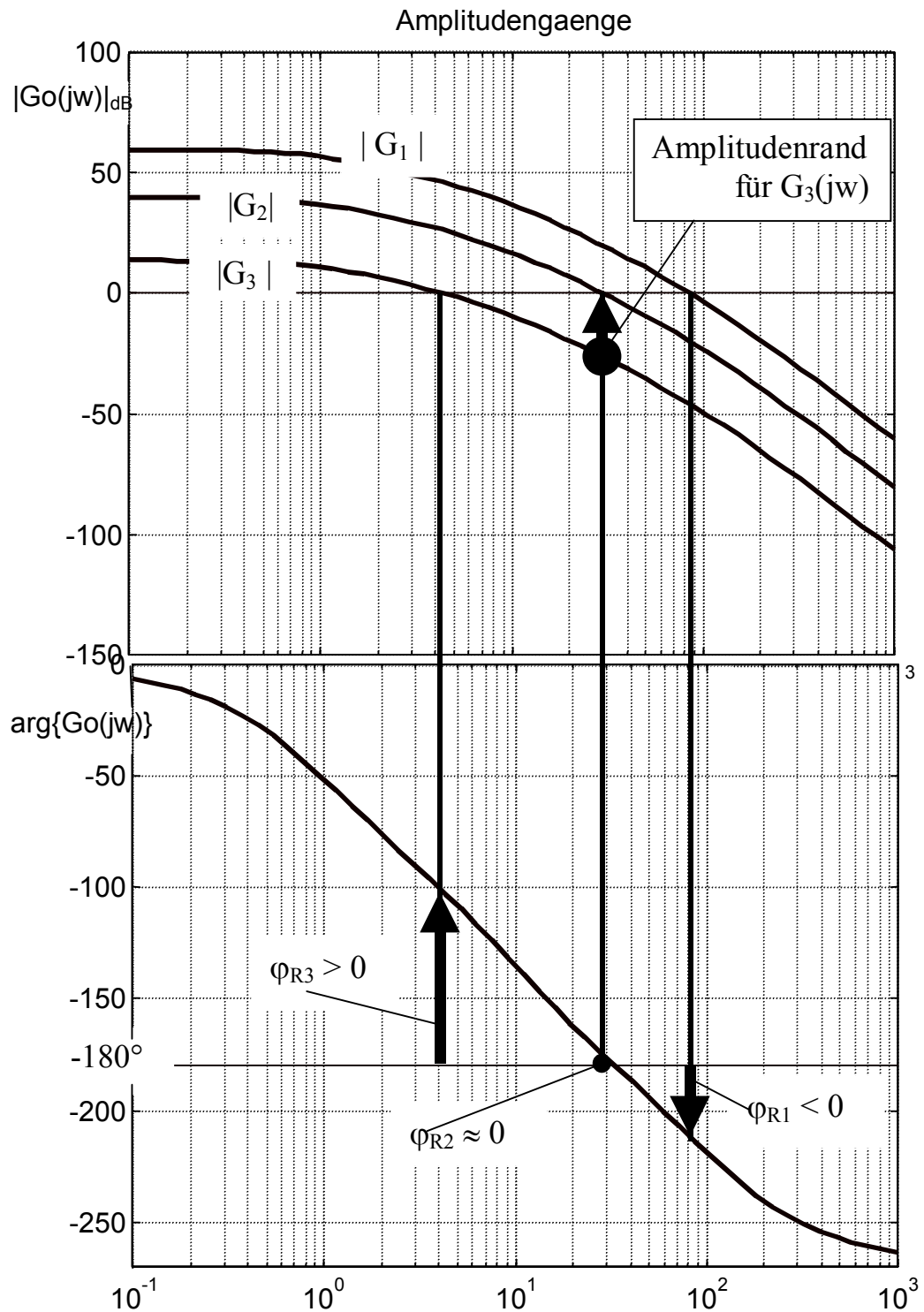
**Bild 6.5 zu Beispiel 3:**

Ortskurven der Frequenzgänge von  $G_{o1}(j\omega)$ ,  $G_{o2}(j\omega)$  und  $G_{o3}(j\omega)$  in der Umgebung des Durchtretens durch den Einheitskreis.

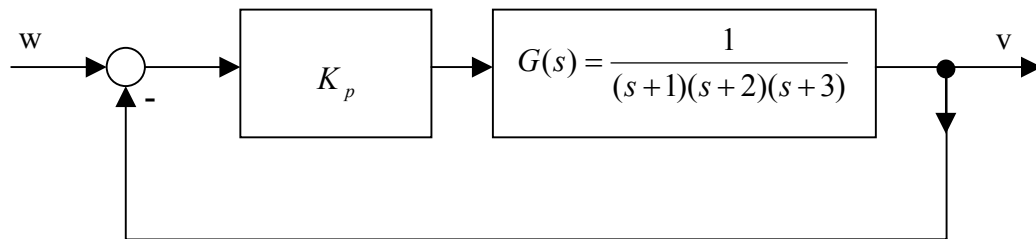
Lösung 2 mit Hilfe der Bode-Diagramm-Darstellung des Nyquistkriteriums:

In der Darstellung der nachstehenden Seite kann man die Phasenränder ebenfalls ablesen und dieselben Stabilitätsaussagen wie in Lösung 1 ableiten.

Zusätzlich ist in der Darstellung auf der nachstehenden Seite noch für  $G_3(j\omega)$  der Amplitudenrand eingezeichnet. Damit ist diejenige Proportionalitätsverstärkung gemeint um die man den vorhandenen Frequenzgang „ $G_3(j\omega)$ “ verstärken darf um gerade an die Stabilitätsgrenze nach Rückkopplung zu kommen.



Zu Übungszwecken greifen wir noch einmal auf das Beispiel 1 zurück:



Man bestimme mit Hilfe des NYQUIST-Kriteriums für welche Werte von  $K_p$  der Regelkreis stabil ist.

Und zwar : Einmal unter Verwendung des Nyquist-Kriteriums in der Darstellung im BODE. – Diagramm.

Einmal unter Verwendung des Nyquist-Kriteriums in der Ortskurvendarstellung.

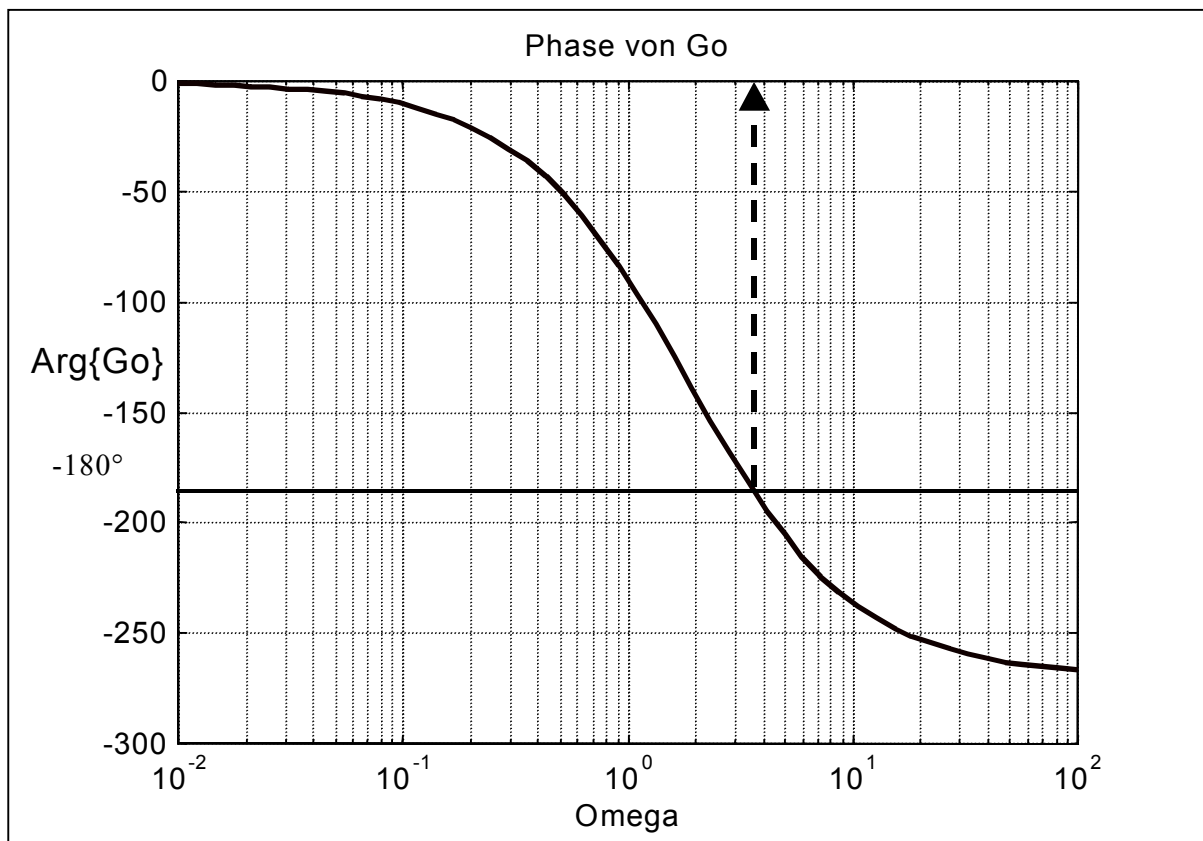
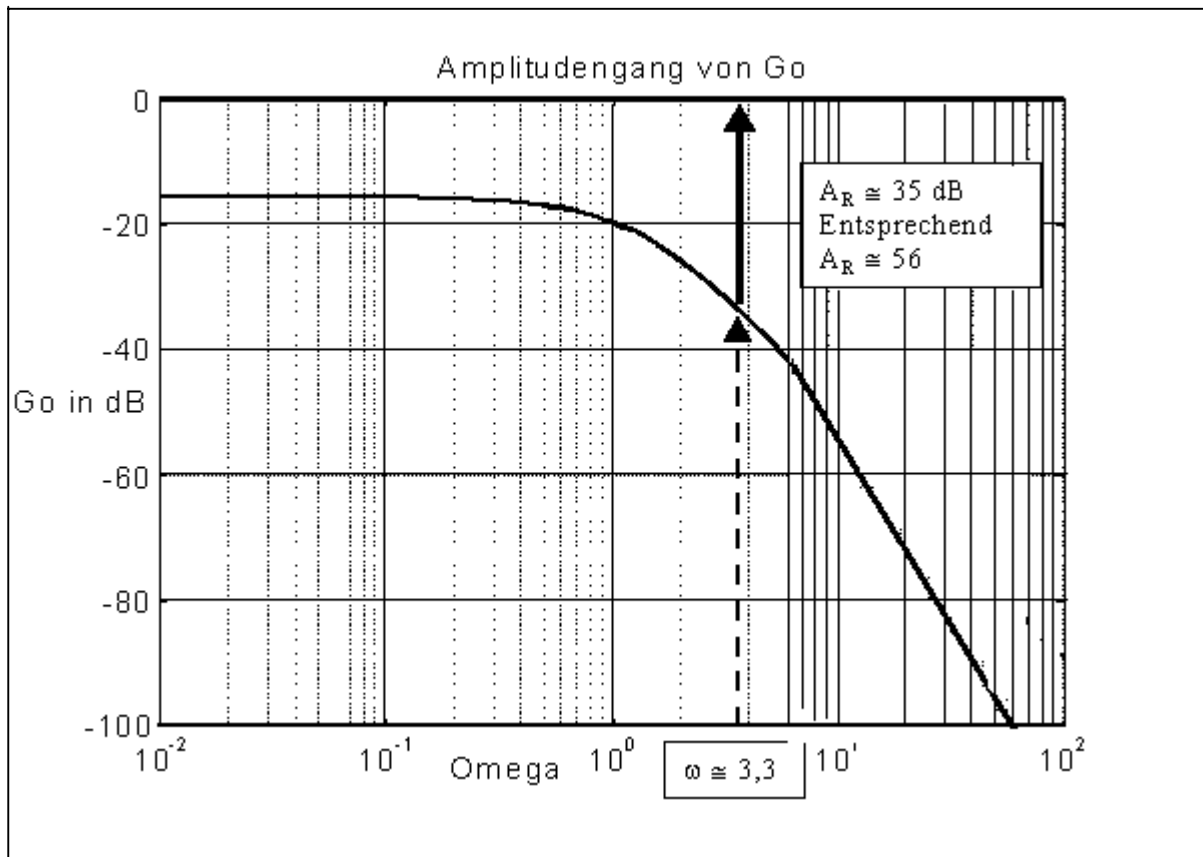
LÖSUNG1: „NYQUIST+BODE“.

$$\text{Es ist } G_s(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1+s)(1+\frac{s}{2})(1+\frac{s}{3})} \text{ ( V-Normalform der Regelstrecke)}$$

Bodediagramm der offenen Regelschleife, wenn  $K_p = 1$ . Vgl. Bilder auf der nächsten Seite.

Im nachfolgenden BODE-Diagramm erkennt man einen Phasenrand von 35 dB. Das entspricht einem Wert von  $A_R = 56$ . Um  $K_p = 56$  darf also noch die Reglerverstärkung angehoben werden, damit sich das rückgekoppelte Regelsystem gerade an der Stabilitätsgrenze befindet. Exakt hatten wir mit Routh-Hurwitz  $K_{p,Krit} = 60$  festgestellt! Für  $K_{p,Krit}$  schwingt das Regelsystem ungedämpft mit der Frequenz  $\omega_{krit} = 3,3 \text{ Hz}$ .

( Exakt  $K_{p,krit} = 3,31 \text{ Hz}$  )



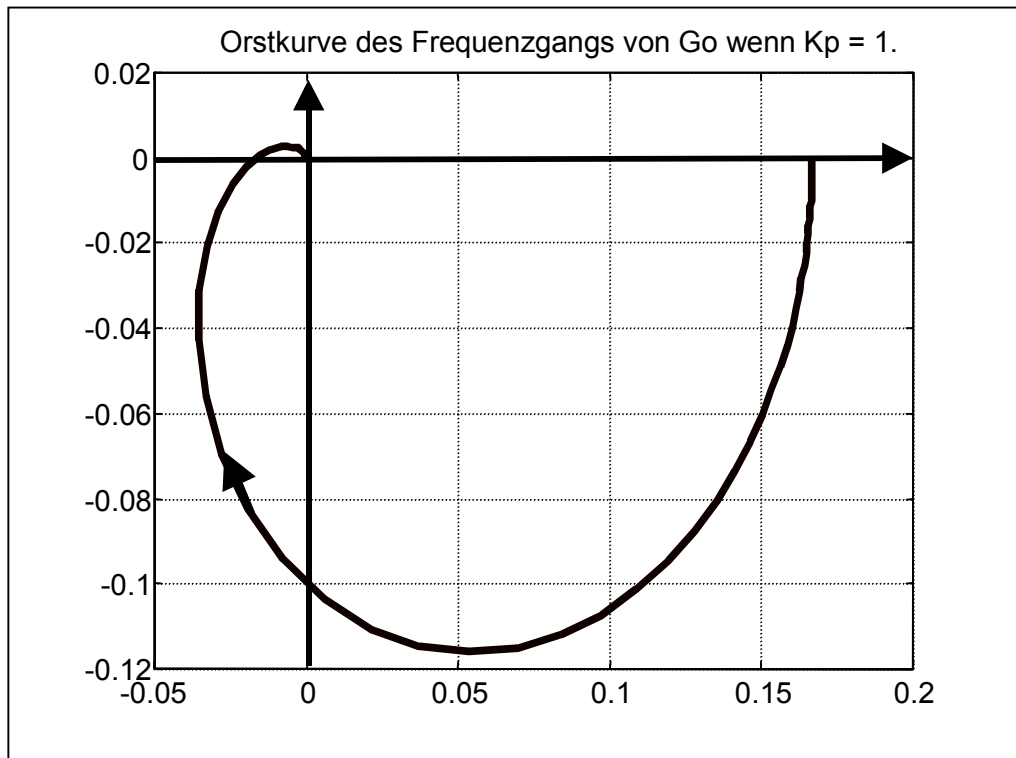
**Bild zum vorgelegten Beispiel:**

Zur Darstellung des Nyquist-Kriteriums im BODE – Diagramm.

## LÖSUNG2: „NQUIST+ORTSKURVE“

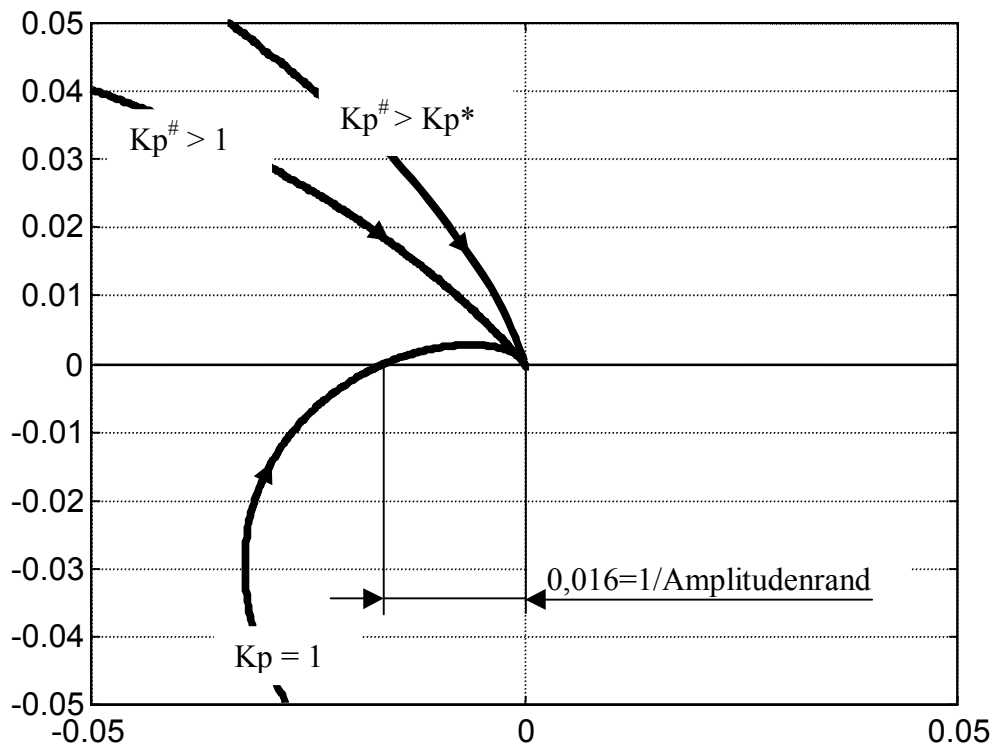
Von  $G_o(j\omega)$  wobei  $K_p = 1$  gesetzt ist.

Man kommt auf die nachfolgende Ortskurvendarstellung:

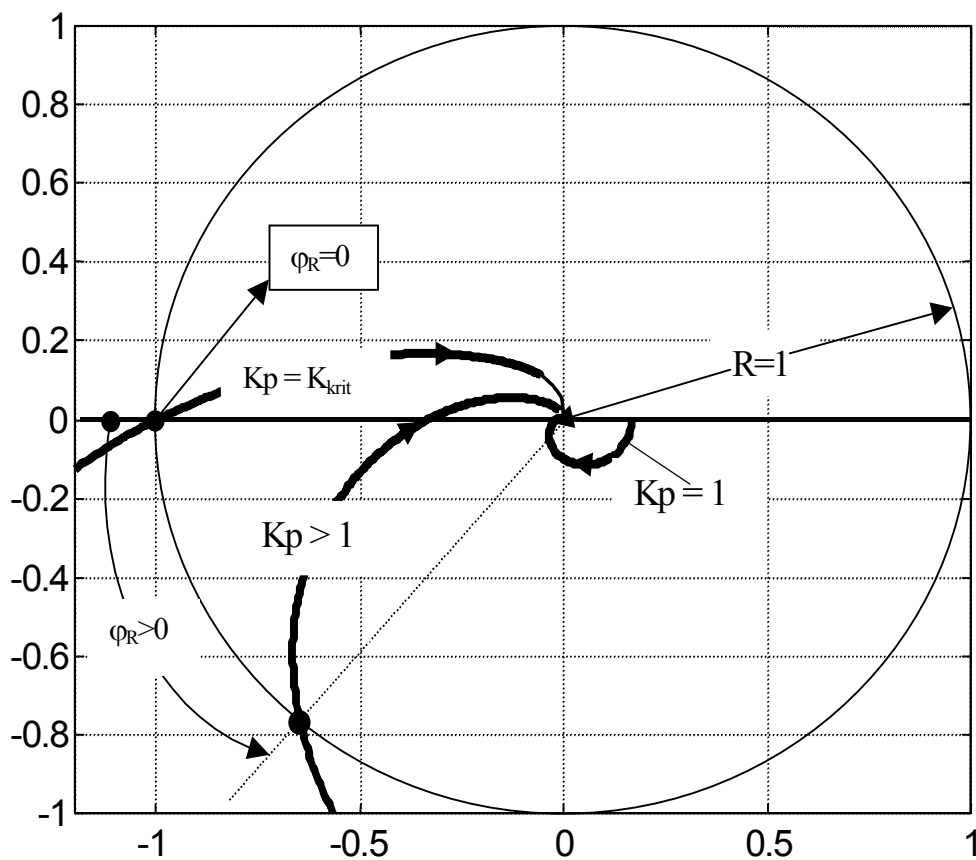


Das obige Bild zeigt, daß die Ortskurve des Frequenzgangs die negativ reelle Achse schneidet. Vergrößern wir den Ausschnitt, dann kann man den Amplitudenrand bestimmen. Dies zeigt das nächste Bild 6.6.

Schließlich kann man dieses Bild noch in größerem Maßstab darstellen ( Bild 6.7 ).



**Bild 6.6:** Ortskurvendarstellungen zum Übungsbeispiel

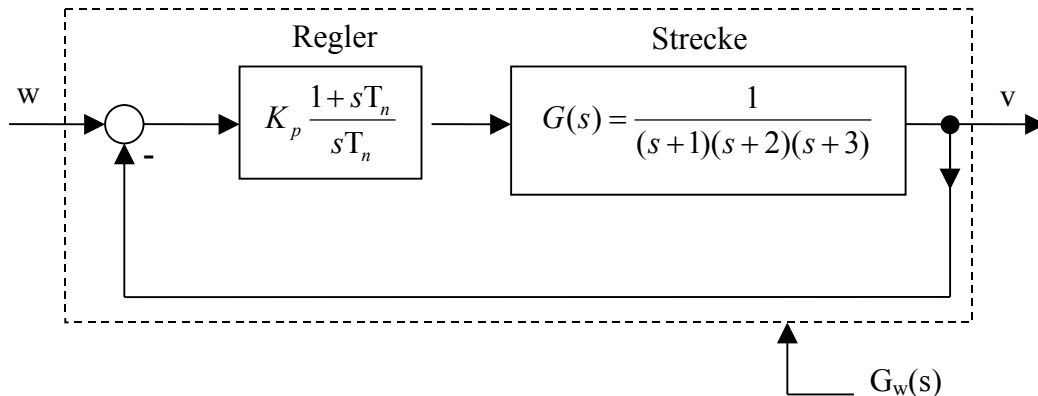


**Bild 6.7:** Ortskurvendarstellungen zum Übungsbeispiel; Ausschnitt vergrößert.



Die obigen zwei Bilder zeigen u.a. die Nyquistortskurve von  $G_o$  für  $K_p = 1$ . Falls  $K_p > 1$  gewählt wird, dies bedeutet eine zentrische Streckung der gesamten Ortskurve (vergleichen mit  $K_p=1$ ). Für  $K_{p,krit}$  ist die Ortskurve von  $G_o$  soweit „aufgeblasen“, daß  $\varphi_R = 0$  ist.  $K_{p,krit}$  ist also offenbar auch  $K_{p,krit} = A_r. = 1/0,016 = 62,5$  (exakt 60).

Noch einmal Reglereinstellung nach ZIEGLER-NICHOLS:



Aus dem BODE-Diagramm liest man im Rahmen der Zeichengenauigkeit ab:

$$K_{pkrit} = 56 \quad (\text{exakt : } 60)$$

$$\omega_{krit} = 3,2 \text{ Hz}$$

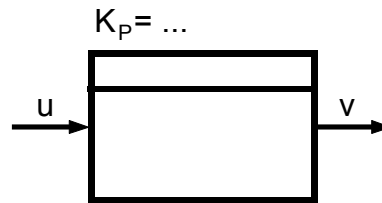
$$\Rightarrow K_p, T_n, T_v$$

In gleicher Weise kann man dies auch aus der Ortskurvendarstellung ( Bilder 6.6 und 6.7 ) ablesen, wenn man diese mit einer Frequenzbezeichnung versieht.

### 6.3. Zusammenstellung wichtiger Regelkreisglieder

„Ich finde keine Spur von Geist – und alles ist Dressur“ (Goethe, Faust)

#### 6.3.1. Das P-Glied



Beschreibung im Zeitbereich:

$$v(t) = K_P \cdot u(t)$$

$K_P$  - Proportionalbeiwert

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = K_P$$

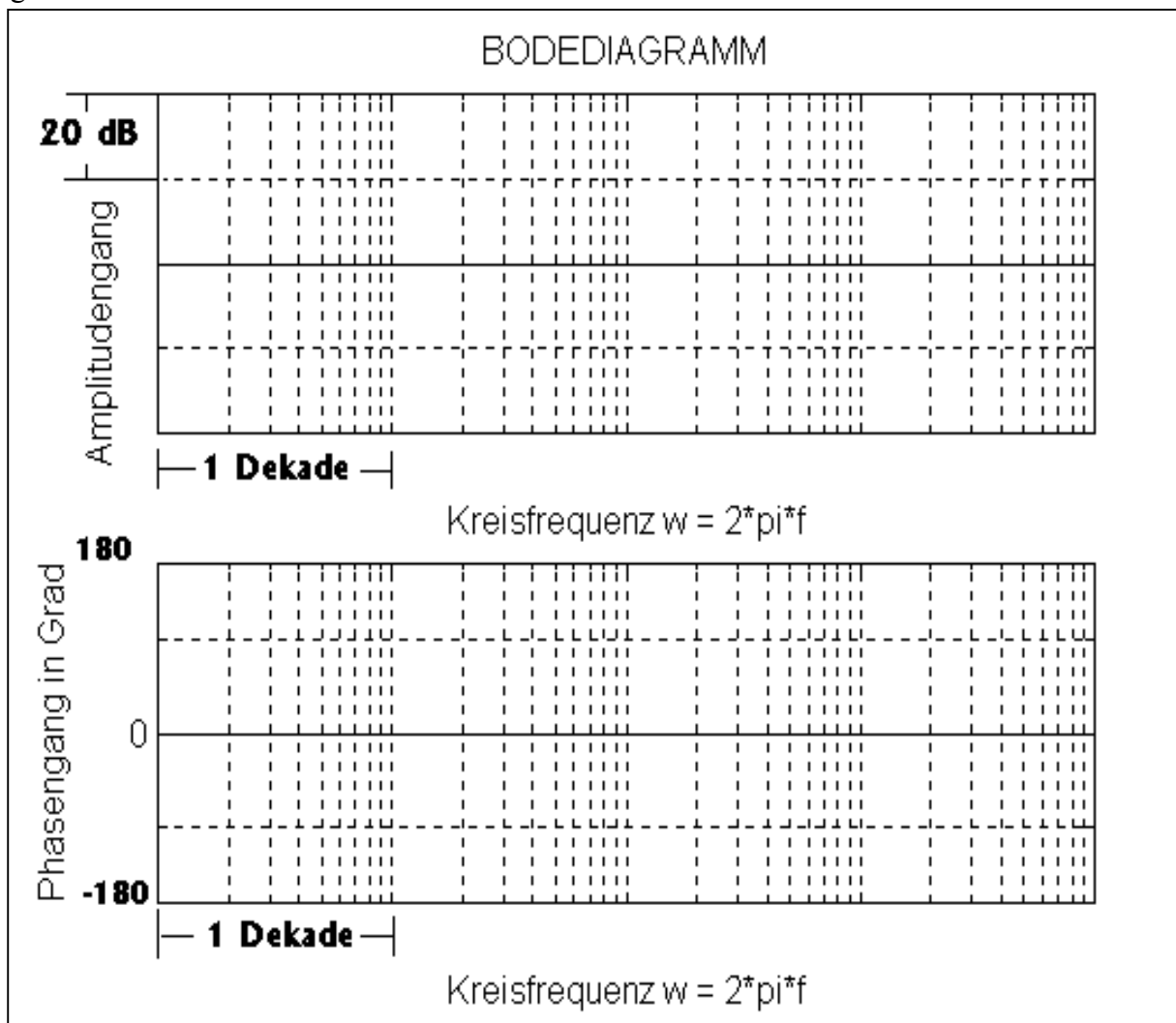
Übergangsfunktion:

$$h(t) = K_P \cdot \sigma(t)$$

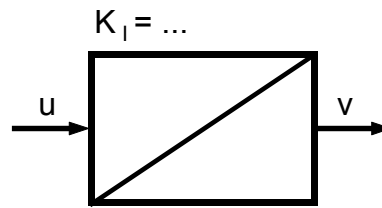
stabil  
realisierbar

P/N-Plan entfällt

log. FKL'n:



### 6.3.2. Das I-Glied



Beschreibung im Zeitbereich:  $v(t) = K_I \cdot \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau$   $K_I$  - Integrierbeiwert

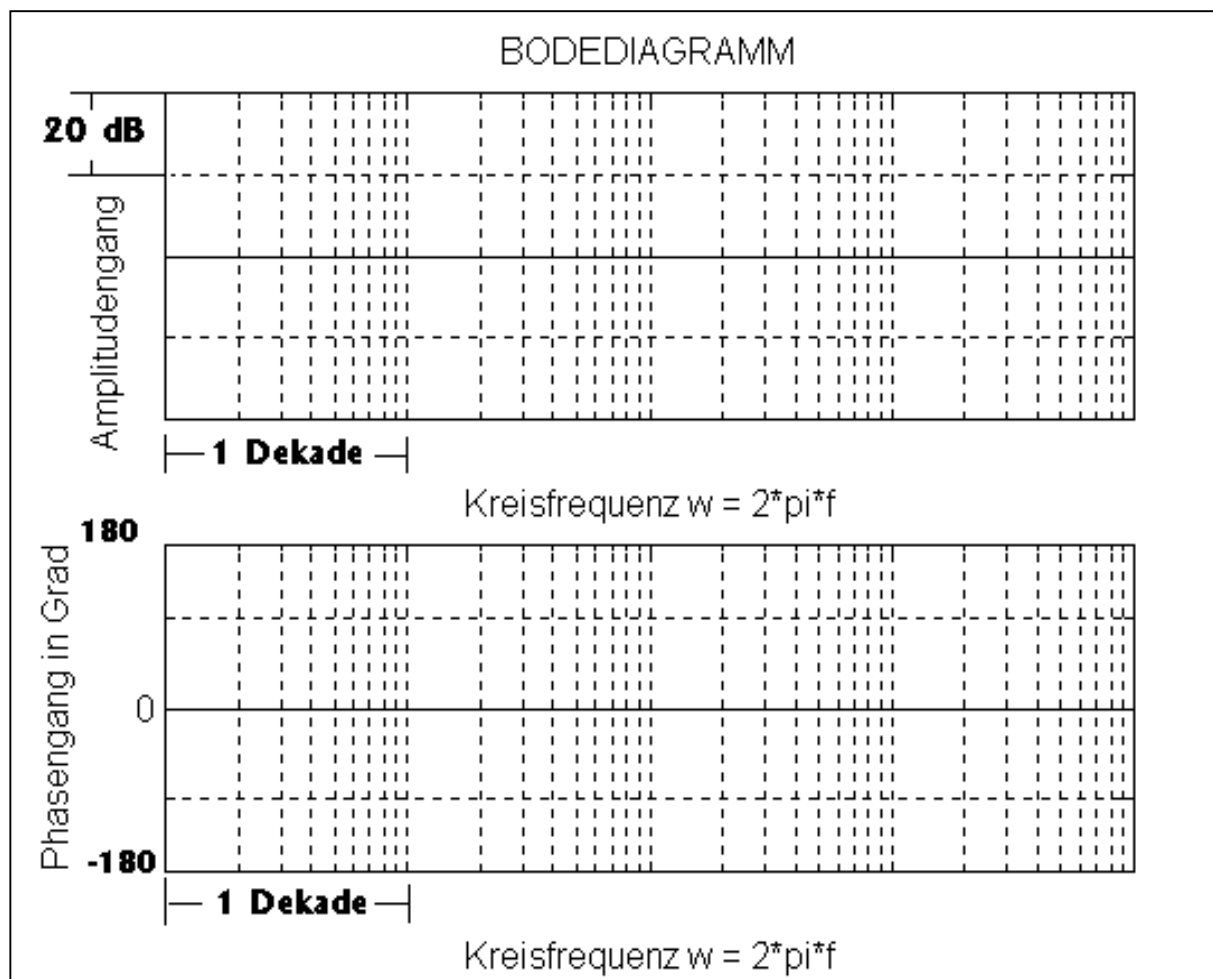
Übertragungsfunktion:  $G(s) = \frac{K_I}{s}$  instabil  
realisierbar

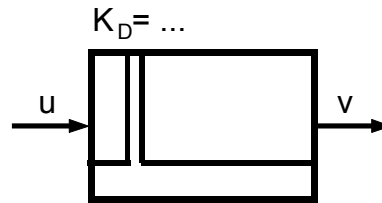
Übergangsfunktion:  $h(t) = K_I \cdot t \cdot \sigma(t)$

P/N-Plan:



Log. Frequenzkennlinien





Beschreibung im Zeitbereich:

$$v(t) = K_D \cdot \dot{u}(t)$$

 $K_D$  - Differenzierbeiwert

Übertragungsfunktion:

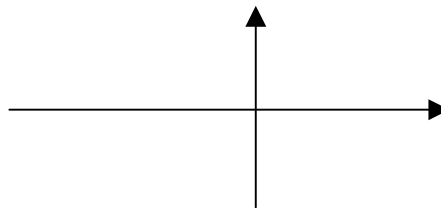
$$G(s) = K_D \cdot s$$

Instabil  
nicht realisierbar

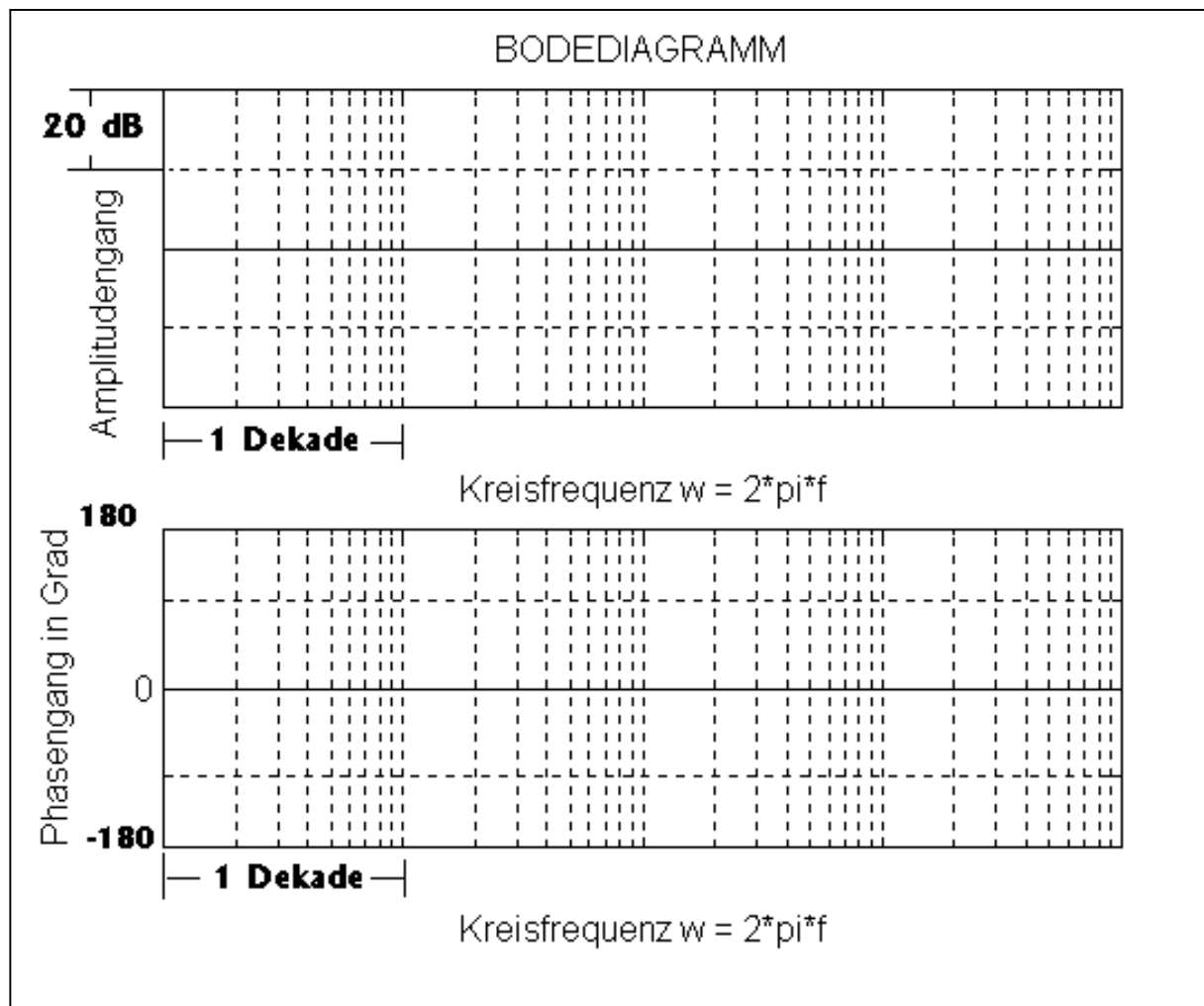
Übergangsfunktion:

$$h(t) = K_D \cdot \delta(t)$$

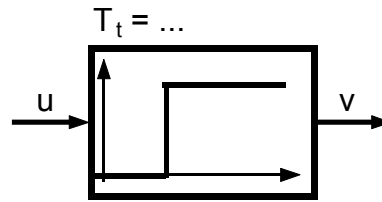
P/N-Plan:



Log. FKL'n



### 6.3.4. Das Totzeitglied



Beschreibung im Zeitbereich:

$$v(t) = u(t - T_t)$$

$T_t$  - Totzeit

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = e^{-sT_t}$$

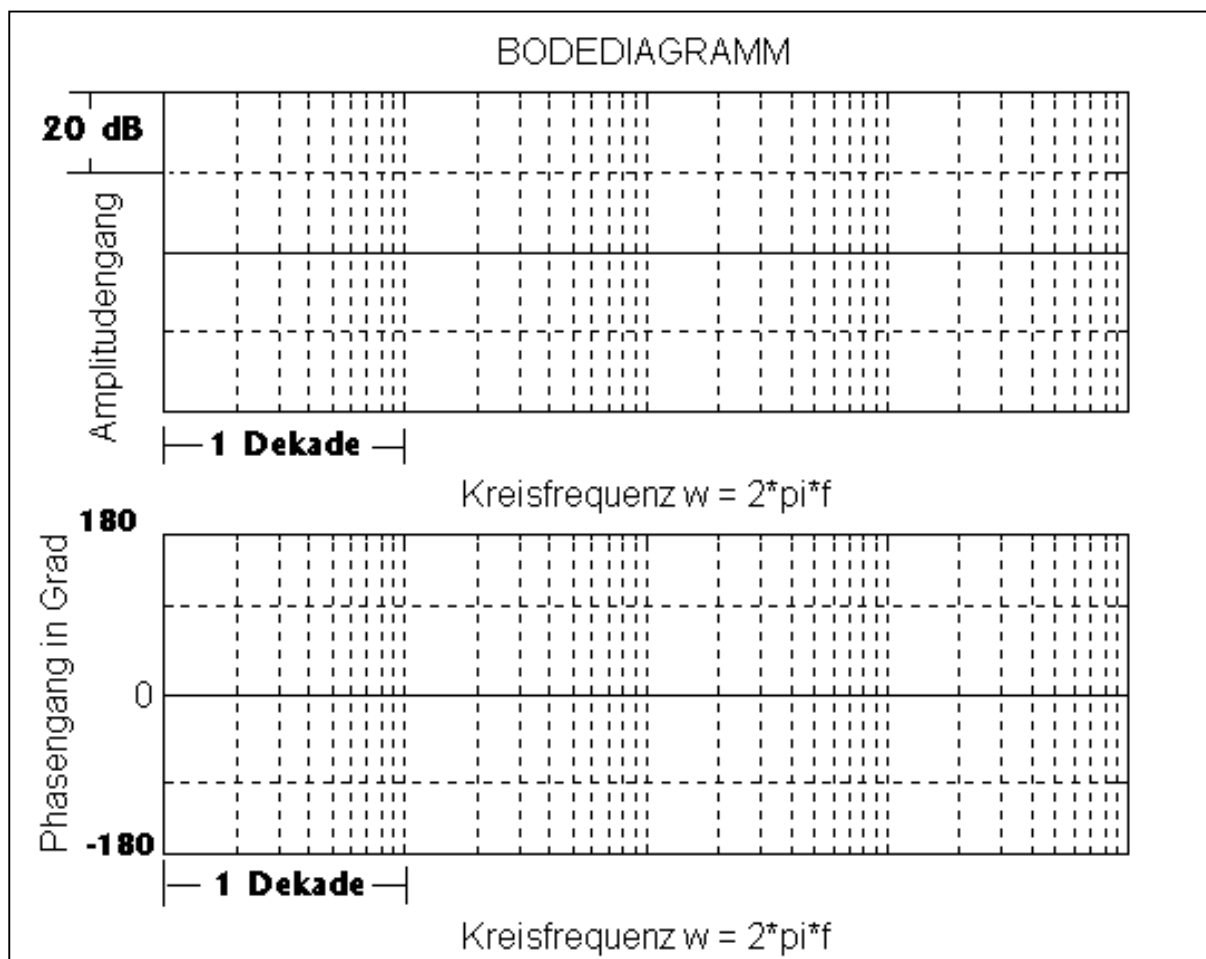
realisierbar  
stabil

Übergangsfunktion:

$$h(t) = \sigma(t - T_t)$$

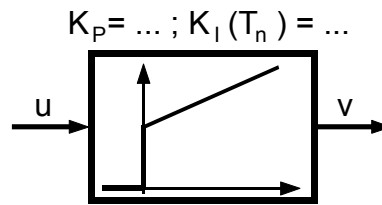
P/N-Plan: unterschiedlich darstellbar, aber immer  $\infty$  viele Nullstellen und ggf. auch noch  $\infty$  viele Polstellen.

log. FKL'n:



**Achtung:** Totzeitglieder sind (obwohl selber stabil) in geschlossenen Regelkreisen gefährliche “Stabilitätskiller” ! (→ Nyquist-Kriterium).

### 6.3.5. Das PI-Glied (Der PI-Regler)



Beschreibung im Zeitbereich:  $v(t) = K_P \cdot u(t) + K_I \cdot \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau$

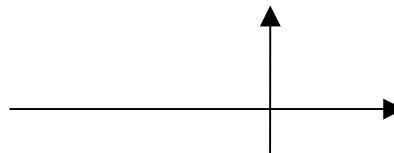
bzw.  $v(t) = K_P \cdot \left[ u(t) + \left( \frac{1}{T_n} \right) \cdot \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau \right]$   $T_n$  - Nachstellzeit

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P \cdot \left( 1 + \frac{1}{sT_n} \right)$   $T_n = \frac{K_P}{K_I}$

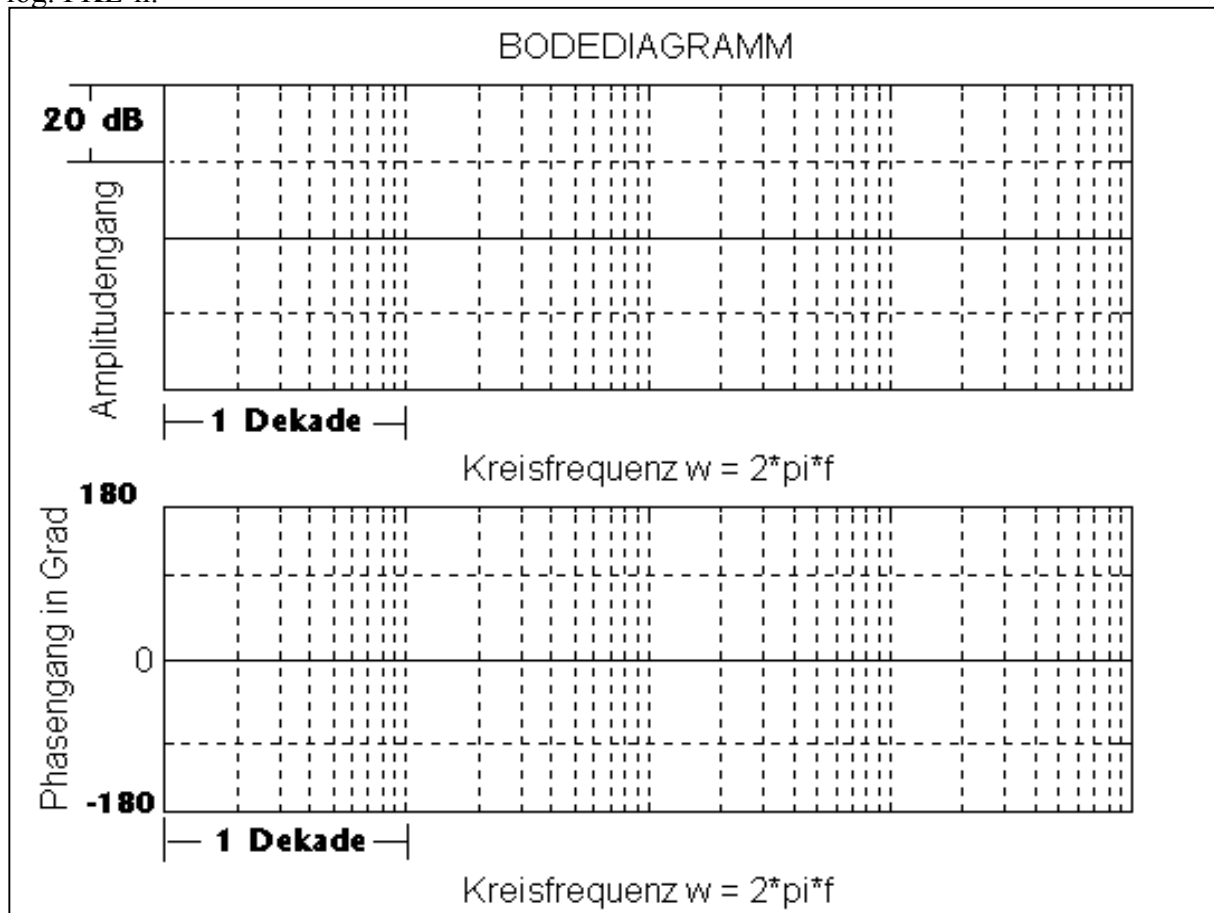
Übergangsfunktion:  $h(t) = K_P \cdot \left( 1 + \frac{t}{T_n} \right) \cdot \sigma(t)$

instabil  
realisierbar

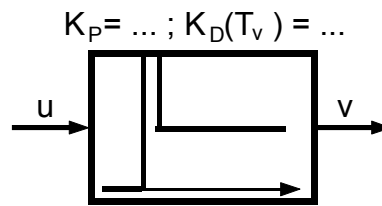
P/N-Plan:



log. FKL'n:



### 6.3.6. Das PD-Glied (Der PD-Regler)



Beschreibung im Zeitbereich:  
bzw.

$$v(t) = K_P \cdot u(t) + K_D \cdot \dot{u}(t)$$

$$v(t) = K_P \cdot [u(t) + T_v \cdot \dot{u}(t)]$$

$T_v$  - Vorhaltzeit

$$T_v = \frac{K_D}{K_P}$$

Übertragungsfunktion:

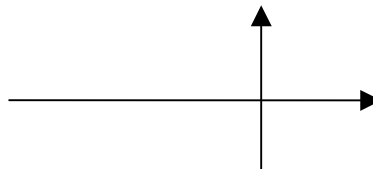
$$G(s) = K_P \cdot [1 + sT_v]$$

Übergangsfunktion:

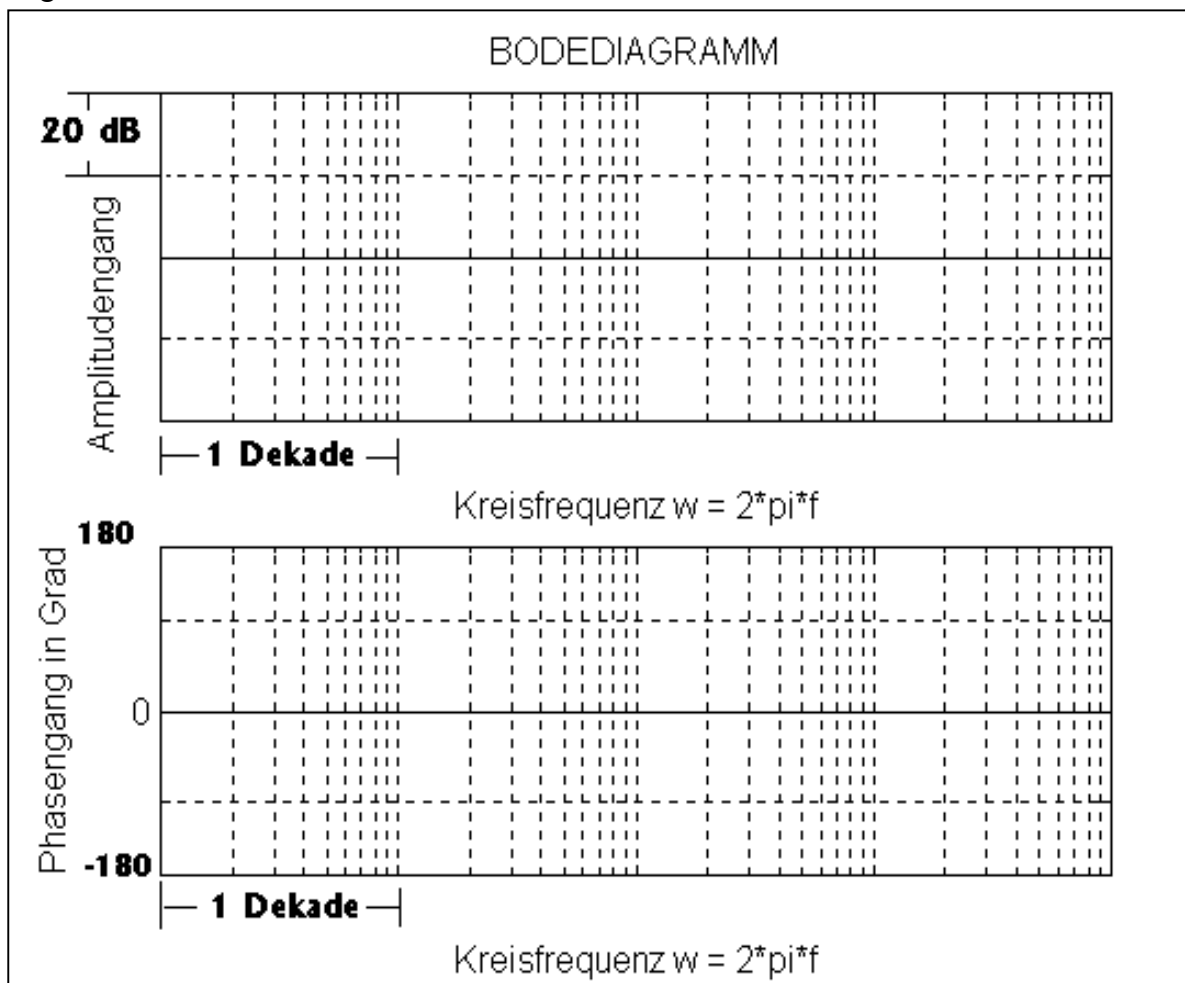
$$h(t) = K_P \cdot \sigma(t) + K_D \cdot \delta(t)$$

instabil  
nicht realisierbar

P/N-Plan:

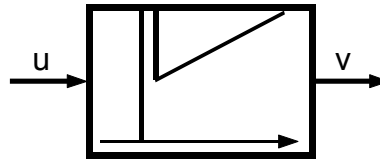


log. FKL'n:



### 6.3.7. Das PID-Glied (Der PID-Regler)

$$K_P = \dots; T_n = \dots; T_v = \dots$$



Beschreibung im Zeitbereich:

$$v(t) = K_P \cdot u(t) + K_I \cdot \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau + K_D \cdot \dot{u}(t)$$

bzw.

$$v(t) = K_P \cdot \left[ 1 + \left( \frac{1}{T_n} \right) \cdot \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau + T_v \cdot \dot{u}(t) \right]$$

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P \cdot \left[ 1 + \frac{1}{sT_n} + sT_v \right]$  bzw.  $G(s) = K_P \cdot \left[ \frac{1 + sT_n + s^2T_nT_v}{sT_n} \right]$

Übergangsfunktion:

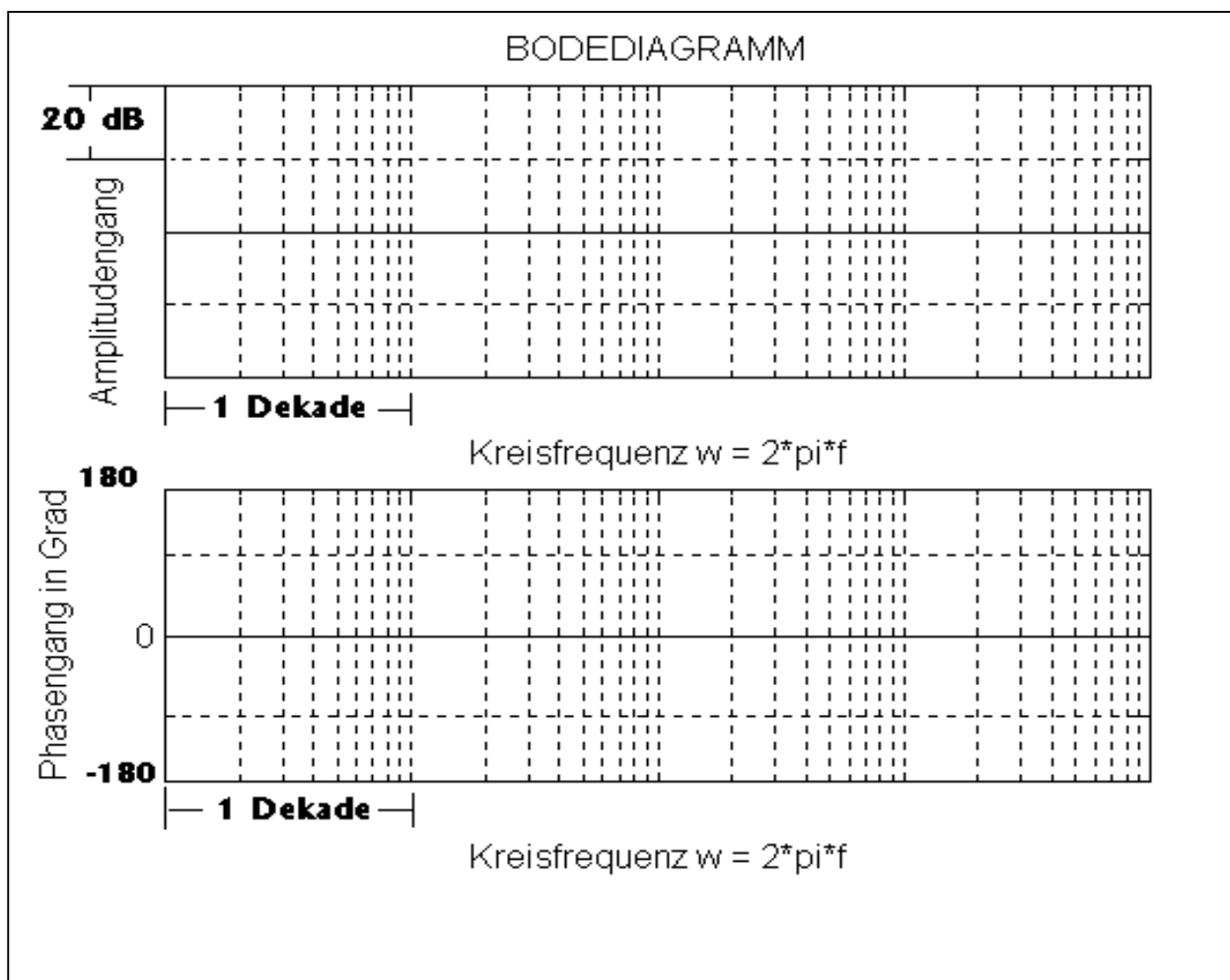
$$h(t) = [K_P + K_I \cdot t] \cdot \sigma(t) + K_D \cdot \delta(t)$$

realisierbar

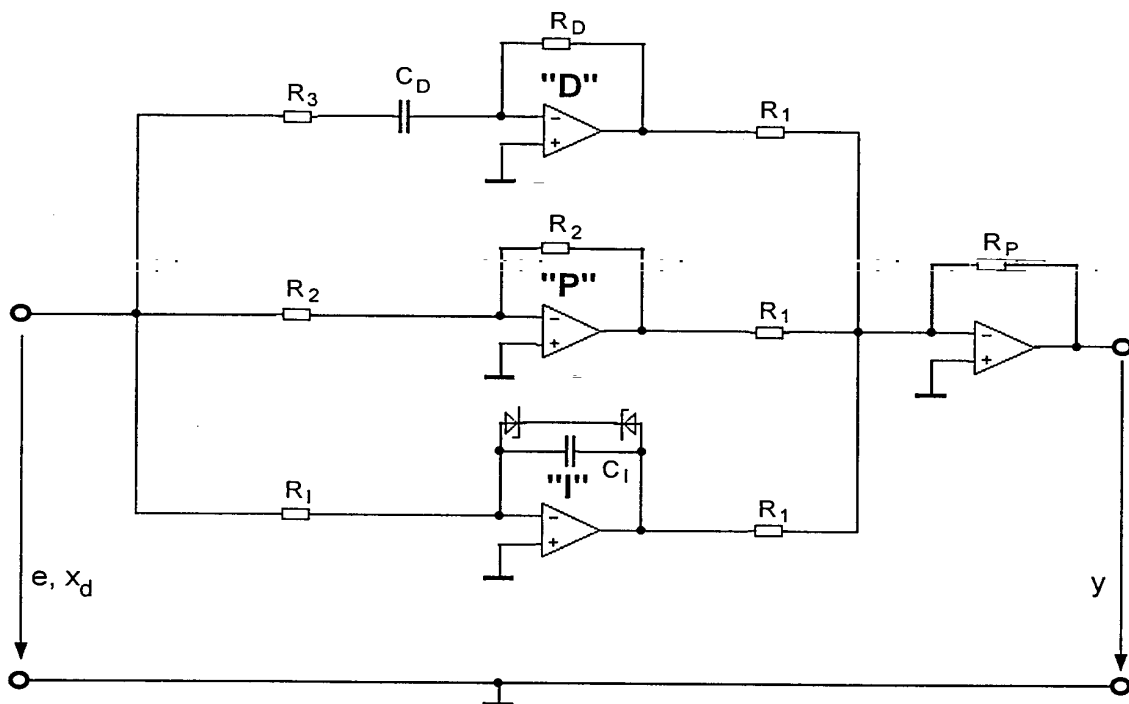
P/N-Plan:



log. FKL'n:





**Schaltungstechnische "Realisierung" des PID-Reglers:**

$$G_R(s) = \frac{R_P}{R_1} \cdot \left[ 1 + sC_D R_D + \frac{1}{sR_I C_I} \right] \quad R_3 = 0$$

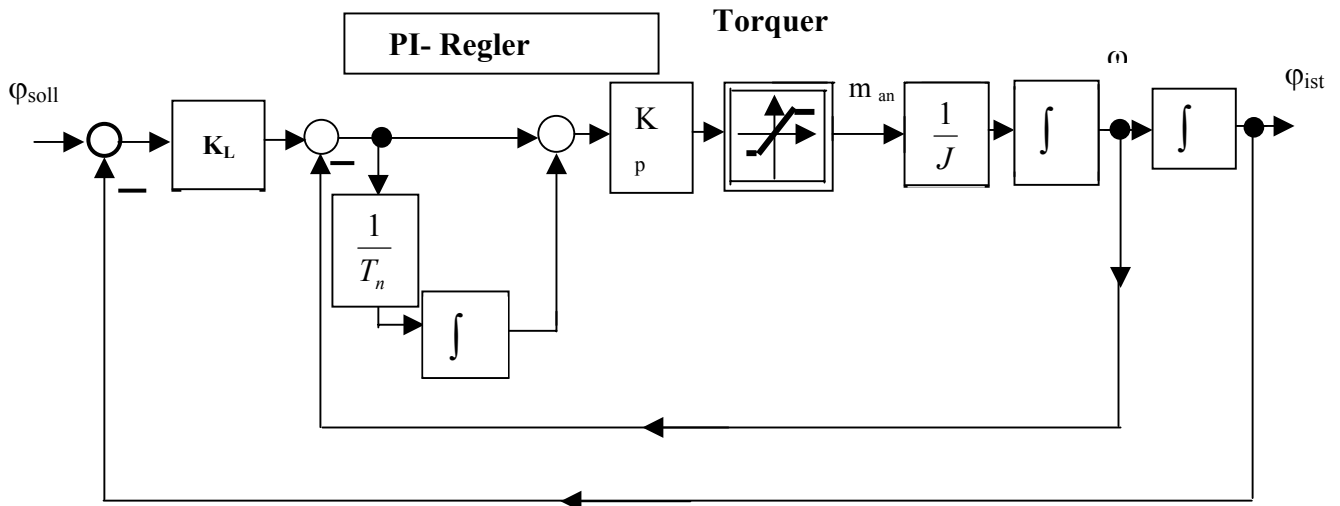
$$G_R(s) = K_P \cdot \left[ 1 + sT_v + \frac{1}{sT_n} \right]$$

Die beiden antiseriell geschalteten Zenerdioden, parallel zum Kondensator des I-Anteils, sind als Integratorbegrenzung ( Anti-Reset-Windup-Schaltung) notwendig: Wenn das dem Regler nachgeschaltete Stellglied eine Stellgrößenbegrenzung hat ( und das ist in der Praxis immer der Fall ), dann kann es sein, daß der Integrierer sich immer mehr „auflädt“ um einen festgestellten Regelfehler schnell auszuregeln, obwohl die dazu notwendige Stellgröße nicht zur Verfügung steht. Aufgrund der tatsächlich vorhandenen Stellgröße dauert es eine gewisse Anregelzeit bis der Istwert nach Führungsgrößensprung bzw. Störgrößensprung wieder erstmals in den Bereich der zulässigen Sollwertabweichung eintritt. Ist dann „v = w“ erreicht, dann sollte der I-Anteil nicht weiter versuchen, die Stellgröße zu erhöhen. Da er sich aber über die Dauer der Ausregelzeit aufgeladen hat, wird er gerade das aber tun. (Vgl. auch Bühler, H.:“ Anti-Reset-Windup-Maßnahmen bei stetigen Reglern“, Automatisierungstechnik 36 (1988) 5, S 190-191.

Von den beiden Zenerdioden ist immer eine im Durchlaß und eine gesperrt. Wird nun „y“ so groß, daß das Stellglied in die Begrenzung steuert, dann sollte die gesperrte Zeneridode „fluten“. Die Kondensatorspannung wird daraufhin auf dem Wert festgehalten, bei dem die Stellgrößenbegrenzung einsetzte.

Wie beeindruckend die Integratorbegrenzung wirkt, soll das nachstehende Beispiel zeigen:

„ Von einem Antriebssystem mit Lageregelung und unterlagter Geschwindigkeitsregelung ist folgendes Strukturbild gegeben:



Zahlenwerte:  $K_L = 55.0$ ,  $K_p = 0.7586$ ,  $T_n = 0.0166 \text{ sec}$ ,  $J = 0.0031746 \text{ kgm}^2$

$$m_{an}(t) = \begin{cases} -3.255 \text{ Nm}, & \text{falls } u(t) \leq -3.255 \\ u(t), & \text{falls } |u(t)| \leq 3.255 \\ +3.255 \text{ Nm}, & \text{falls } u(t) > +3.255 \end{cases}$$

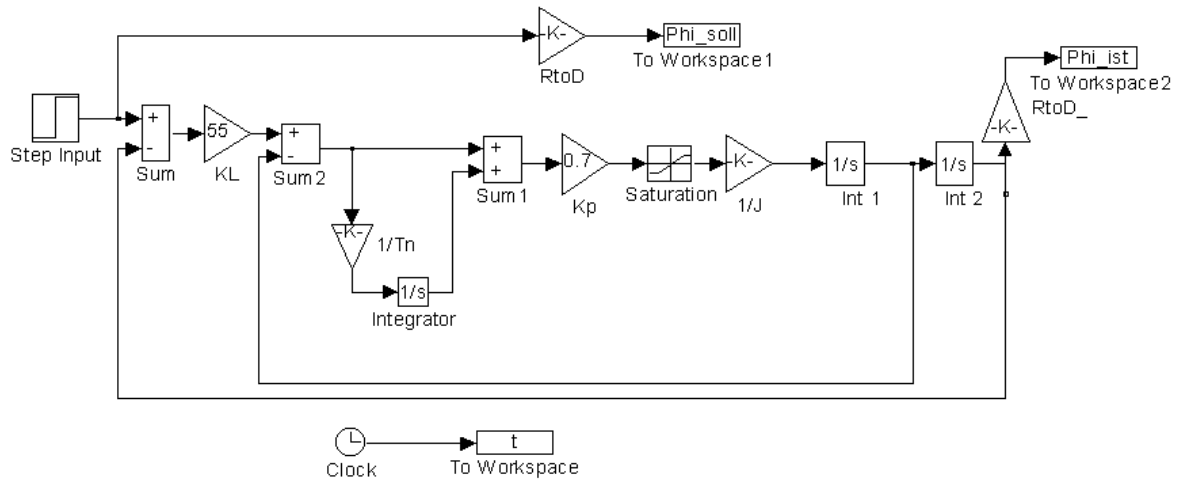
1. Simulieren Sie mit Hilfe von SIMULINK des Zeitverhalten von  $\varphi$ , wenn für  $\varphi_{soll}$  gilt:

$$\varphi_{soll} = \hat{\varphi} \cdot \sigma(t) \quad \text{und} \quad \hat{\varphi} = 5^\circ, 30^\circ, 60^\circ$$

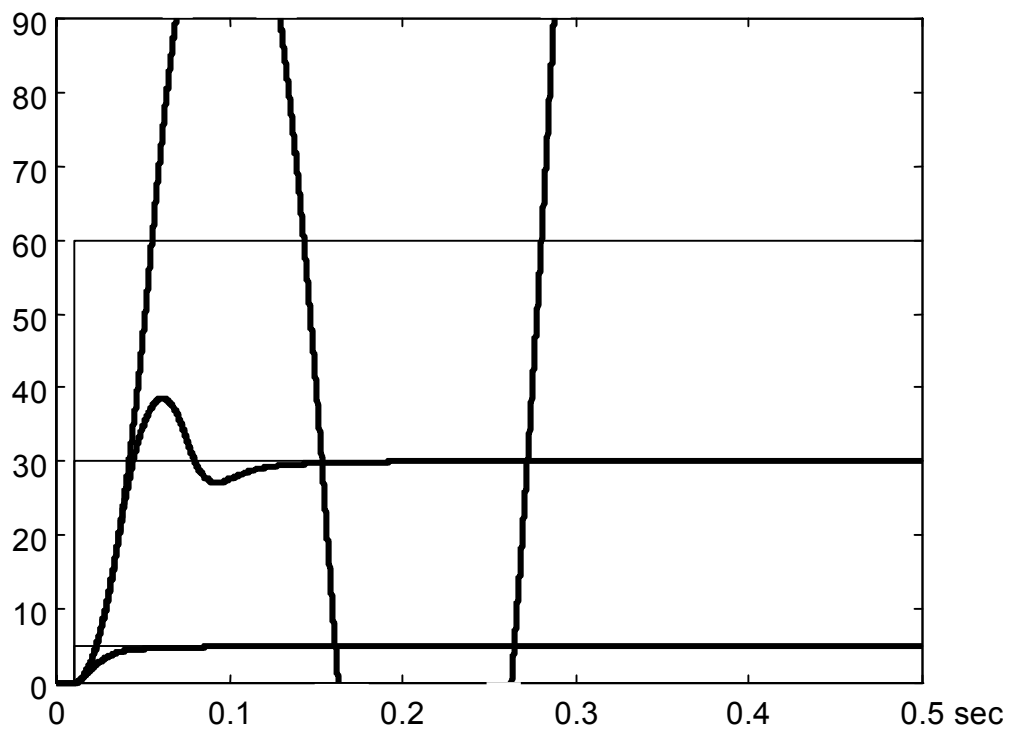
2. durch folgende Zusatzmaßnahme soll nunmehr (mit der ursprünglichen Reglereinstellung) ein stets befriedigendes Übergangsverhalten erreicht werden:  
Wenn das Stellmoment in die Begrenzung geht, dann soll der Integrationsvorgang des PI-Reglers angehalten werden. (Man lege hierzu den Integratoreingang einfach auf „0“). Wenn sich das Moment aus der Begrenzung löst, dann wird der I-Anteil wieder zugeschaltet. Auch hierzu ist das Zeitverhalten zu simulieren.

Ergebnisse:

Einfluß der Stellgrößenbeschränkung ohne gleichzeitige Integratorbegrenzung  
Simulink-Simulation:

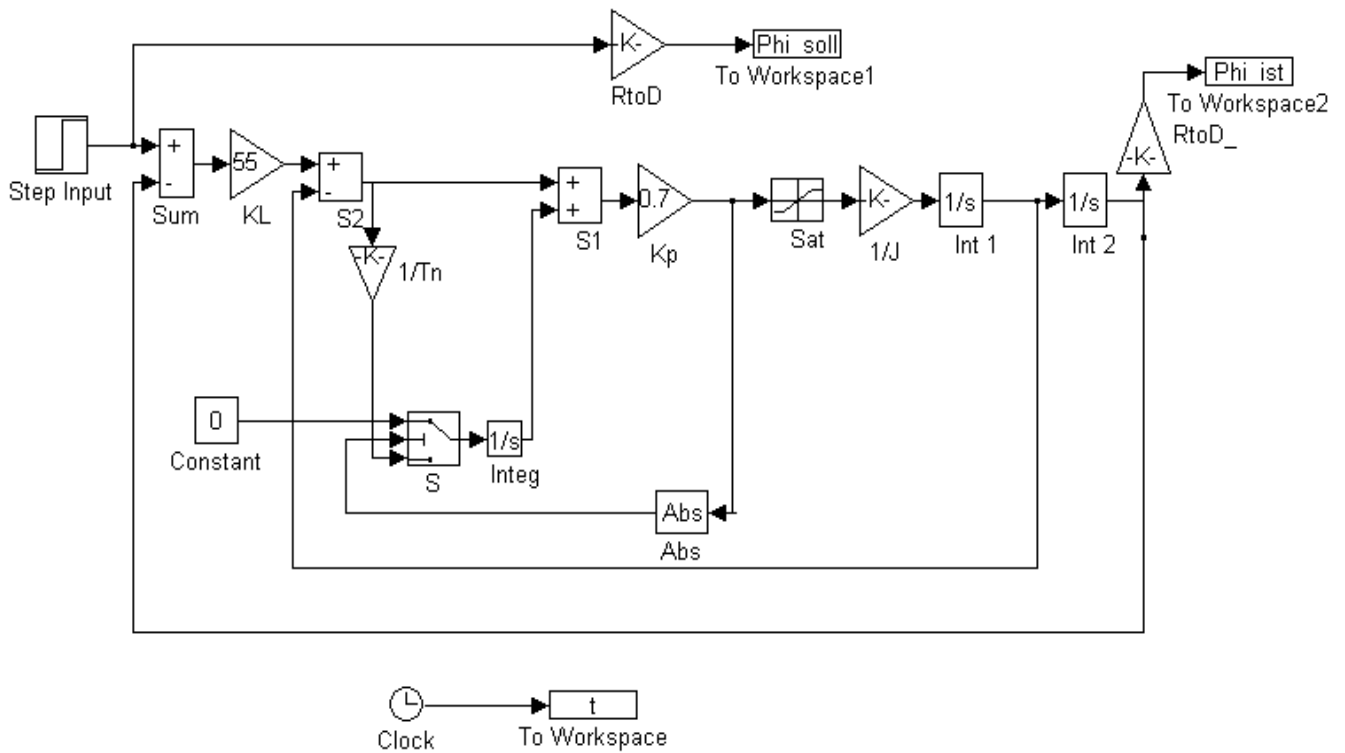


Übergangsfunktionen hierzu:

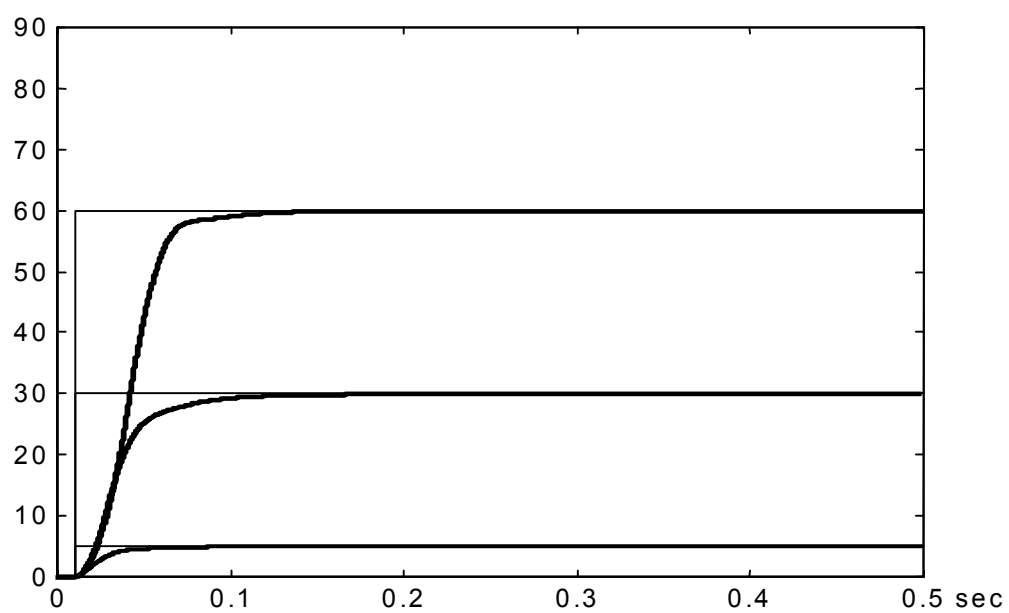


Einfluß der Stellgrößenbeschränkung mit gleichzeitiger Integratorbegrenzung

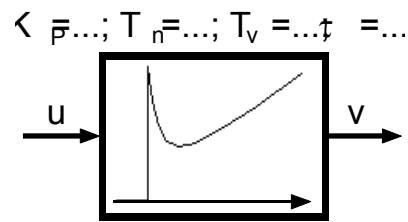
## Simulink-Simulation



Übergangsfunktionen hierzu:



### 6.3.8. Das PID-T1-Glied (Der PID-T1-Regler)

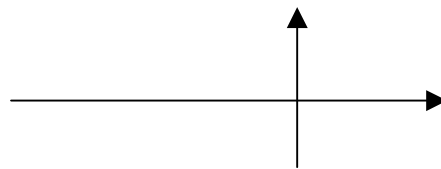


Beschreibung im Zeitbereich: 
$$\tau_1 \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K_p \cdot \left[ u(t) + \left( \frac{1}{T_n} \right) \cdot \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau + T_v \cdot \dot{u}(t) \right]$$

Übertragungsfunktion: 
$$G(s) = K_p \cdot \frac{\left[ 1 + \frac{1}{sT_n} + sT_v \right]}{1 + s\tau}$$

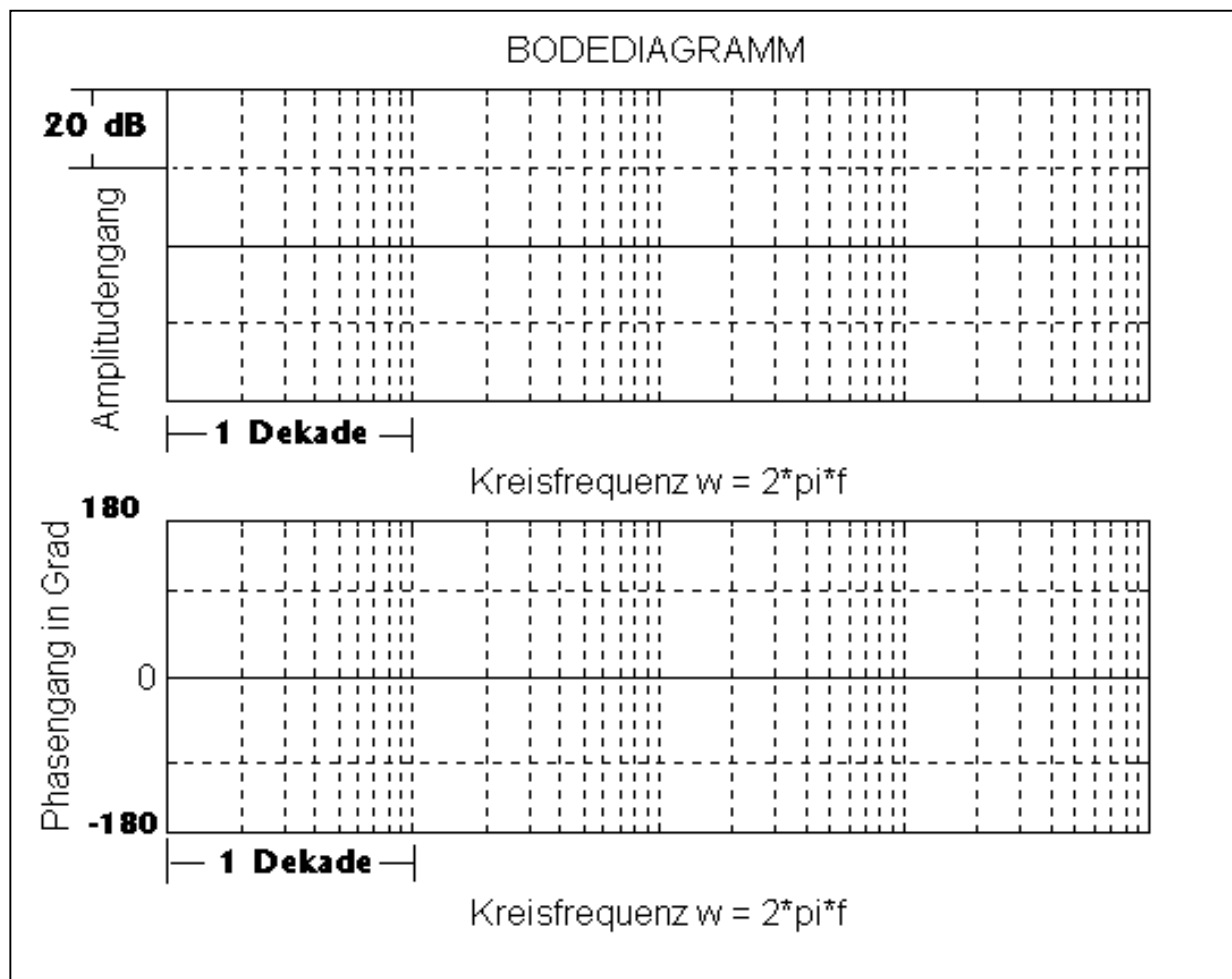
Übergangsfunktion: 
$$h(t) = K_p \cdot \left[ 1 - \frac{\tau}{T_n} + \frac{t}{T_n} - \left( 1 - \frac{\tau}{T_n} - \frac{T_v}{\tau} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \cdot \sigma(t)$$

P/N-Plan:

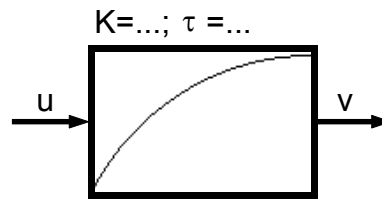


instabil  
realisierbar

Log. FKL'n:



### 6.3.9. Das PT1-Glied (Verzögerungsglied 1.Ordnung)



Beschreibung im Zeitbereich:

$$\tau \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K \cdot u(t)$$

K - Beiwert

 $\tau$  - Zeitkonstante

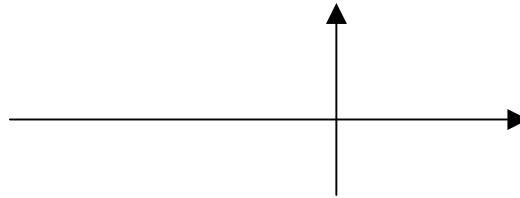
Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{K}{1 + s\tau}$$

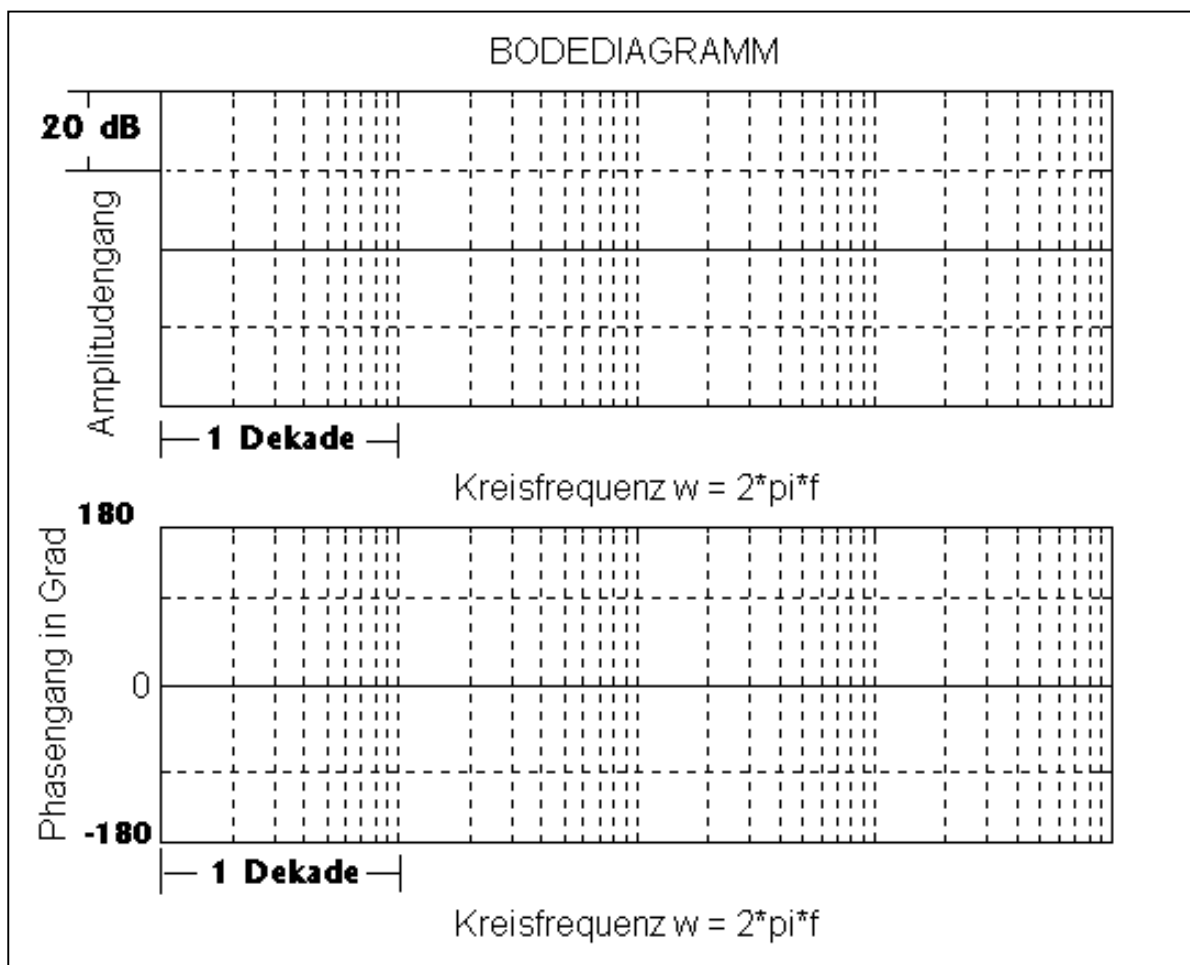
Übergangsfunktion:

$$h(t) = K \cdot \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \cdot \sigma(t)$$

P/N-Plan:

stabil  
realisierbar

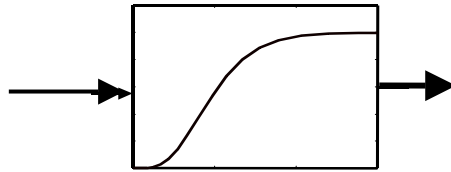
log. FKL'n:



### 6.3.10. Das PT2-Glied (Verzögerungsglied 2.Ordnung)

#### 6.3.10.1 Das nichtschwingungsfähige PT2-Glied

$$K = \quad ; \tau_1 = \quad ; \tau_2 = \quad$$



Beschreibung im Zeitbereich:  $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \ddot{v}(t) + (\tau_1 + \tau_2) \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K \cdot u(t)$

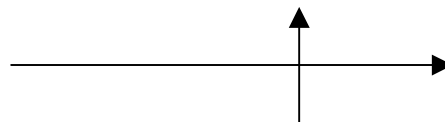
Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{K}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} = \frac{K}{s^2 \tau_1 \tau_2 + s(\tau_1 + \tau_2) + 1}$$

Übergangsfunktion:

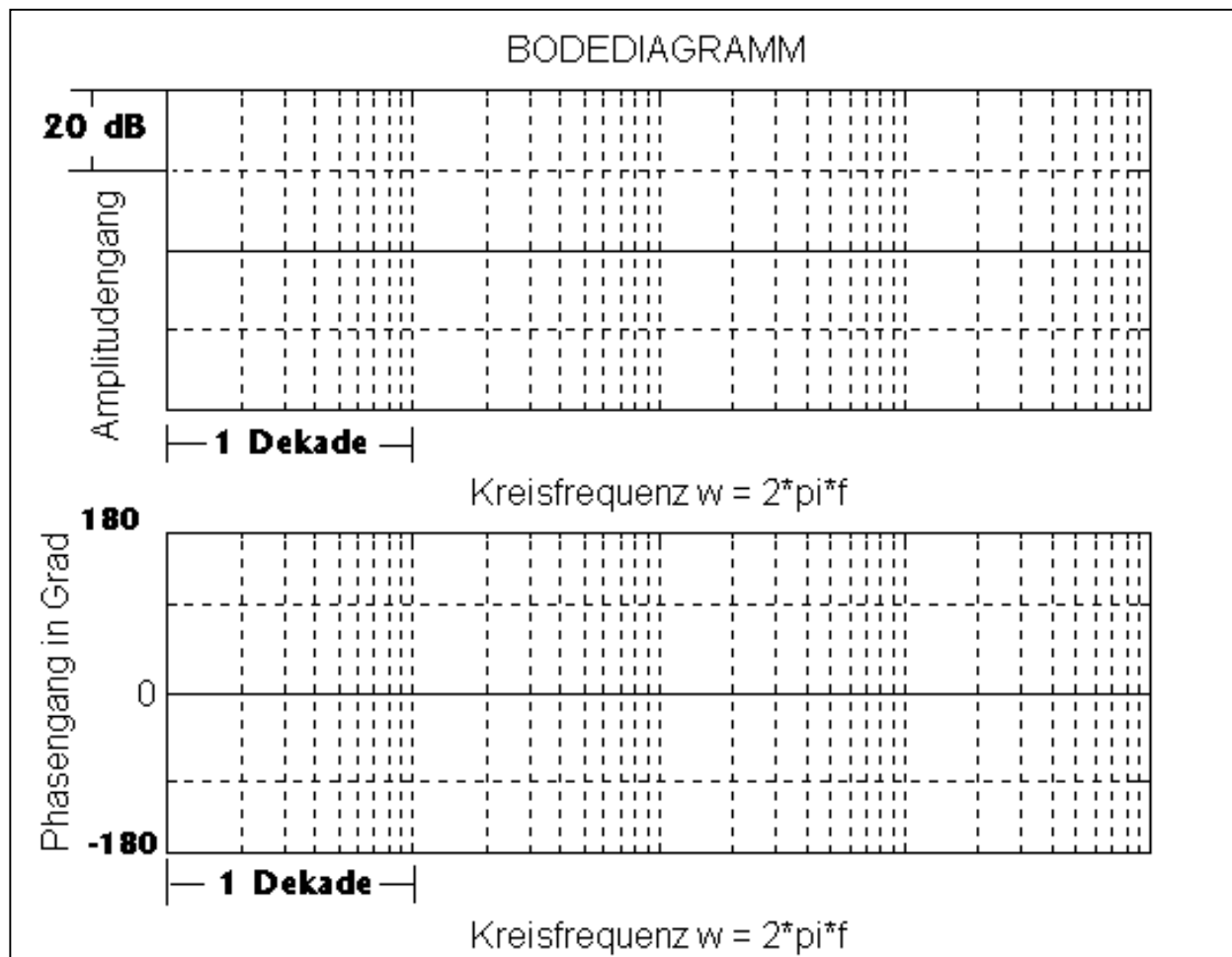
$$h(t) = K \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \left( \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right] \cdot \sigma(t)$$

P/N-Plan:



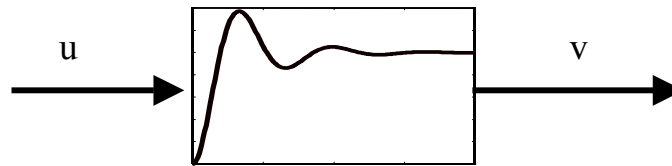
stabil

log. FKL'n:



### 6.3.10.2 Das schwingungsfähige PT2-Glied

$$K = \quad ; D = \quad ; \tau = \quad ;$$



Das schwingungsfähige PT2-Glied spielt in der Regelungstechnik eine bedeutende Rolle. Man versucht z.B. Regelsysteme – egal wie „kompliziert“ die Strecke und der Regler sein mögen – immer so zu entwerfen, daß sie sich wie ein schwingungsfähiges PT2-Glied verhalten.

Beschreibungen im Zeitbereich:  $\tau^2 \cdot \ddot{v} + 2 \cdot D \cdot \tau \cdot \dot{v} + v = K \cdot u \quad (6.6)$

oder auch  $\ddot{v} + 2 \cdot D \cdot \omega_n \cdot \dot{v} + \omega_n^2 \cdot v = \omega_n^2 \cdot K \cdot u \quad (6.7)$

Man nennt:	$\tau$	-	die Zeitkonstante	[sec]
	$D \ ( D  < 1)$	-	den Dämpfungsfaktor	[ ]
	$\omega_n = 1/\tau$	-	die Kreisfrequenz des ungedämpften Systems	[1/sec]
	$K$	-	den Beiwert ( oder die Verstärkung )	

Später brauchen wir noch:  $\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - D^2}$  die Kreisfrequenz des gedämpften Systems

$$\tau_{ab} = \frac{1}{D \cdot \omega_n} \quad \text{die Abklingzeitkonstante}$$

$$\Phi_D \quad - \quad \text{den Dämpfungswinkel [rad oder deg]}$$

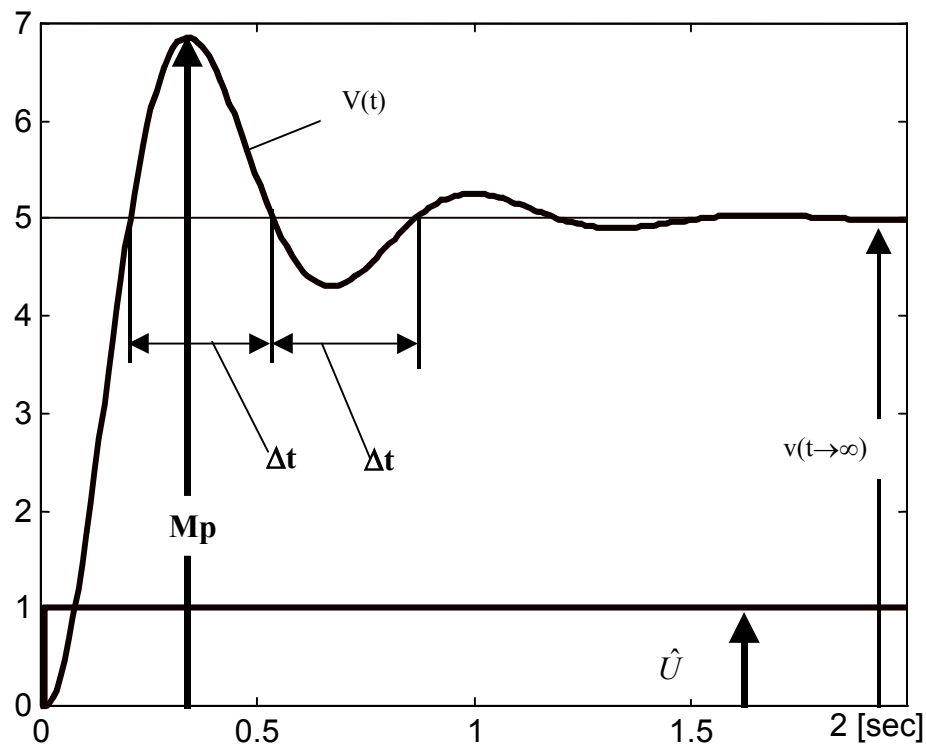
Übergangsfunktion:

$$h(t) = K \cdot \left( 1 - \frac{e^{-D \cdot \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \cos(\omega_n \sqrt{1 - D^2} \cdot t - \arcsin(D)) \right) \quad t \geq 0 \quad (6.8)$$

oder gleichbedeutend: 
$$h(t) = K \cdot \left( 1 - \frac{e^{-\frac{t}{\tau_{ab}}}}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \cos(\omega_d \cdot t - \Phi_D) \right) \quad t \geq 0 \quad (6.9)$$



Die Kenngrößen  $K$ ,  $D$ , und  $\omega_n$  können aus einer gemessenen Übergangsfunktion herausgemessen werden:



Man bezeichnet :  $M_p$  – den Spitzenwert (Peak-value) der Ausgangsgröße.

und: 
$$\ddot{u} = \frac{M_p - v(t \rightarrow \infty)}{v(t \rightarrow \infty)} \quad (6.10) \quad \text{den Überswingfaktor}$$

mit 
$$\ddot{u}_{\%} = \ddot{u} \cdot 100\%$$

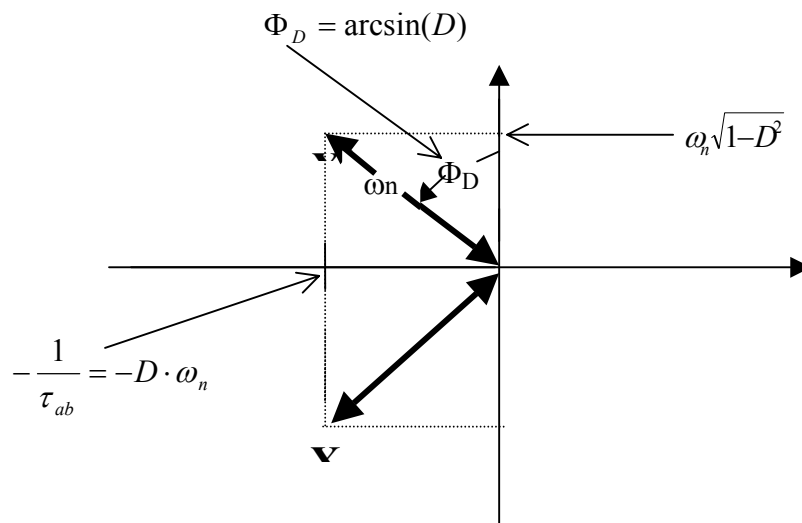
sowie: 
$$K = \frac{v(t \rightarrow \infty)}{\hat{U}} \quad (6.11)$$

der Beiwert bzw. die Verstärkung

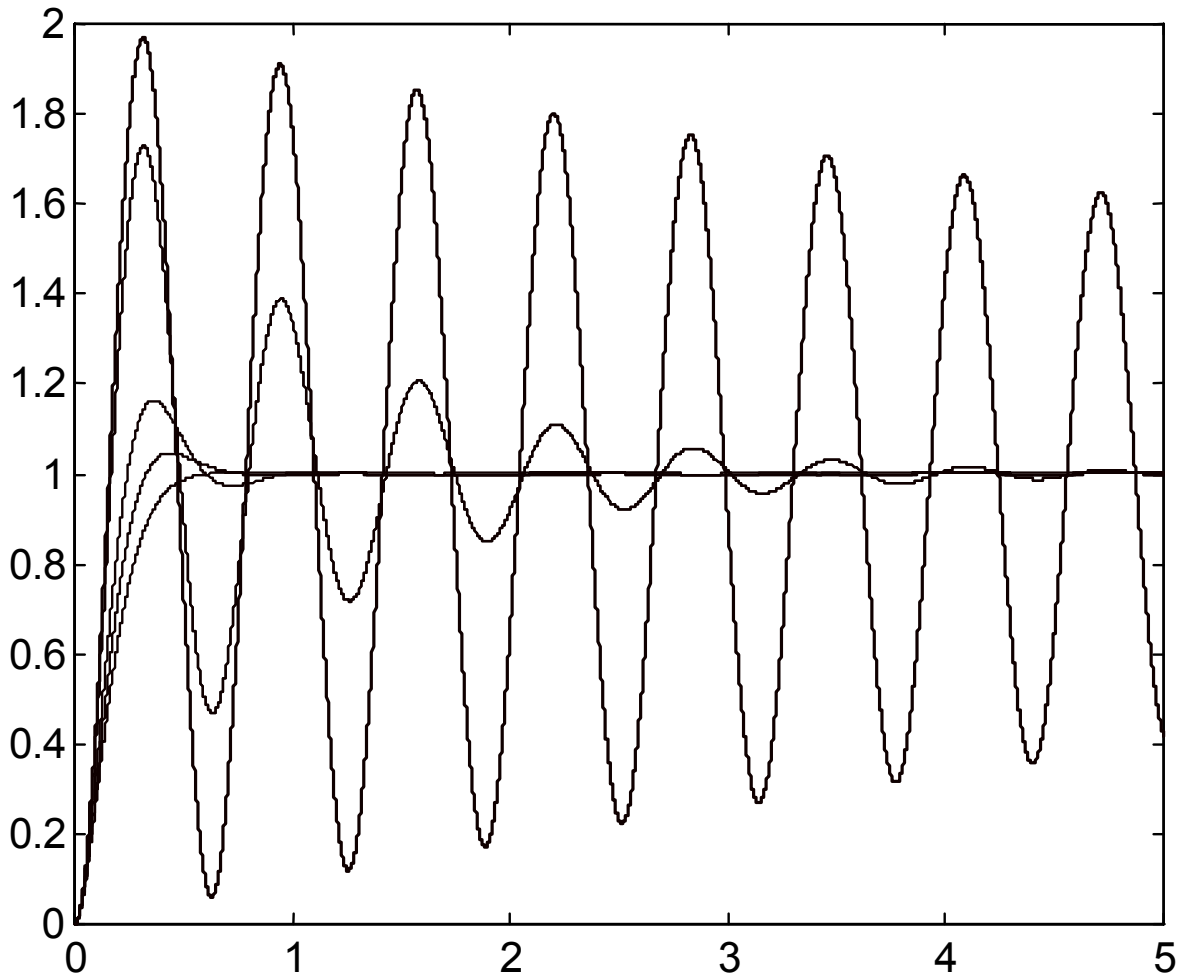
Man erhält weiterhin (ohne Herleitung): 
$$D = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi}{\ln(\ddot{u})} \right)^2}} \quad (6.12)$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{\Delta t \cdot \sqrt{1 - D^2}} \quad (6.13)$$

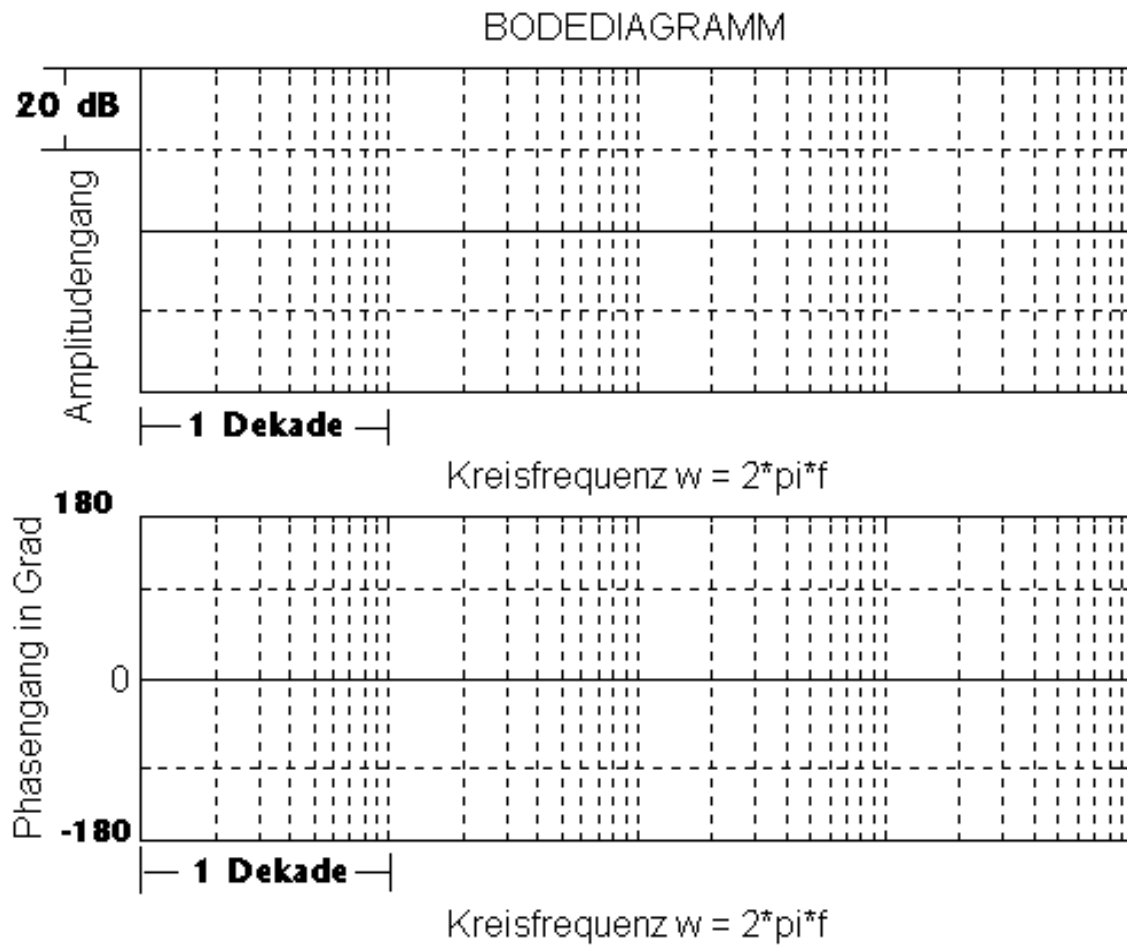
PN-Plan für das schwingungsfähige PT2-Glied:



Sprungantworten für verschiedene D-Werte:



**Bild 6.5:** Sprungantworten des schwingungsfähigen PT2-Gliedes.  
Die Kenngrößen sind  $K=1$ ;  $\omega_n = 10$ ;  $D \in \{0.01; 0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9\}$



Weitere wichtige Zusammenhänge zwischen PN-Plan und Zeitverhalten:

**Ausgehend von**

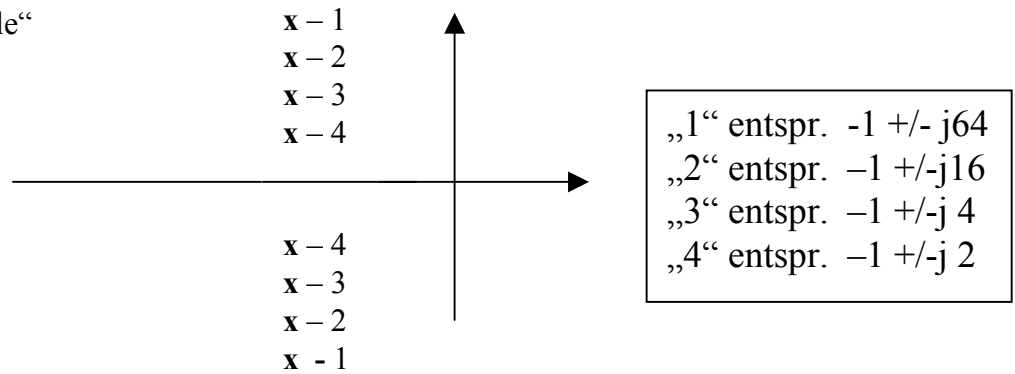
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot D \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} = \frac{1}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot D \cdot \tau \cdot s + 1} \quad |D| < 1 \quad (6.14)$$

(zugehöriger PN-Plan wie Seite 37 oben) und den zugehörigen konjugiert komplexen

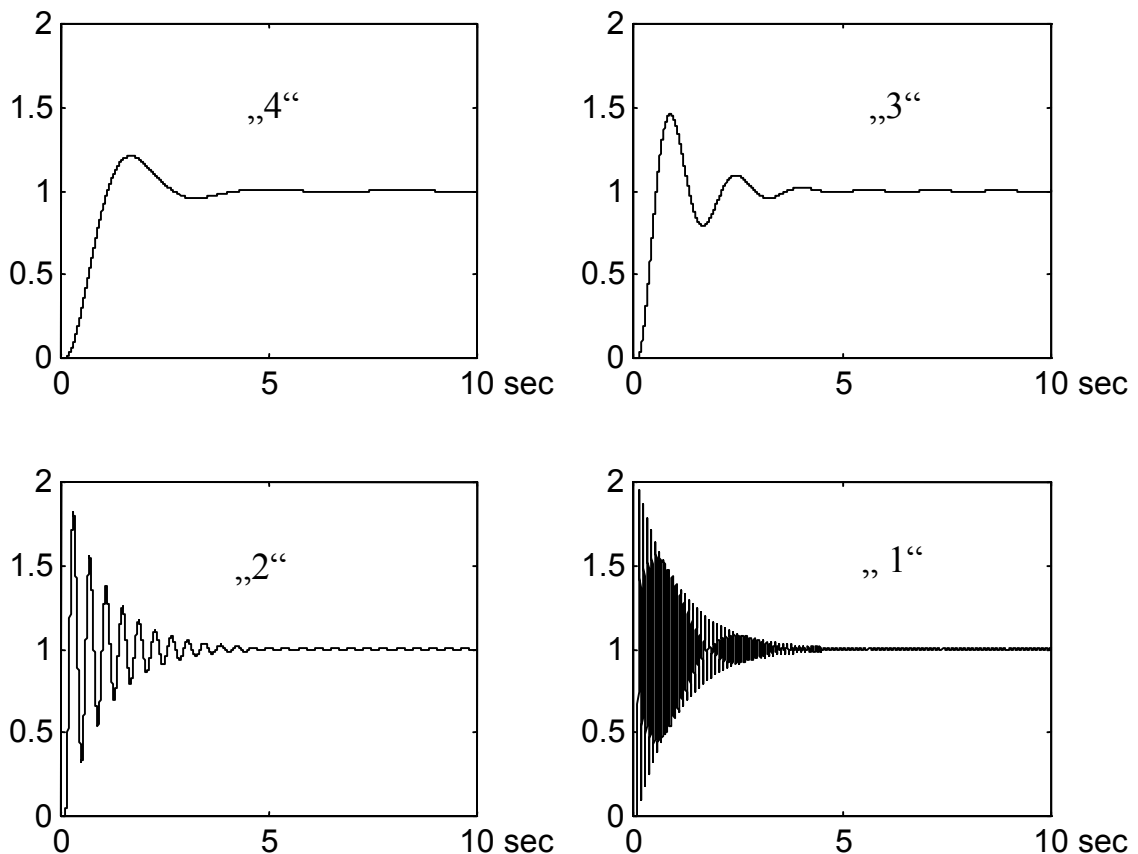
Polstellen  $s_{\infty 1,2} = -D\omega_n + /- j \cdot \omega_n \sqrt{1 - D^2} \quad (6.15)$

kommt man ( durch Auswertung der Formeln für  $h(t)$  ) auf folgende Zusammenhänge:

a) „gleiche Realteile“

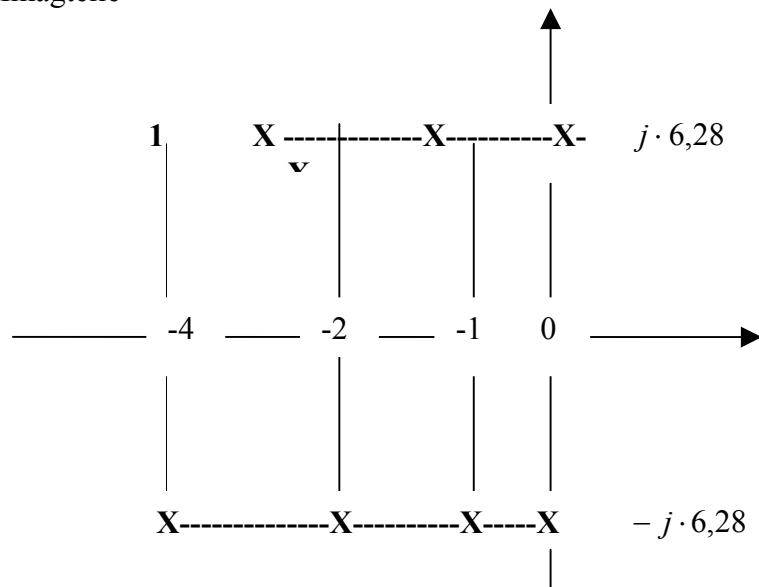


entspricht: „gleiche Abklingzeitkonstante“  $\tau_{ab} = -\frac{1}{D \cdot \omega_n}$  hier im Beispiel:  $\tau_{ab} = 1 \text{ sec}$



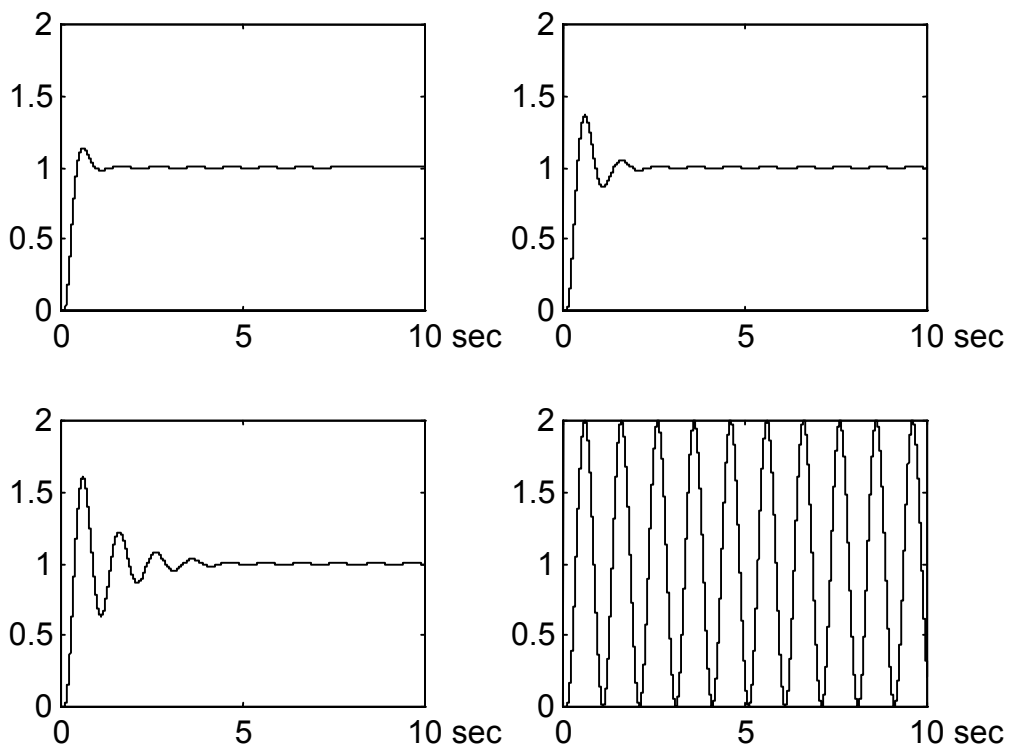
**Bild 6.6** „gleiche Realteile“  $\Rightarrow$  „gleiche Abklingzeitkonstante“

b) „gleiche Imagteile“



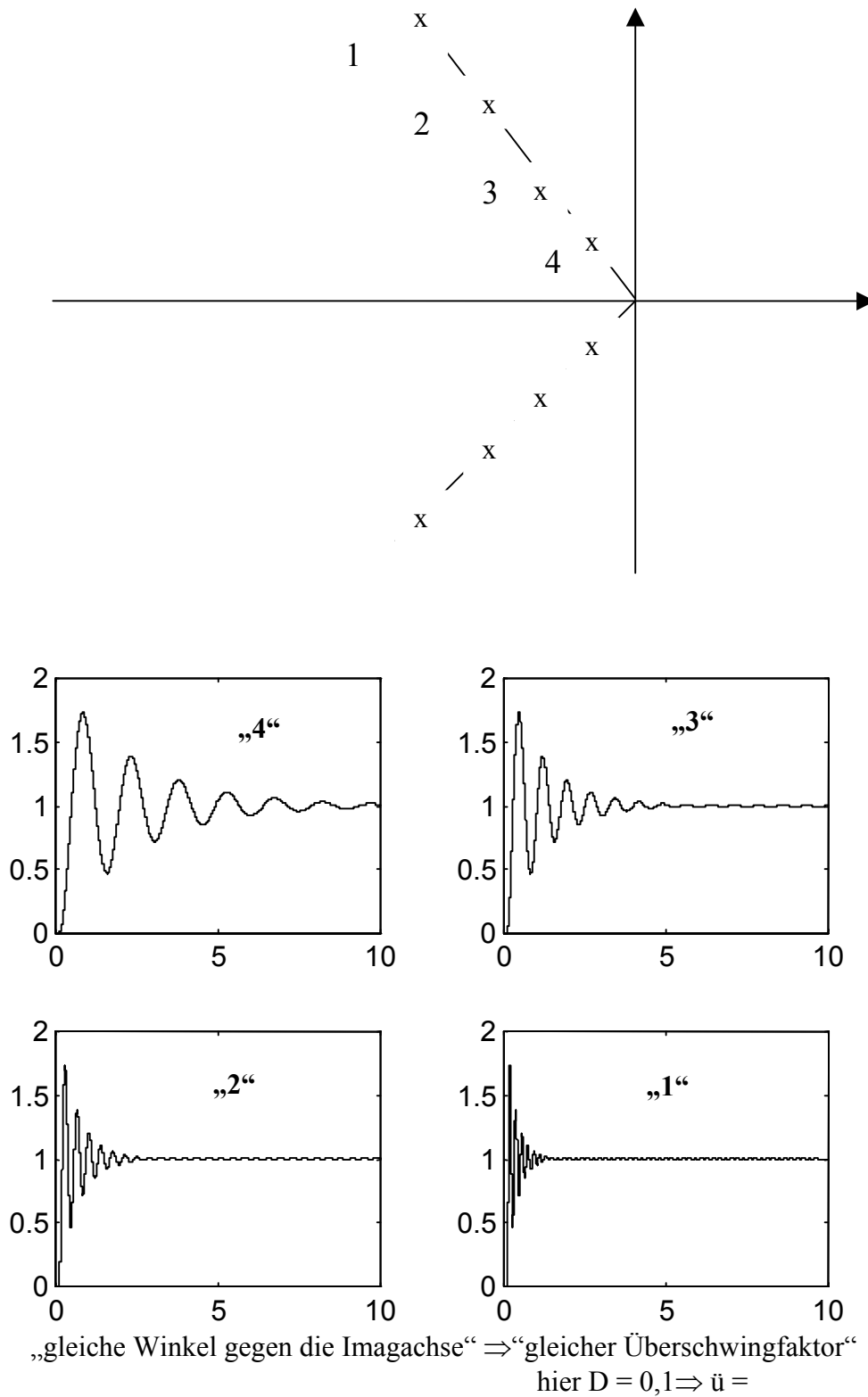
entspricht: „gleiche Frequenz der in  $h(t)$  enthaltenen Schwingung“

$$f_d = \frac{j \cdot 6,28}{2 \cdot \pi} \quad \text{bzw. } T_d = 1 \text{ sec}$$

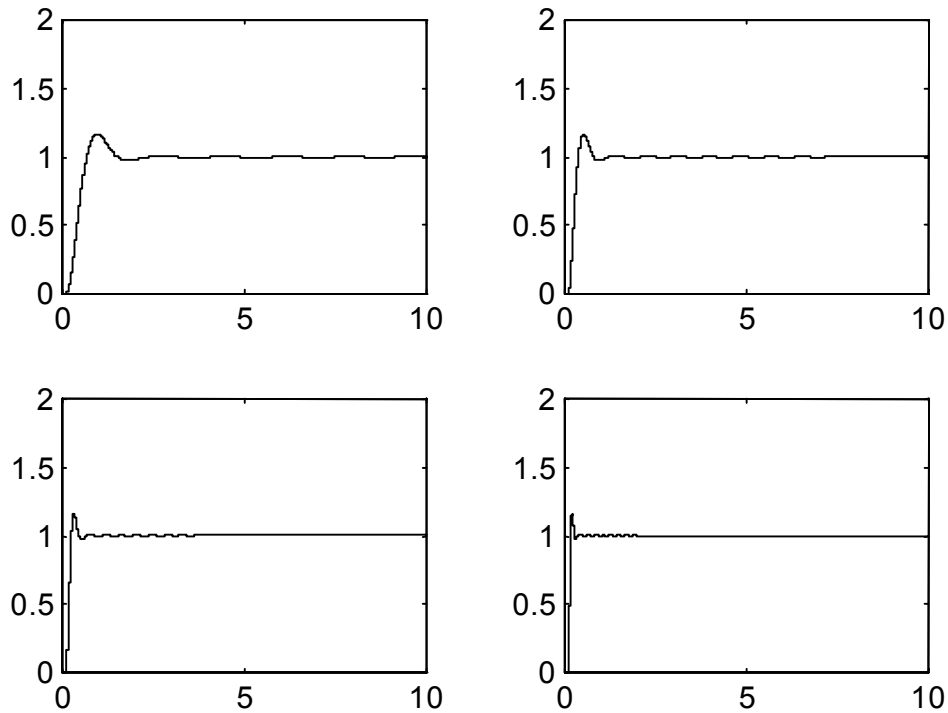


**Bild 6.7** „gleiche Imagteile“  $\Rightarrow$  „gleiche Frequenz der gedämpften Schwingung“

c) „gleicher Winkel (Dämpfungswinkel) gegen die Imag-Achse“



c) Nochmals: „gleicher Winkel (Dämpfungswinkel) gegen die Imag-Achse“



**Bild 6.9** „gleiche Winkel gegen die Imagachse“  $\Rightarrow$  „gleicher Überschwingfaktor“  
hier  $D = 0,5 \Rightarrow \ddot{u} =$

*„Die Jugend von heute liebt den Luxus, hat schlechte Manieren und verachtet die Autorität. Sie widersprechen ihren Eltern, legen die Beine übereinander und tyrannisieren ihre Lehrer.“ (Sokrates, 470-399 v.Chr.)*

### 6.3.11. Das schwingungsfähige PT2-Glied, dargestellt durch I-Glied und PT1-Glied

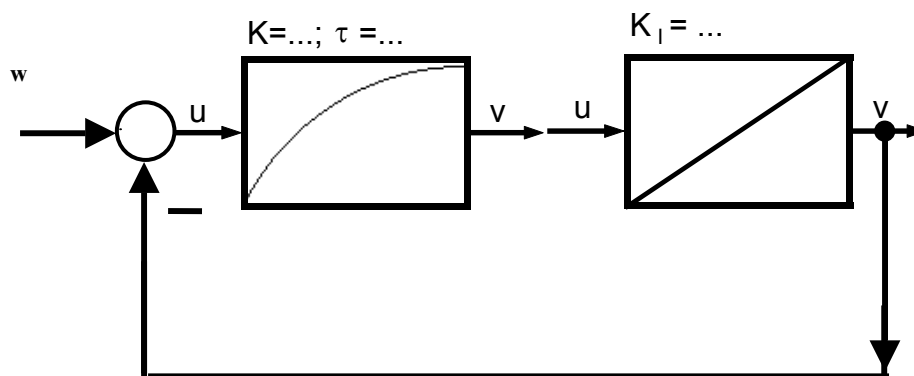
„Eine selbst bescheidene Wahrheit zu finden ist bedeutungsvoller, als über die erhabensten Dinge weitschweifig zu diskutieren, ohne jemals zu einer Wahrheit zu gelangen.“ (Galileo Galilei)



Die nachfolgenden Ausführungen sind entscheidend für das Verständnis der klassischen Regelungstechnik. Leider kann man diese Ausführungen kaum in Lehrbüchern nachlesen. Es wird um gesteigerte Aufmerksamkeit gebeten.



Ausgangspunkt ist die nachstehende Rückkopplungsstruktur:



#### 6.3.11.1 Rechnung:

$$\text{Ausgehend von } G_w(s) = \frac{\frac{K}{1+s\tau} \cdot \frac{K_I}{s}}{1 + \frac{K}{1+s\tau} \cdot \frac{K_I}{s}} = \frac{K \cdot K_I}{s^2 \cdot \tau + s + K \cdot K_I} = \frac{1}{\left( \frac{s^2}{\frac{K \cdot K_I}{\tau}} \right) + \left( \frac{s}{K \cdot K_I} \right) + 1}$$

$$\text{erhält man nach Koeffizientenvergleich mit } G_w(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2 \cdot D \cdot \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K \cdot K_I}{\tau}} \quad \text{und} \quad D = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\tau \cdot K \cdot K_I}}.$$



$$\text{Folgerung : Wenn gilt } \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\tau \cdot K_I \cdot K}} < 1 & , \text{ verhält sich das Regelungssystem wie ein schwingungsfähiges PT2-Glied} \\ \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\tau \cdot K_I \cdot K}} > 1 & , \text{ verhält sich das Regelungssystem wie ein nicht schwingungsfähiges PT2-Glied} \end{array} \right.$$

Nicht nur die Rechnung, auch der Gebrauch des Wurzelortskurvenverfahrens zeigt, daß folgende **Regel 1** gilt:

**Bei hinreichend hoher Kreisverstärkung ( bei unserem Beispiel  $K_o = K_s \cdot K_I$  ) verhält sich ein I+PT1-Glied nach Rückkopplung wie ein schwingungsfähiges Glied 2. Ordnung. Andernfalls wie ein nichtschwingungsfähiges PT2-Glied .**

#### 6.3.11.2 Darstellung mit Hilfe des BODE-Diagramms

*„Nicht minder voller Wunder wie die himmlischen Vorgänge selbst, erschienen mir ja die Umstände, unter denen die Menschen zu ihrer Erkenntnis gelangten“ (Johannes Kepler)*

**Für den praktischen Gebrauch erweist sich die Interpretation der Ergebnisse von 6.3.11.1 im BODE-Diagramm als sehr vorteilhaft.**

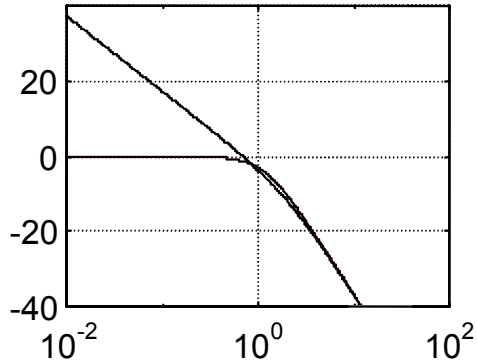
**Zeichnet man sich die Ergebnisse verschiedener Simulationen ( zu rückgekoppelten I+PT1-Gliedern) auf, so kommt man auf repräsentative Ergebnisse, wie sie die Bilder 6.10 bis 6.13 zeigen.**

Das Ergebnis dieser Simulationen liefert eine Alternative zu Regel1. Wir kommen auf eine entsprechende **Regel 2**:

Besitzt eine Anordnung aus I+ PT1-Glied einen Phasenrand von kleiner  $60^\circ$ , verhält sich das System nach Rückkopplung wie ein schwingungsfähiges PT2-Glied. Andernfalls verhält es sich wie ein nichtschwingungsfähiges PT2-Glied.

Schauen wir uns die zugehörigen Simulationen an:  
*„Immer mit den einfachsten Beispielen anfangen.“ (David Hilbert)*

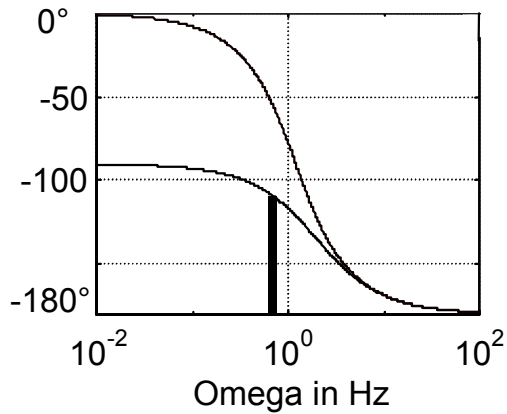
Amplitudengang von  $G_o$  und  $G_w$  in dB



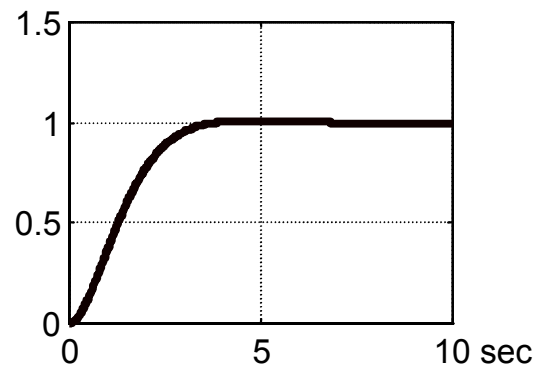
Phasenrand von  $G_o$   
 $= 70^\circ$

Noch kein Überschwingen  
 von  $h(t)$

Phasengang von  $G_o$  und  $G_w$

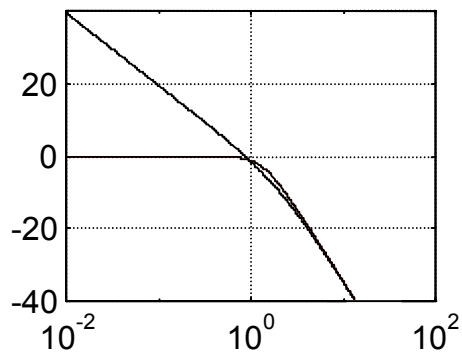


Sprungantwort zu  $G_w$



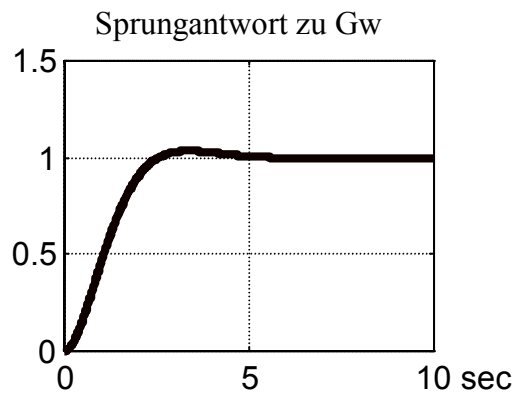
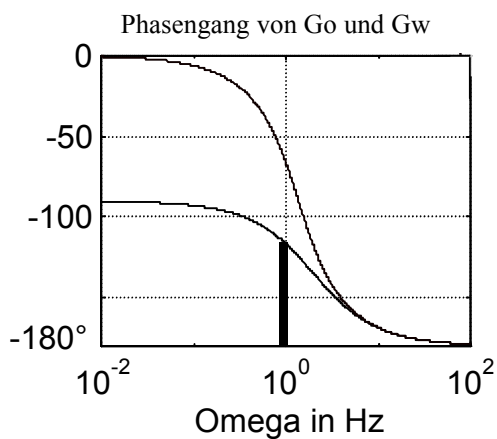
**Bild 6.10:** Offene Schleife ( $= I+PT1$ ), zugehörige Rückkopplung sowie Sprungantwort

Amplitudengang von  $G_o$  und  $G_w$  in dB

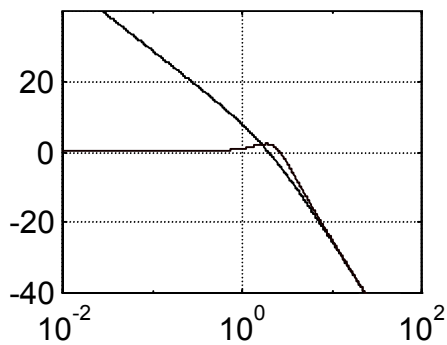


Phasenrand von  $G_o$   
= 60Grad

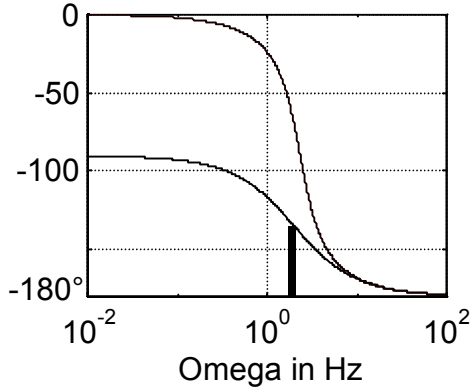
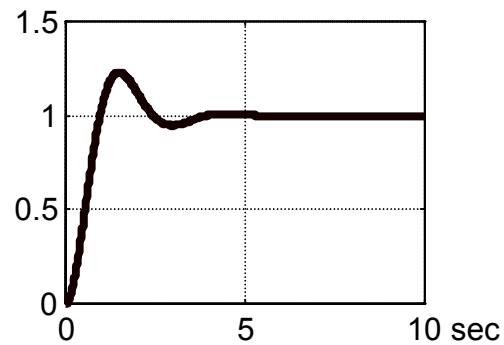
Ungefährer Beginn des  
Überschwingens von  $h(t)$



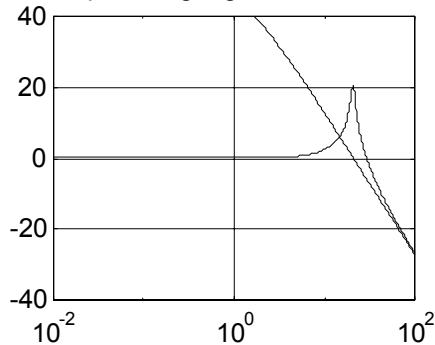
**Bild 6.11:** Die Erhöhung der Schleifenverstärkung (von  $G_o$ ) führt auf eine Verringerung des Phasenrandes von  $G_o$ ...

Amplitudengang von  $G_o$  und  $G_w$  in dB

Phasenrand von  $G_o$   
= 45 Grad

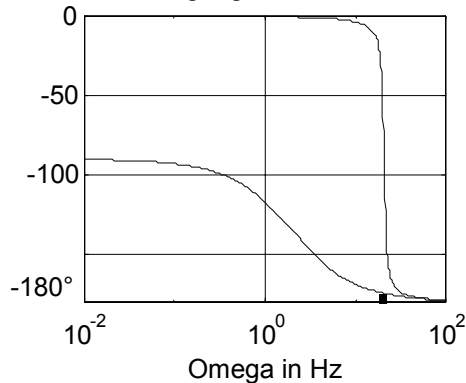
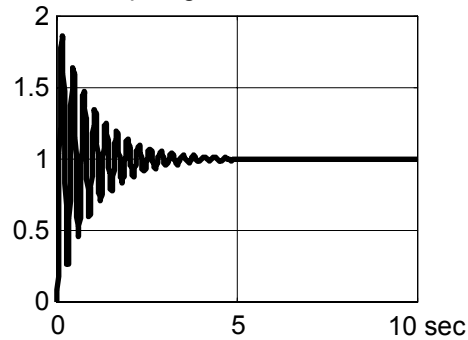
Phasengang von  $G_o$  und  $G_w$ Sprungantwort zu  $G_w$ 

**Bild 6.12:** ...und damit auf eine Erhöhung des Überschwingens der Übergangsfunktion zu  $G_w$ ...

Amplitudengang von  $G_o$  und  $G_w$ 

Phasenrand = 5. Grad

Starkes Überschwingen  
der Sprungantwort zu  $G_w$   
da nur noch eine geringe  
Stabilitätsreserve vorliegt.

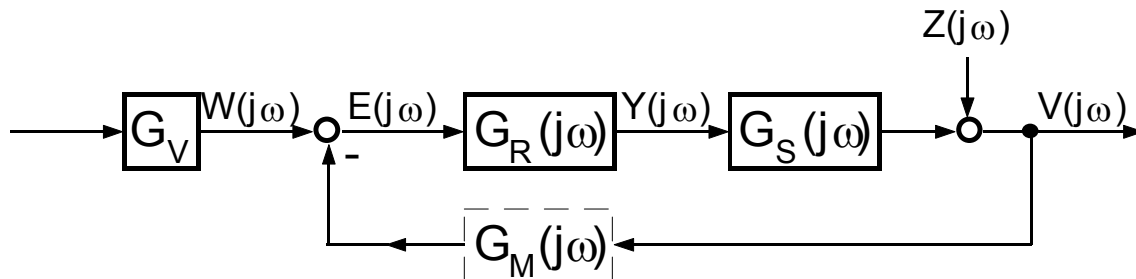
Phasengang von  $G_o$  und  $G_w$ .Sprungantwort zu  $G_w$ 

**Bild 6.13:** ... weil die Stabilitätsreserve ( mit Verkleinerung des Phasenrandes )  
abnimmt.

## 6.3.11.3 Wichtige Ungleichungen und die entscheidenden Folgerungen.

*„In diesem Zeitalter des Überflusses, wo die Fließbänder der sozialisierten militärisch-industriellen Gesellschaft synthetisches Manna auf den Faulen und den Fleißigen, auf den Tölpel und das Genie herabregnen lassen, wird die Gelehrsamkeit nicht untergehen.“  
(Clifford A. Truesdell)*

Wir gehen aus von der nachstehenden Struktur



$$G_O(j\omega) = G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega) \cdot (G_M(j\omega))$$

und setzen  $G_V(s) = G_M(s) = 1$  sowie  $Z = 0$ .

Es gelten folgende wichtige Grobabschätzungen:

- a) für diejenigen  $\omega$ -Werte, wo  $|G_O(j\omega)| \gg 1$  gilt:  $G_W(j\omega) \approx 1$
- b) für diejenigen  $\omega$ -Werte, wo  $|G_O(j\omega)| \ll 1$  gilt:  $G_W(j\omega) \approx G_O(j\omega)$
- c) für diejenigen  $\omega$ -Werte, wo  $|G_O(j\omega)| \approx 1$  gilt:  $G_O(j\omega) \approx ?$

Die Grobabschätzungen und ihre graphischen Interpretationen legen folgenden Sachverhalt nahe:



Das Zeitverhalten des (rückgekoppelten) Regelkreises hängt entscheidend vom Verlauf des Frequenzgangs der offenen Regelschleife in der Umgebung des Durchtretens durch den Einheitskreis  
(bzw. beim BODE-Diagramm: durch die 0dB-Achse) ab.

Die erste entscheidende Folgerung lautet also:



Wenn die Ortskurven der Frequenzgänge von zwei ( völlig voneinander verschiedenen ) offenen Regelschleifen in der Umgebung des Durchtretens durch den Einheitskreis aufeinanderliegen und dort auch noch dieselbe Frequenzbezeichnung tragen, dann haben die beiden Systeme nach Rückkopplung praktisch dasselbe Zeitverhalten.

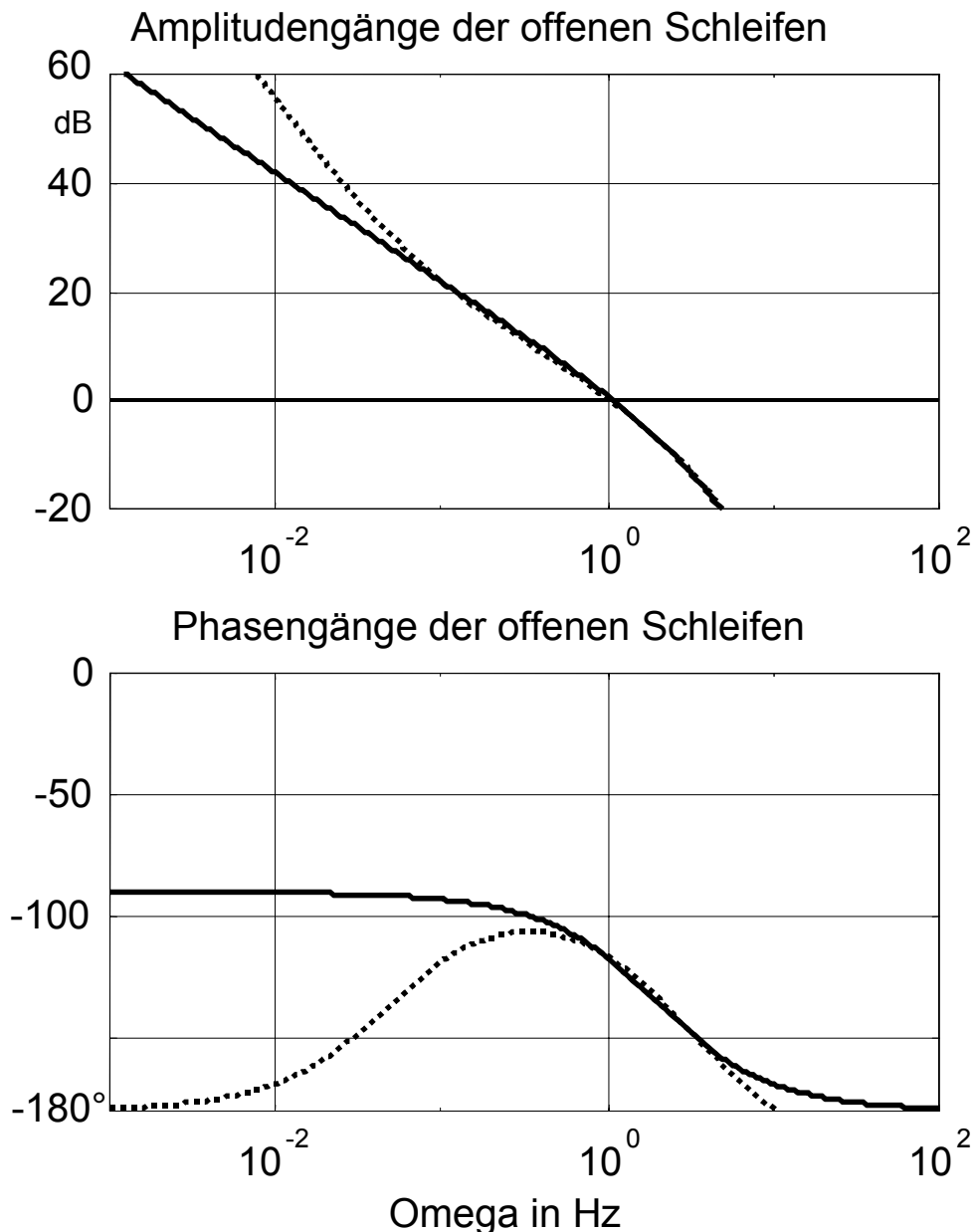
Alternativ: Wenn die BODE-Diagramme, also sowohl Amplituden- wie Phasengänge, von zwei ( völlig voneinander verschiedenen ) offenen Regelschleifen in der Umgebung des Durchtretens durch die 0-dB-Achse aufeinanderliegen, dann haben die beiden Systeme nach Rückkopplung dasselbe Zeitverhalten.

Ein kurzes Rechenbeispiel soll das soeben gesagte verdeutlichen: Wir betrachten die folgenden beiden offenen Regelschleifen – ausgedrückt durch deren Übertragungsfunktionen:

Zwei völlig voneinander verschiedene Übertragungsfunktionen offener Regelschleifen sind z.B.:

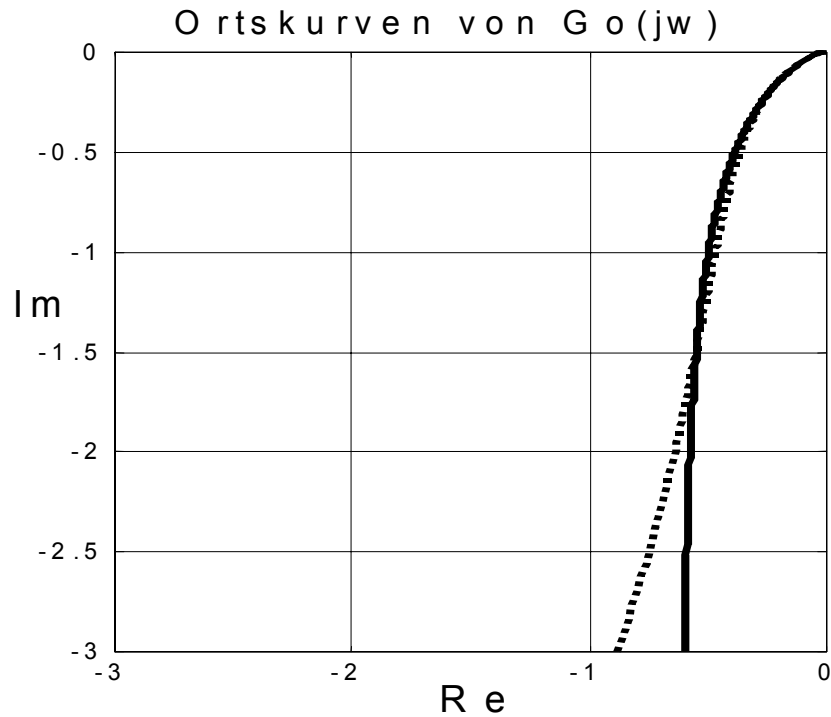
$$G_{O1}(s) = \frac{5}{s^2 + 2 \cdot s} \text{ und } G_{O2}(s) = \frac{300 \cdot s^2 + 465 \cdot s + 22,5}{s^5 + 53,8 \cdot s^4 + 193,6 \cdot s^3 + 180 \cdot s^2}$$

Schauen wir uns einmal die BODE-Diagramme von  $G_{O1}$  und  $G_{O2}$  an:



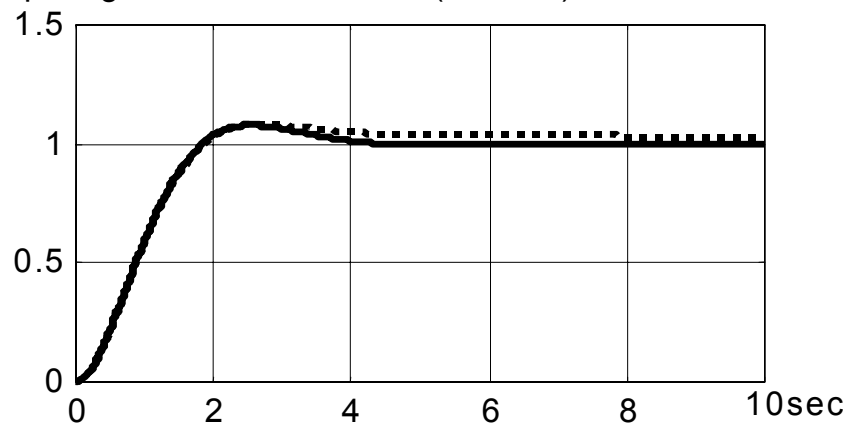
Die Ortskurven von  $G_{O1}$  und  $G_{O2}$  müßten also in der Umgebung des Durchtretens durch den Einheitskreis aufeinanderliegen.

Das bestätigt die nachstehende Skizze:

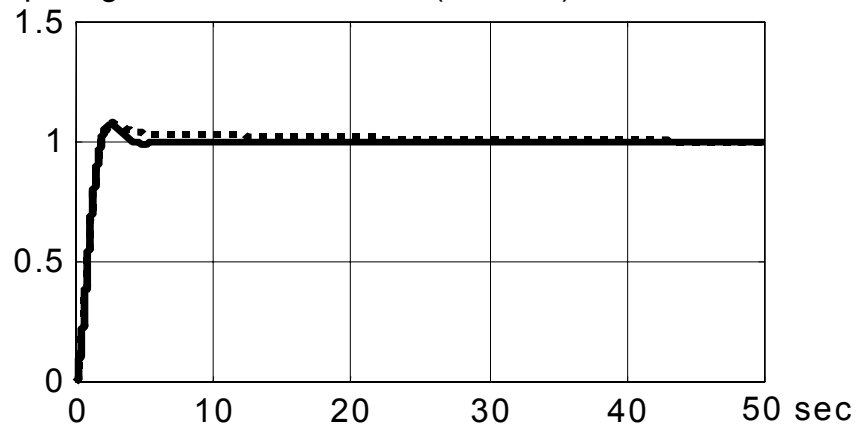


Aufeinanderliegen müssen dann auch die Zeitverläufe – z.B. die Übergangsfunktionen:

Sprungantworten zu  $G_{o1}/(1+G_{o1})$  und  $G_{o2}/(1+G_{o2})$



Sprungantworten zu  $G_{o1}/(1+G_{o1})$  und  $G_{o2}/(1+G_{o2})$



Die zweite entscheidende Folgerung lautet also:



Wenn sich die Ortskurve des Frequenzgangs einer (beliebig „komplizierten“ d.h. auch von beliebig hoher Ordnung) offenen Regelschleife in der Umgebung des Durchtretens durch den Einheitskreis wie ein I+PT1-Glied verhält, dann verhält sich das System nach Rückkopplung wie ein schwingungsfähiges PT2-Glied.

Alternativ: Wenn das BODE-Diagramm einer (beliebig „komplizierten“ d.h. auch von beliebiger Ordnung) offenen Regelschleife in der Umgebung des Durchtretens durch die 0-dB-Achse (also in der Umgebung der Transitkreisfrequenz) dort ein Gefälle von  $-20\text{dB/Dek}$  bis  $-40\text{dB/Dek}$  aufweist und wenn dabei der Phasengang fällt mit einem Phasenrand zwischen  $0^\circ$  und  $60^\circ$ , dann verhält sich das System nach Rückkopplung wie ein schwingungsfähiges PT2-Glied.

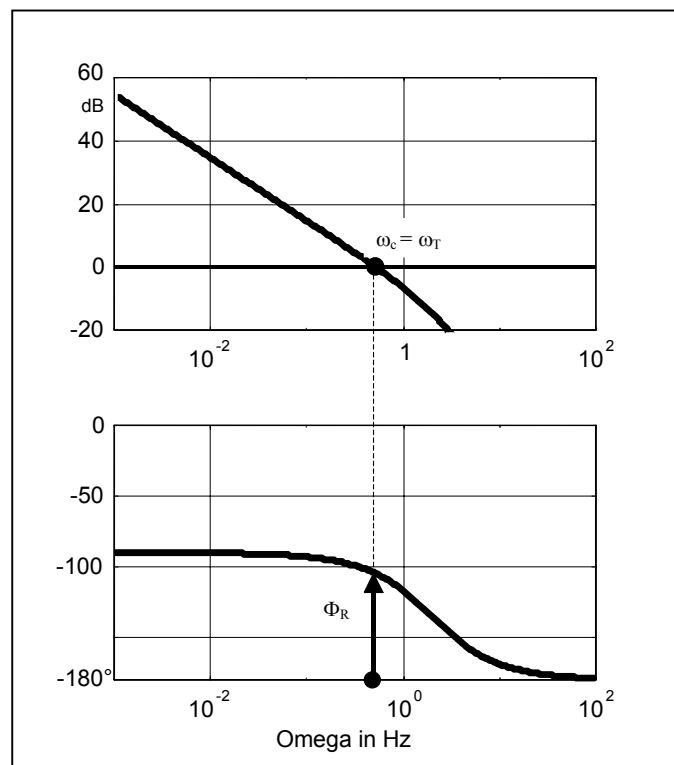
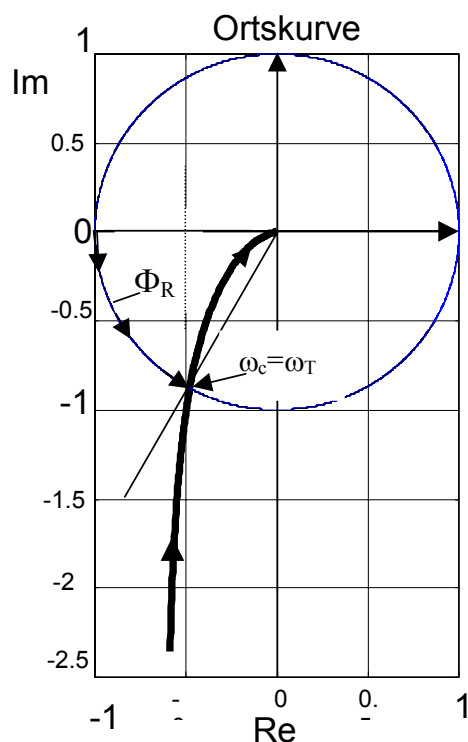
Zur Kennzeichnung des Verlaufs von  $G_O(j\omega)$  in dieser Umgebung bedient man sich folgender - nun schon hinlänglich bekannter - Kenngrößen:

- Phasenrand  $\Phi_r$
- Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  (Transitfrequenz  $\omega_T$ )
- Schleifenverstärkung  $V$

Diese Größen sind zur Wiederholung nachstehend in die beiden Skizzen eingetragen:

in der Ortskurvendarstellung von  $G_O$

... und einmal im BODE-Diagramm von  $G_O$





Unter Verwendung der obigen Kenngrößen kommen wir auf eine ganz allgemeine Entwurfsrichtlinie für die Reglersynthese:



Wenn man eine Regelstrecke allein rückkoppelt, dann liegt das Zeitverhalten der rückgekoppelten Strecke offenbar von deren Durchtrittsfrequenz  $\omega_c = \omega_T$  und Phasenrand  $\Phi_r$  ab. Ist man mit dem Zeitverhalten dieses so rückgekoppelten Systems nicht zufrieden, so trenne man den Kreis wieder auf und schalte zusätzliche Übertragungsglieder vor die Strecke. Diese sollen den Frequenzgang von  $G_S(j\omega)$  so “verbiegen”, daß man eine “günstigere Durchtrittsfrequenz” und einen “günstigeren Phasenrand” hat.

“Günstiger” meint, daß man am Ende ein verbessertes Zeitverhalten des neu entstandenen geschlossenen Regelkreises erhält.

**Übertragungssysteme, die man vor die Regelstrecke schaltet und die den Frequenzgang der offenen Schleife in geeigneter Weise verbiegen, nennt man Regler.**

Mit einzelnen Reglern (und allgemeinen Regelkreisgliedern) beschäftigt sich der Abschnitt 6.3.

*„Die Gelehrten sind die, welche in den Büchern gelesen haben. Die Denker, die Genies, die Welterleuchter und Förderer des Menschengeschlechtes sind aber die, welche unmittelbar im Buche der Welt gelesen haben“ ( Arthur Schopenhauer).*

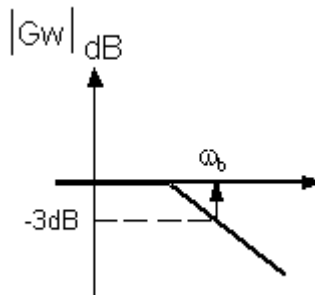
#### 6.4. Formulierung der allgemeinen Forderungen an einen Regelkreis durch Frequenzgänge (man vergleiche mit Kapitel 1.3)

Gutes Folgeverhalten (**ideal**  $v(t) = w(t)$  für alle  $t$ )

$\Rightarrow$  für  $G_W(j\omega)$  bedeutet das:  $G_W(j\omega) = 1$  für alle

$\omega$

**real:**  $G_W(j\omega) = 1$  für einen möglichst großen Frequenzbereich, entsprechend “ $\omega_b$  groß”,  
wenigstens aber sollte  $G_W(0) = 1$  sein.



$$G_W(0) = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \hat{w}, \text{ wenn } w(t) = \hat{w} \cdot \sigma(t)$$

Man sagt: “Der *stationäre Lagefehler* ist 0”

Nachweis:

$$V(s) = G_W(s) \cdot W(s), \text{ falls } w(t) = \hat{w} \cdot \sigma(t) \text{ entsprechend } W(s) = \frac{\hat{w}}{s}$$

$$\text{gilt: } \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot V(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_W(s) \cdot \frac{\hat{w}}{s} = G_W(0) \cdot \hat{w}$$

$$G_W(j\omega) \stackrel{!}{=} 1 \text{ für möglichst hohe Frequenzen } (\omega = 0 \dots \omega_b)$$

führt auf den Reglerentwurf nach dem *Betragsoptimum*

**Reglerentwurf nach dem Betragsoptimum:**  
**gutes Folgeverhalten, aber kein so gutes Störverhalten**

$\Rightarrow$  für  $G_O(j\omega)$  bedeutet das:  $|G_O(j\omega)| \rightarrow \infty \forall \omega$

$$\text{klar, da aus } G_W(j\omega) = \frac{G_O(j\omega)}{1 + G_O(j\omega)}; \quad G_O(j\omega) = \frac{G_W(j\omega)}{1 - G_W(j\omega)} \text{ folgt!}$$

**real:**  $G_O(j\omega) \rightarrow \infty$  für einen möglichst großen Frequenzbereich, entsprechend “ $\omega_c$  groß”,  
wenigstens aber sollte  $|G_O(0)| = \infty$  sein.

So einen Fall zeigt die nachstehende Skizze

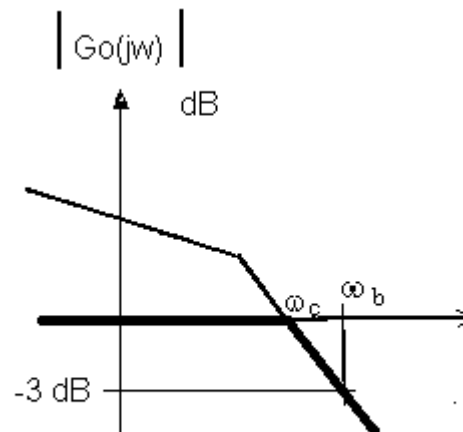
In der nebenstehenden Skizze  
Ist  $G_o(j\omega)$  dünn und  $G_w(j\omega)$   
dick eingezeichnet.

$\omega_c$  – Durchtrittskreisfrequenz  
( = Transitzkreisfrequenz)  
der offenen Regelschleife

$\omega_b$  – Bandbreitenkreisfrequenz  
des geschlossenen  
Kreises

Es gilt (als Faustformel)

$$\frac{\omega_b}{\omega_c} \approx 1,6$$



Dann ist der stationäre Lagefehler = 0; falls nicht schon für die Strecke gilt:  $|G_s(0)| = \infty$ ,  
so verwende man einen I, PI, PID oder PID-T<sub>1</sub>-Regler.

Andere Betrachtungen bilden den Ausgangspunkt für den Reglerentwurf nach dem *Symmetrischen Optimum*. Hier versucht man die Frequenzkennlinien der offenen Schleife (mit Unterstützung eines Reglers ) so zu verbiegen, daß in der Umgebung des Durchtretens durch die 0dB-Achse ein Amplitudengefälle von  $-20\text{dB/Dekade}$  bis  $-40\text{dB/Dekade}$  zustande kommt.

**Reglerentwurf nach dem Symmetrischen Optimum:  
gutes Störverhalten, aber kein so gutes Folgeverhalten**

Eine weitere Grundforderung an einen Regelkreis lautete:

Gutes Störunterdrückung (**ideal**  $v(t)$  = unabhängig von  $z(t)$  für alle  $t$ )

$\Rightarrow$  für  $G_z(j\omega)$  bedeutet das:  $G_z(j\omega) = 0$  für alle  $\omega$

**real:**  $G_z(j\omega) = 0$  für einen möglichst großen Frequenzbereich, entsprechend “ $\omega_b$  groß”,  
wenigstens aber sollte  $G_z(0) = 1$  sein.

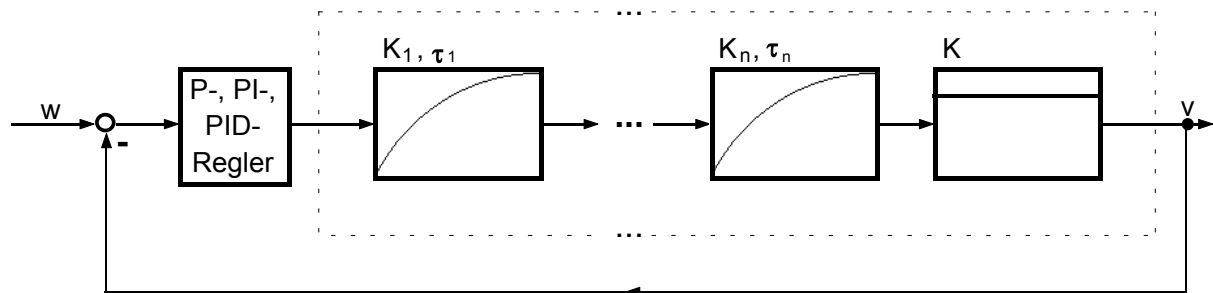
Da wir hier nur Regelsysteme mit 1 Freiheitsgrad betrachten, liegt ( leider! ) bei Festlegung des Führungsübertragungsverhaltens auch schon das Störübertragungsverhalten mit fest. Wir können lediglich nachträglich überprüfen, ob die Störunterdrückung genügend erfüllt wird. Oder wir können einen Reglerentwurf machen der eine gute Störunterdrückung liefert – dann müssen wir uns mit dem sich dabei ergebenden Führungsverhalten abfinden.

### 6.5. Reglereinstellung nach dem Betragsoptimum

„Wir müssen nur eine bessere Art der Vorbereitung finden“, sagte Dr. Karl, um Sachlichkeit bemüht. Hera Lind (DasWeibernetz)

Voraussetzung:

- Strecke hat nur stabile, reelle Pole
- keine konjugiert komplexen Pole
- keine Nullstellen



Bisheriger Kenntnisstand:

**Reglereinstellung nach dem Betragsoptimum bedeutet:**  
**langsame Zeitkonstanten durch Reglernulstellen kürzen und Regler so einstellen,**  
**daß man „ $|\operatorname{Re}| = |\operatorname{Im}|$ “ und damit  $\ddot{u} = 4\%$  erhält.**

Daß die Reglereinstellung nach dem Betragsoptimum ggf. differenzierter gesehen werden muß, zeigt die nachfolgende Herleitung:

$$\text{Strecke: } G_S(s) = \frac{K}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots} = \frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots}$$

$$\text{Abkürzung: } A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

$$\text{Der Regler habe die Übertragungsfunktion } G_R(s) = \frac{r_0 + r_1 s + r_2 s^2}{2s}$$

$$\text{Abkürzung: } G_R(s) = \frac{R(s)}{2s}$$

$$\text{PI - Regler: } G_R(s) = K_P \cdot \frac{1 + sT_N}{sT_N} = \frac{2K_P}{T_N} \cdot \frac{1 + sT_N}{2s} = \frac{\overbrace{2K_P}^{r_0} + \overbrace{s \cdot 2K_P}^{r_1}}{T_N \cdot 2s}$$

$$|G_W(j\omega)| = \left| \frac{G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega)}{1 + G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega)} \right| = \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega)}} \right| = \left| \frac{1}{1 + \frac{2j\omega \cdot A(j\omega)}{R(j\omega)}} \right| \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{2j\omega \cdot A(j\omega)}{R(j\omega)}} \cdot \left( \frac{1}{1 + \frac{2j\omega \cdot A(j\omega)}{R(j\omega)}} \right) = 1$$

Zur Erinnerung:  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2} \quad ; \quad \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad ; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Ist  $P(j\omega)$  ein Polynom in "  $j\omega$  " mit reellen Koeffizienten, dann gilt:  $\overline{P(j\omega)} = P(-j\omega)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{2j\omega \cdot A(j\omega)}{R(j\omega)}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-2j\omega) \cdot A(-j\omega)}{R(-j\omega)}} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + 4 \cdot \frac{\omega^2 \cdot A(j\omega) \cdot A(-j\omega) + \frac{1}{2} j\omega \cdot A(j\omega) \cdot R(-j\omega) - \frac{1}{2} j\omega \cdot A(-j\omega) \cdot R(j\omega)}{R(j\omega) \cdot R(-j\omega)}} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \omega^2 \cdot A(j\omega) \cdot A(-j\omega) + \frac{1}{2} j\omega \cdot A(j\omega) \cdot R(-j\omega) - \frac{1}{2} j\omega \cdot A(-j\omega) \cdot R(j\omega) \stackrel{!}{=} 0$$

Nun ist:

$$A(j\omega) = a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots$$

$$R(j\omega) = r_0 + r_1(j\omega) + r_2(j\omega)^2 + \dots$$

oben eingesetzt erhalten wir:

$$0 \stackrel{!}{=} (a_0^2 - r_0 a_1 + r_1 a_0) \omega^2 + (-2a_0 a_2 + a_1^2 + r_0 a_3 - r_1 a_2 + r_2 a_1) \omega^4$$

$$+ (2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 + a_2^2 - r_0 a_5 + r_1 a_4 - r_2 a_3) \omega^6 + \dots$$

Man wähle  $r_0, r_1, r_2$  so, daß gilt:

$$a_0^2 - r_0 a_1 + r_1 a_0 = 0 \quad (\text{Term von } \omega^2)$$

$$a_1^2 - 2a_0 a_2 + r_0 a_3 - r_1 a_2 + r_2 a_1 = 0 \quad (\text{Term von } \omega^4)$$

$$a_2^2 + 2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 - r_0 a_5 + r_1 a_4 - r_2 a_3 = 0 \quad (\text{Term von } \omega^6)$$

Angenommen, wir haben einen *PI-Regler* ( $r_2 = 0$ )

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -a_1 & a_0 \\ a_3 & -a_2 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix}}_L = \underbrace{\begin{pmatrix} -a_0^2 \\ 2a_0 a_2 - a_1^2 \end{pmatrix}}_L$$

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1 a_2 - a_0 a_3} \cdot \begin{pmatrix} -a_2 & -a_0 \\ -a_3 & -a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_0^2 \\ -a_1^2 + 2a_0 a_2 \end{pmatrix}$$

Zusammenstellung der Ergebnisse:

#### PI-Regler dimensioniert nach dem Betragsoptimum:

$$r_0 = \frac{a_0 \cdot (a_1^2 - a_0 a_2)}{a_1 a_2 - a_0 a_3} \quad ; \quad r_1 = \frac{a_1 \cdot (a_1^2 - a_0 a_2)}{a_1 a_2 - a_0 a_3} - a_0 \quad (6.16)$$

#### PID-Regler dimensioniert nach dem Betragsoptimum:

$$r_0 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} -a_0^2 & a_0 & 0 \\ -a_1^2 + 2a_0 a_2 & -a_2 & a_1 \\ -a_2^2 - 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 & a_4 & -a_3 \end{vmatrix} ; r_1 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} -a_1 & -a_0^2 & 0 \\ a_3 & -a_1^2 + 2a_0 a_2 & a_1 \\ -a_5 & -a_2^2 - 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 & -a_3 \end{vmatrix}$$

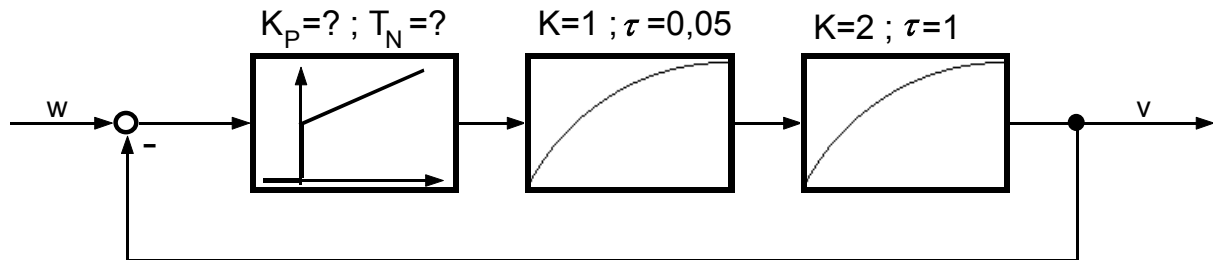
$$r_2 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} -a_1 & a_0 & -a_0^2 \\ a_3 & -a_2 & -a_1^2 + 2a_0 a_2 \\ -a_5 & a_4 & -a_2^2 - 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 \end{vmatrix} ; D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 \\ -a_5 & a_4 & -a_3 \end{vmatrix} \quad (6.17)$$

zur Erinnerung: *Cramersche Regel*

$$X_i = \frac{D_i}{D} \quad ; \quad D = \det(A) \quad ; \quad D_1 = \begin{vmatrix} L_1 & A_{12} \\ L_2 & A_{22} \end{vmatrix} \quad ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & L_1 \\ A_{12} & L_2 \end{vmatrix}$$

**Beispiel:**

Gegeben ist das nachfolgende System mit PI-Regler und zwei PT1-Gliedern.  
Gesucht sind  $K_P$  und  $T_N$  des PI-Reglers.



$$\text{PI - Regler: } G_R(s) = K_P \cdot \frac{1 + sT_N}{sT_N} = \frac{r_0 + r_1 s}{2s}$$

$$\text{Strecke: } G_S(s) = \frac{\overbrace{2}^{1.\text{PT1-Glied} \times 2.\text{PT1-Glied}}}{(1 + 0,05s)(1 + s)} = \frac{2}{1 + 1,05s + 0,05s^2} = \frac{1}{\underbrace{0,5}_{a_0} + \underbrace{0,525s}_{a_1} + \underbrace{0,025s^2}_{a_2}}$$

Berechnung von  $r_0$ ,  $r_1$  mit Formeln für den PI-Regler:

$$r_0 = \frac{0,5 \cdot (0,525^2 - 0,5 \cdot 0,025)}{0,525 \cdot 0,025 - 0,5 \cdot 0} = 10 \quad ; \quad r_1 = \frac{0,525 \cdot (0,525^2 - 0,5 \cdot 0,025)}{0,525 \cdot 0,025} - 0,5 = 10$$

$$G_R(s) = 2 \cdot \left( \frac{K_P}{T_N} \right) \cdot \frac{1 + sT_N}{2s} \Rightarrow r_0 = \frac{2K_P}{T_N} \quad ; \quad r_1 = 2K_P$$

$$\left. \begin{array}{l} 2K_P = 10 \\ \frac{2K_P}{T_N} = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} K_P = 5 \\ T_N = 1 \end{array}$$

**Interpretation dieses Ergebnisses:**

$$G_W(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{5 \cdot \frac{1+s}{s} \cdot \frac{2}{(1+0,05s)(1+s)}}{1 + 5 \cdot \frac{1+s}{s} \cdot \frac{2}{(1+0,05s)(1+s)}} = \frac{10}{0,05s^2 + s + 10}$$

$$G_W(s) \text{ hat Polstellen bei : } s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2}}{0,1} = -10 \pm 10j$$

Man sieht in diesem Fall, daß sich langsame Streckenpole verkürzen und daß für den geschlossenen Regelkreis ein dominierendes Polpaar mit  $|\operatorname{Re}|=|\operatorname{Im}|$  erzeugt wird.  
Bei der Einstellung nach dem Betragsoptimum ergibt sich hier ein Überschwinger von 4%.

### Wann wird welcher Regler verwendet wenn das Betragsoptimum zu Grunde gelegt werden soll?

- |  |               |   |
|--|---------------|---|
| a) eine große Zeitkonstante            | $\Rightarrow$ | PI-Regler   |
| b) zwei große Zeitkonstanten           | $\Rightarrow$ | PID-Regler  |
| c) drei oder mehr große Zeitkonstanten | $\Rightarrow$ | PID-Regler (nach Formel einstellen.<br>Spätestens hier gilt dann<br>„ $\ddot{u} = 4\%$ “ und „ $\operatorname{Re} = \operatorname{Im}$ “ nicht mehr.) |

Zur Unterscheidung von „großen“ und „kleinen Zeitkonstanten“ betrachte man:

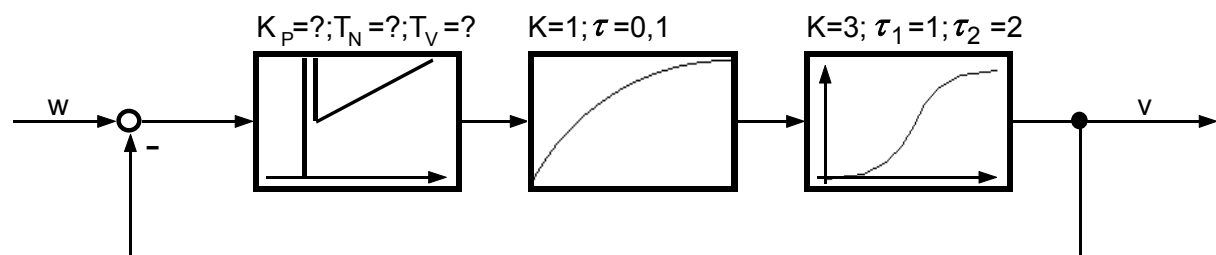
$$G_S(s) = \frac{K_S}{\prod_{v=1}^n (1 + s\tau_v) \cdot \prod_{\mu=1}^m (1 + s\tilde{\tau}_\mu)}$$

wobei  $\tau_1 \gg \tilde{\tau}_1 + \dots + \tilde{\tau}_m$ , ...,  $\tau_n \gg \tilde{\tau}_1 + \dots + \tilde{\tau}_m$ .

$\tau_1, \dots, \tau_n$  sind „große“ Zeitkonstanten;  $\tilde{\tau}, \dots, \tilde{\tau}_m$  sind „kleine“ Zeitkonstanten.

### Weiteres Beispiel:

Gegeben ist das nachfolgende System mit PID-Regler, einem PT1- und einem PT2-Glied.  
Gesucht sind  $K_P$ ,  $T_N$  und  $T_V$  des PID-Reglers.



PID - Regler:  $G_R(s) = K_P \cdot \frac{1 + sT_N + s^2T_N T_V}{sT_N}$  (additive Form)

oder:  $G_R(s) = \tilde{K}_P \cdot \frac{(1 + s\tilde{T}_N)(1 + s\tilde{T}_V)}{s}$  (multiplikative Form)



**Umwandlungsformeln:**

Umwandlung zwischen additiver und multiplikativer Form:

$$K_P = \tilde{K}_P \cdot T_N \quad ; \quad T_N = \tilde{T}_V + \tilde{T}_N \quad ; \quad T_V = \frac{\tilde{T}_N \cdot \tilde{T}_V}{T_N}$$

Ausgehend von der multiplikativen Form verlange man:

$$\tilde{T}_N = 2; \tilde{T}_V = 1 \Rightarrow \text{damit lassen sich die langsamen Pole der Strecke wegekürzen } (\tau_1 = 1; \tau_2 = 2)$$

Es verbleibt:

$$L(s) = \frac{\tilde{K}_P}{s} \cdot (1 + 2s) \cdot (1 + s) \cdot \frac{3}{(1 + 0,1s)(1 + 2s)(1 + s)}$$

$$T(s) = \frac{\frac{3\tilde{K}_P}{s(1 + 0,1s)}}{1 + \frac{3\tilde{K}_P}{s(1 + 0,1s)}} = \frac{3\tilde{K}_P}{0,1s^2 + s + 3\tilde{K}_P}$$

$$\text{die Pole von } T(s) \text{ liegen bei: } s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 1,2\tilde{K}_P}}{0,2}$$

$\tilde{K}_P$  wird jetzt so festgelegt, daß  $|\text{Re}| = |\text{Im}|$

$$\Rightarrow 1 - 1,2\tilde{K}_P = -1 \Rightarrow \tilde{K}_P = \frac{2}{1,2} = \frac{5}{3}$$

Nun gilt:  $\tilde{T}_N + \tilde{T}_V = T_N = 3 \text{ sec}$

$$\tilde{T}_N \cdot \tilde{T}_V = T_N \cdot T_V = 2 \Rightarrow T_V = \frac{2}{3} \text{ sec}$$

$$K_P = \tilde{K}_P \cdot T_N = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5$$

**Ergebnis:**

Der PID-Regler hat folgende Werte:

$$K_P = 5 \quad ; \quad T_N = 3 \text{ sec} \quad ; \quad T_V = \frac{2}{3} \text{ sec}$$

Wegen der Einstellung nach dem Betragsoptimum ergibt sich ein Überschwinger von 4%.

**Die Summenzeitkonstante**

Regelstrecke:  $G_S(s) = \frac{K_S}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\cdots(1+s\tau_n)}$

große Zeitkonstante  $\tau_1 \gg \tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_n$

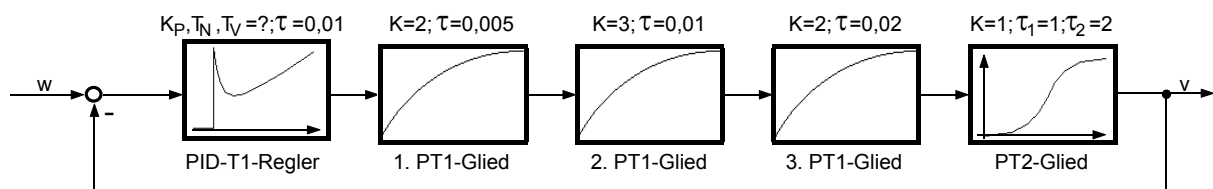
Setze dann  $\tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_n = \tau_\Sigma$  - Summenzeitkonstante

$$G_S(s) \approx \frac{K_S}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_\Sigma)}$$

$\tau_\Sigma$  - Summenzeitkonstante

**Beispiel:**

Der PID-T1-Regler im nachfolgenden System ist nach dem Betragsoptimum auszulegen.

**Lösung:**

$$\tau_1 = 1 \Rightarrow \tilde{T}_v = 1; \quad \tau_2 = 2 \Rightarrow \tilde{T}_N = 2;$$

Für den Reglerentwurf fasse man die “kleinen Zeitkonstanten” zur Summenzeitkonstanten zusammen.

$$\tau_{\Sigma} = \underbrace{0,01 \text{ sec}}_{\text{PT1-Anteil des Reglers}} + \underbrace{0,005 \text{ sec}}_{\text{1. PT1-Glied}} + \underbrace{0,01 \text{ sec}}_{\text{2. PT1-Glied}} + \underbrace{0,02 \text{ sec}}_{\text{3. PT1-Glied}} \Rightarrow \tau_{\Sigma} = 0,045 \text{ sec}$$

$$\text{Strecke: } G_S(s) \approx \frac{\overbrace{12}^{\text{Produkt der K-Terme}}}{\underbrace{(1+s)(1+2s)}_{\text{große Zeitkonstanten}} \underbrace{(1+0,045s)}_{\text{Summenzeitkonstante}}}$$

$$\text{Regler: } G_R(s) = \tilde{K}_p \cdot \frac{(1+s)(1+2s)}{s}$$

$$L(s) = G_S(s) \cdot G_R(s) = \frac{12\tilde{K}_p}{s} \cdot \frac{1}{1+0,045s}$$

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{12\tilde{K}_p}{0,045s^2 + s + 12\tilde{K}_p} \quad \text{mit } s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2,16\tilde{K}_p}}{2 \cdot 0,045}$$

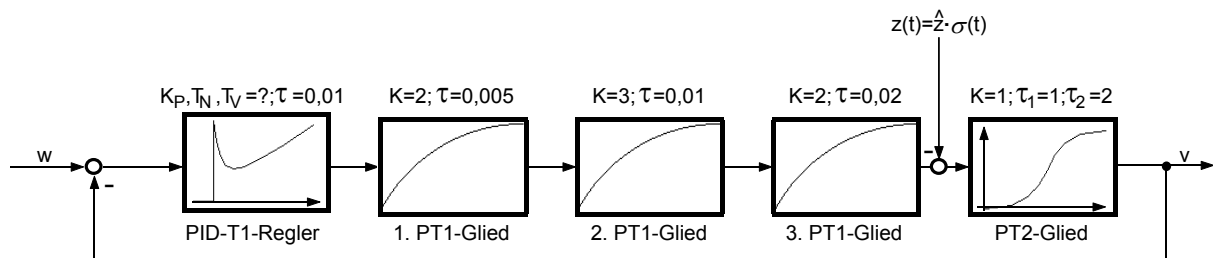
$$\text{mit } |\operatorname{Re}| = |\operatorname{Im}| \Rightarrow -1 = 1 - 2,16\tilde{K}_p \Rightarrow \tilde{K}_p = 0,93 \Rightarrow s_{1,2} = -11,11 \pm 11,11j$$

mit den Umwandlungsformeln ergibt sich als Ergebnis :

$$K_p = 2,79; T_N = 3 \text{ sec}; T_V = 0,66 \text{ sec}$$

### Fortführung des Beispiels:

An der Strecke greife nun eine Störung in der bezeichneten Form an.  
Man berechne die Störübertragungsfunktion  $T_d(s)$ .

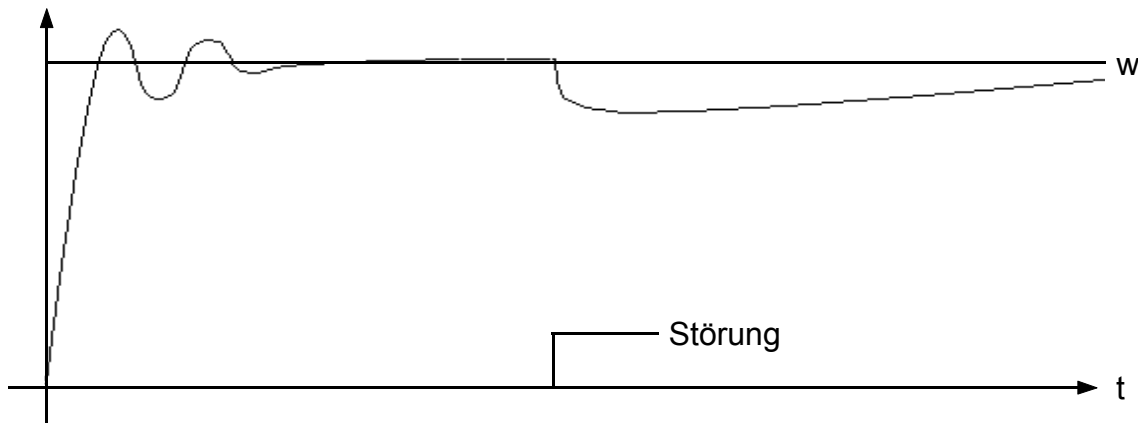


Lösung:

$$G_Z(s) = \frac{-\frac{1}{(1+s)(1+2s)}}{1 + \frac{12 \cdot 0,93 \cdot (1+s)(1+2s)}{s(1+s)(1+2s)(1+0,045s)}} = -\frac{1}{(1+s)(1+2s) \left( 1 + \frac{12 \cdot 0,93}{s(1+0,045s)} \right)}$$

$$G_Z(s) = -\frac{s(1+0,045s)}{\underbrace{(1+s)(1+2s)}_{\substack{\text{gro\ss e} \\ \text{Zeitkonstanten}}}(0,045s^2 + s + 11,16)}$$

Die großen Streckenzeitkonstanten treten bei einer Störung wieder auf, deshalb hat das Betragsoptimum ein schlechtes Störverhalten.



Das Bild zeigt deutlich, daß eine Störung nach Erreichen des eingeschwungenen Zustandes nur langsam kompensiert wird.

Wenn das Störübertragungsverhalten im Vordergrund steht, wird deshalb besser das Symmetrische Optimum verwendet.

*„Ich habe überhaupt keine Hoffnung mehr in die Zukunft unseres Landes, wenn einmal unsere Jugend die Männer von morgen stellt. Unsere Jugend ist unerträglich, unverantwortlich und entsetzlich anzusehen.“ (Aristoteles, 384-322 v. Chr.)*

**Weiteres Beispiel:**

Strecke:  $G_S(s) = \frac{(1+s)}{s(1+0,1s)(1+5s)}$

Hier ist die Verwendung eines PI- oder PID-Reglers ungünstig, da die Strecke bereits einen Pol bei  $s=0$  besitzt.

Statt dessen kann man einen Regler vorschlagen, der die "langsame Polstelle" bei  $s=-0,2$  und die Nullstelle bei  $s=-1$  herauskürzt.

Die Reglerverstärkung ist dann soweit aufzudrehen, daß sich für das Regelsystem  $\ddot{u}=4\%$  einstellt.

**Lösung:**

Regler:  $G_R(s) = K_P \cdot \frac{(1+5s)}{(1+s)} \Rightarrow \text{PD - T1 - Regler}$

Vergleicht man  $G_R(s)$  mit  $G_S(s)$  so sieht man deutlich, daß sich bei der Multiplikation die Terme  $(1+s)$  und  $(1+5s)$  wie gewünscht herauskürzen.

$\ddot{u}=4\%$  bedeutet, daß  $|\text{Re}|=|\text{Im}|$  und mit dieser Beziehung kann dann  $K_P$  berechnet werden.

**Ergebnis:**  $K_P=2,525$ ;  $T_V=5\text{sec}$ ;  $\tau=1\text{sec}$

## 6.6. Das Symmetrische Optimum

Das Symmetrische Optimum kürzt Polstellen nicht heraus, daher hat es ein schlechteres Folgeverhalten, jedoch ein gutes Störverhalten.

Das Symmetrische Optimum gilt nur für folgenden Streckentyp:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{\prod_{v=1}^n (1 + s\tau_v) \cdot \prod_{\mu=1}^m (1 + s\tilde{\tau}_\mu)} \quad \text{mit } \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \gg \underbrace{\tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2 + \dots + \tilde{\tau}_m}_{=: \tau_\Sigma}$$

Der Ansatz für den Regler lautet:

$$G_R(s) = \frac{K_R}{s} \cdot (1 + s\tau_R)^n$$

### Formeln für den Reglerentwurf nach dem Symmetrischen Optimum:

allgemeiner Fall:

Strecke:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{\prod_{v=1}^n (1 + s\tau_v) \cdot \prod_{\mu=1}^m (1 + s\tilde{\tau}_\mu)}$$

Regler:

$$K_R = \frac{1}{2K_S \cdot \tau_\Sigma} \cdot \frac{\prod_{v=1}^n \tau_v}{(4n\tau_\Sigma)^n}$$

$$\tau_R = 4n\tau_\Sigma$$

spezieller Fall:  $n = 1 \Rightarrow$  PI - Regler

Strecke:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{(1 + s\tau_1) \cdot \prod_{\mu=1}^m (1 + s\tilde{\tau}_\mu)}$$

Regler:

$$K_R = \frac{\tau_1}{8K_S \cdot \tau_\Sigma^2}$$

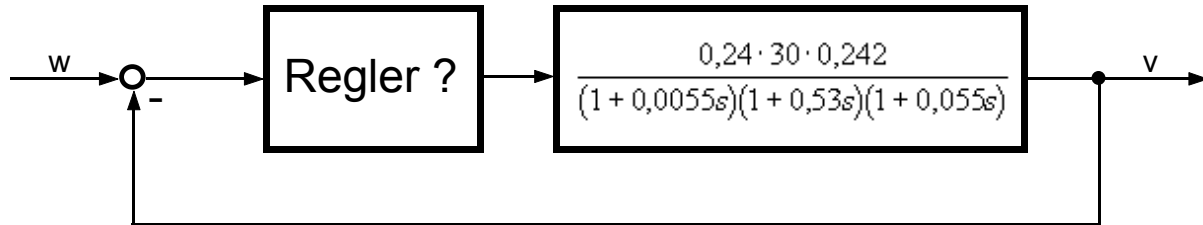
$$\tau_R = 4\tau_\Sigma$$

**(6.18)**

spezieller Fall:  $n = 2 \Rightarrow$  PID - Regler

**Beispiel:**

Um welchen Reglertyp handelt es sich in dem nachfolgenden System?  
Berechnen Sie diesen Regler nach dem Symmetrischen Optimum!

**Lösung:**

Es handelt sich hierbei um einen *PI-Regler*, da wir bereits gelernt haben, daß bei nur einer großen Zeitkonstante (hier:  $\tau=0,53\text{sec}$ ) ein solcher Reglertyp verwendet wird.

Die Berechnung des PI-Reglers erfolgt nun nach den Formeln für das Symmetrische Optimum:

PI-Regler:  $n=1$

$$G_R(s) = K_R \cdot \frac{1 + s\tau_R}{s}$$

$$K_S = 0,24 \cdot 30 \cdot 0,242 = 1,7424$$

$$\tau_\Sigma = 0,0055\text{sec} + 0,055\text{sec} = 0,0605\text{sec}$$

$$\tau_R = 4\tau_\Sigma = 0,24\text{sec}$$

$$K_R = \frac{\tau_1}{8K_S \cdot \tau_\Sigma^2} = \frac{0,53}{8 \cdot 1,7424 \cdot (0,0605)^2} = 10,39$$

$$\Rightarrow G_R(s) = 10,39 \cdot \frac{1 + 0,24s}{s}$$

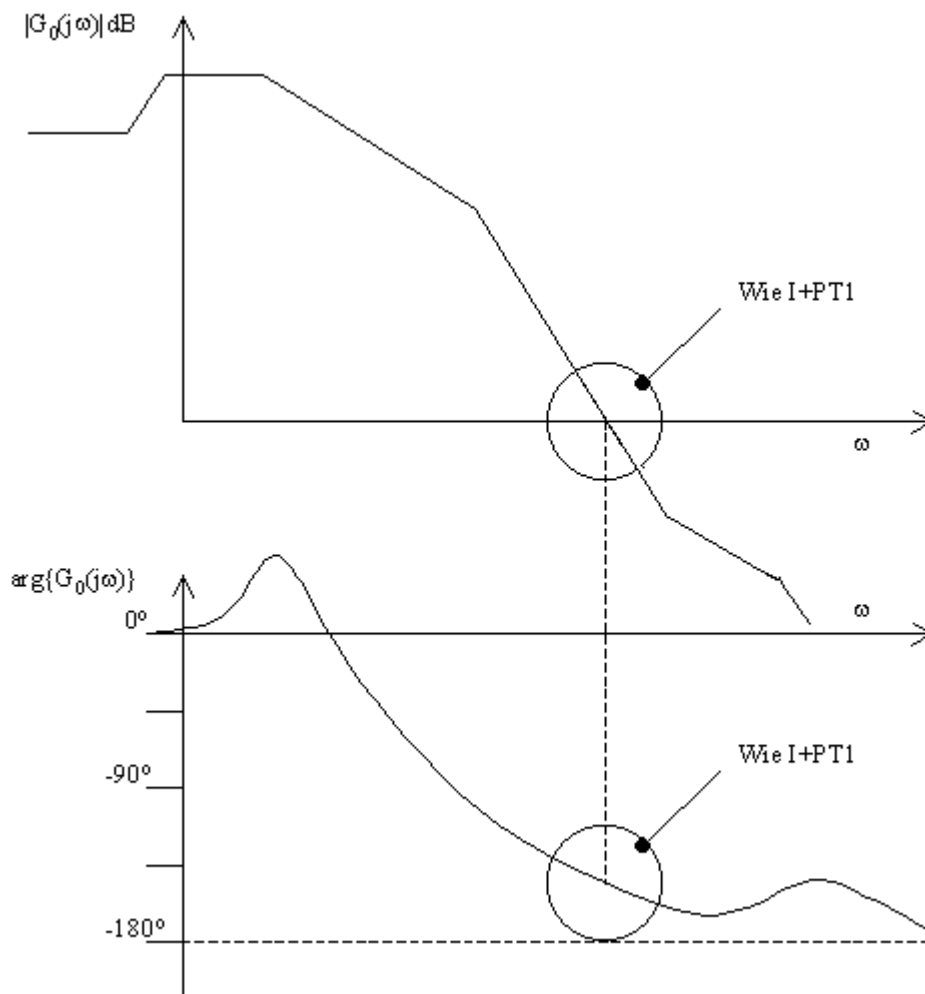
*„Unsere Jugend ist heruntergekommen und zuchtlos. Die jungen Leute hören nicht mehr auf ihre Eltern. Das Ende der Welt ist nahe.“ (Keilschrifttext aus Ur um 2000 v. Chr.)*

## 7. Reglersynthese mittels FKL-Verfahren

„Alle wissen nichts“ (Erich Mielke)

### 7.2 Der Grundgedanke dieses Syntheseverfahrens

Man betrachte das nachstehende Bild und erinnere sich an 6.3.11.3 ( Wichtige Ungleichungen und die entscheidenden Folgerungen). Dort hatten wir eine „zweite entscheidende Folgerung“ formuliert.



**Bild 7.1: Prinzipskizze des BODE-Diagramms einer möglichen offenen Regelschleife**

Der Grundgedanke ist folgender:

- Bereits in 6.3.11 wurde nachgewiesen: Ein I-Glied und ein  $PT_1$ -Glied als Bestandteile einer offenen Regelschleife wirken sich nach Rückkopplung (also als Regelsystem) wie ein nicht schwingungsfähiges bzw. schwingungssfähiges  $PT_2$ -Glied aus .



Es läßt sich zeigen:

Regelkreis schwingungsfähig/

Phasenrand der offenen Schleife

$$\varphi_R < 60^\circ$$

$\hat{=}$

nicht schwingungsfähig

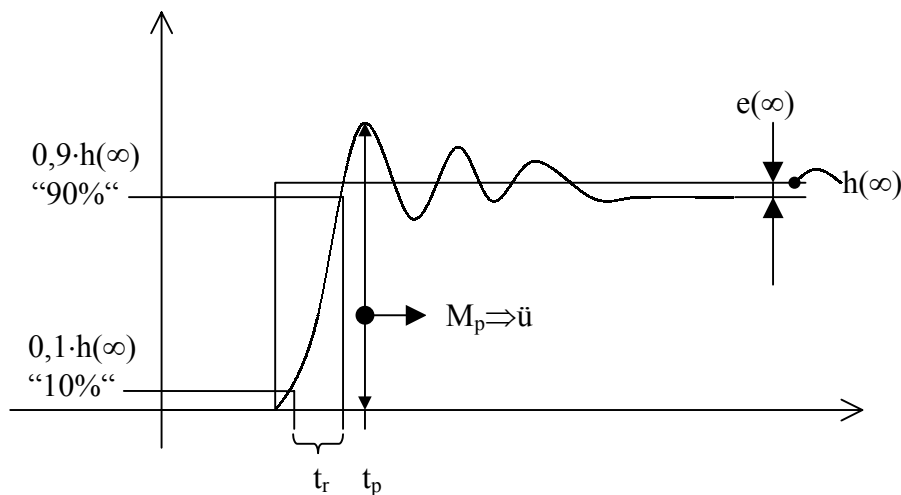
$$\varphi_R > 60^\circ$$

- Weiterhin wurde gezeigt (vgl 6.1):  
„Das Zeitverhalten des (rückgekoppelten) Regelkreises hängt entscheidend vom Verlauf des Frequenzganges der offenen Regelschleife in der Umgebung des Durchtretens durch den Einheitskreis (bzw. beim BODE-Diagramm: durch die 0dB-Achse) ab.“

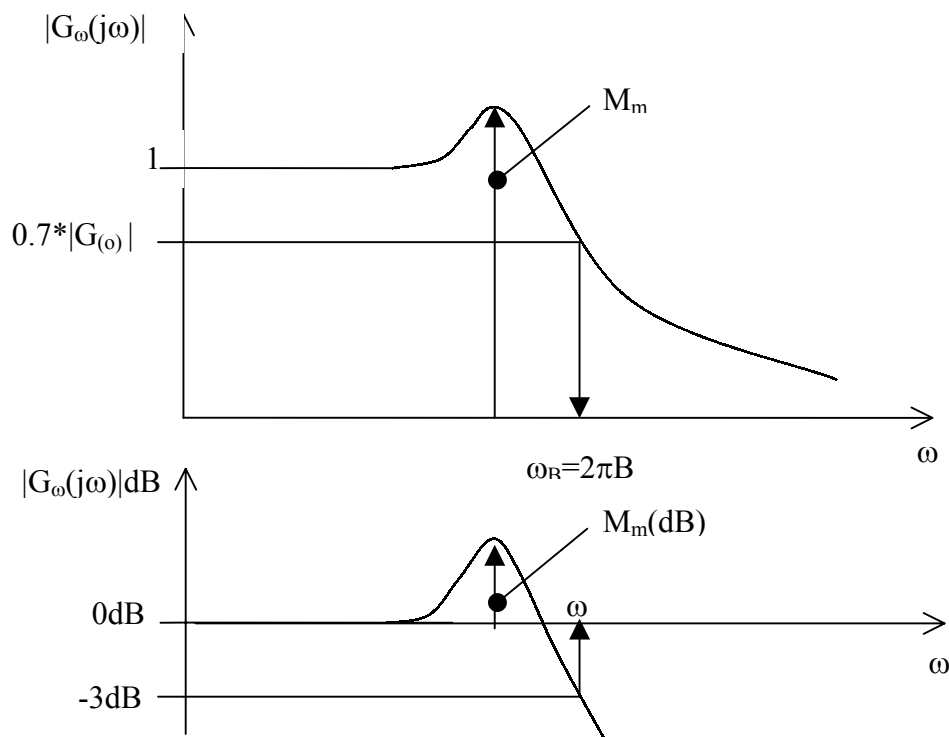
- Zusammengefaßt heißt dies:

Wenn die offene Regelschleife sich in der Umgebung des Durchtretens durch den Einheitskreis (bzw. beim durch die 0dB-Achse) wie ein  $I+PT_1$ -Glied verhält ( also Gefälle des Amplitudenganges  $-20\text{dB/Dekade}$  bis  $-40\text{dB/Dekade}$  und  $0^\circ < \varphi < 60^\circ$  ), dann verhält sich der Regelkreis wie ein schwingungsfähiges  $PT_2$ -Glied.

Der Zusammenhang zwischen den charakteristischen Kenngrößen von  $h(t)$  (=Sprungantwort des Regelsystems) einerseits



den entsprechenden Kenngrößen im Frequenzbereich ...

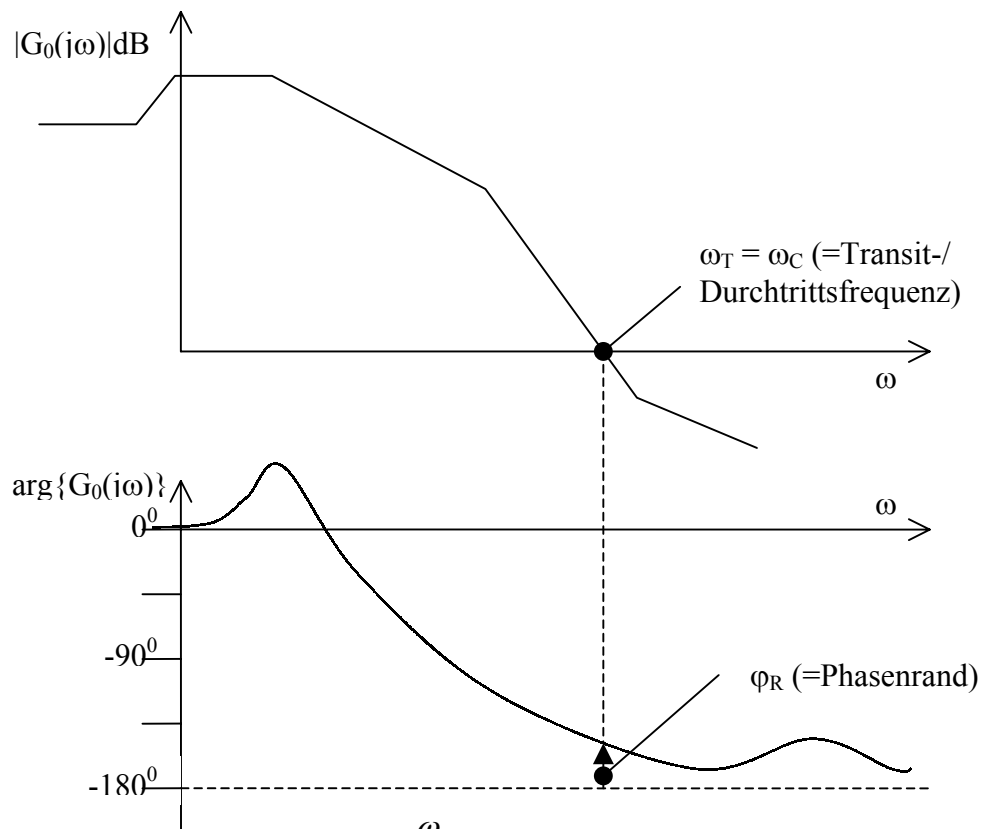
Char. Kenngrößen für  $G_w(j\omega)$ 

Es gilt näherungsweise  $\omega_B \cdot t_r \approx 2,2$  ( $B \cdot t_r \approx 0,35$ ), also: wenn  $\omega_B \uparrow \Leftrightarrow t_r \downarrow$

weiterhin  $M_p \uparrow$  (bzw.  $\ddot{u} \uparrow$ )  $\Leftrightarrow M_m \uparrow$

... und den charakteristischen Kenngrößen der offenen Regelschleife ist andererseits.

### Char. Kenngrößen für $G_0(j\omega)$



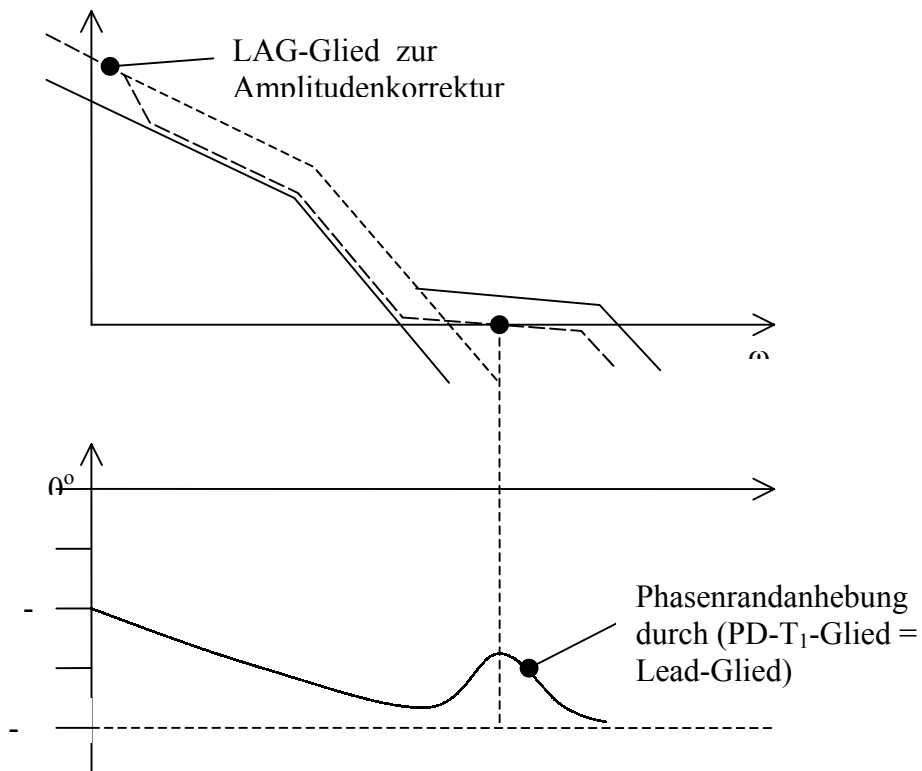
Es gilt näherungsweise  $\frac{\omega_B}{\omega_c} \approx 1,6$  also: wenn  $\omega_B \uparrow$ , dann  $\omega_c \uparrow$   
 weiterhin  $M_m \cdot \phi_R \approx 60^\circ$  also: wenn  $\phi_R \uparrow$ , dann  $M_m \downarrow$   
 und (bekanntlich)  $e_{1\infty} = \frac{1}{1+V}$  bzw.  $e_{2\infty} = \frac{1}{V}$  usw. also: wenn  $V \uparrow$  dann  $e_{1\infty} \downarrow$



Die Forderungen an die Sprungantwort (die Übergangsfunktion) des geschlossenen Regelkreises werden umgesetzt in Forderungen an den Frequenzgang  $G_w(j\omega)$  des geschlossenen Regelkreises und dann weiter in Forderungen an  $G_0(j\omega)$ , den Frequenzgang der offenen Regelschleife:  $G_0(j\omega) = G_S(j\omega)G_R(j\omega)$ .  $G_S(j\omega)$  wird normalerweise nicht schon diese Forderungen erfüllen, deshalb müssen mit  $G_R(j\omega)$  die Frequenzkennlinien so verbogen werden, daß  $G_0(j\omega)$  diese Anforderungen erfüllt. Zum „Verbiegen“ der Frequenzkennlinien nehmen wir Lead- und Lag-Kompensatoren



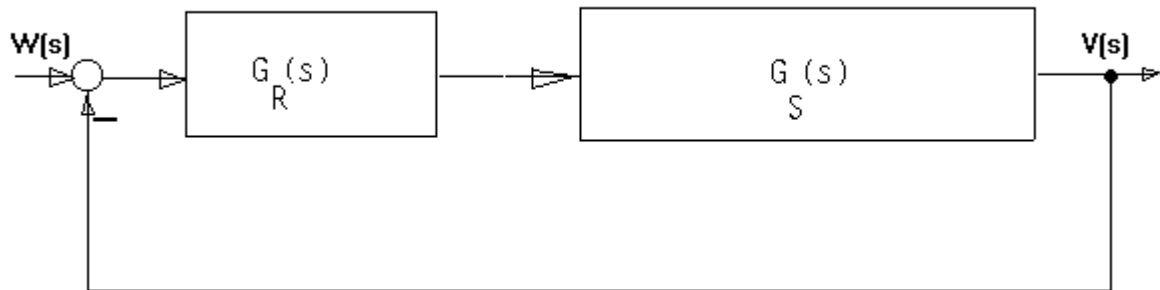
Das nachstehende Bild 7.2 soll das bisher Gesagte erstmals motivieren.



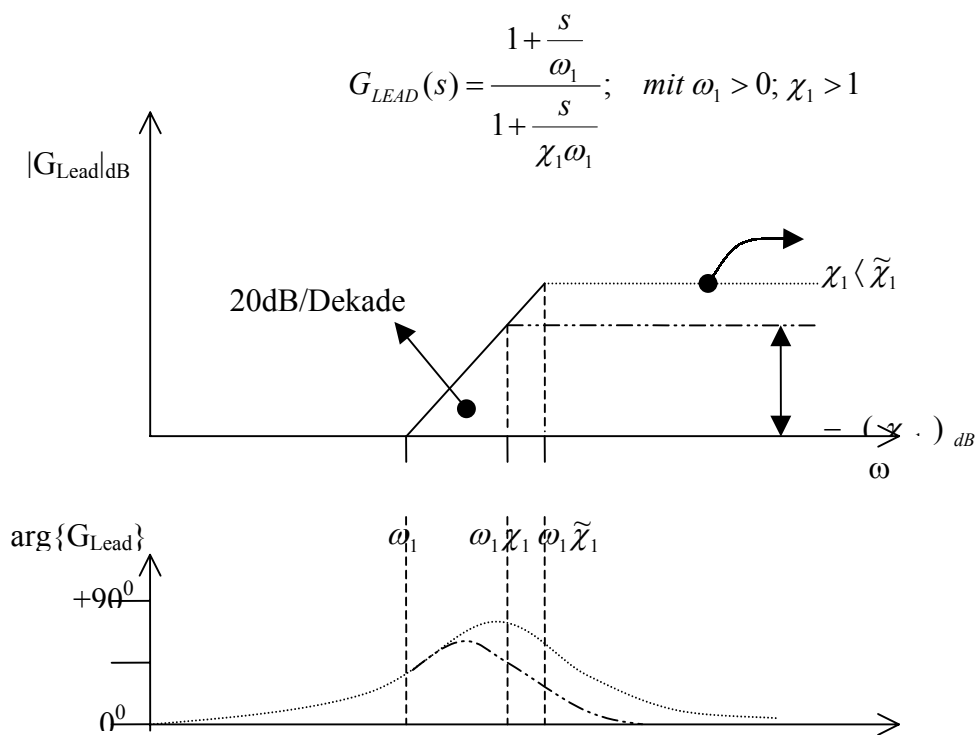
**Bild 7.2: Prinzipskizze wie Lead- und Lagglieder eingesetzt werden können.**

## 7.2 Der Einsatz von Lead- und Lag-Kompensatoren.

Ausgangspunkt ist wieder die nachstehende Rückkopplungsstruktur:

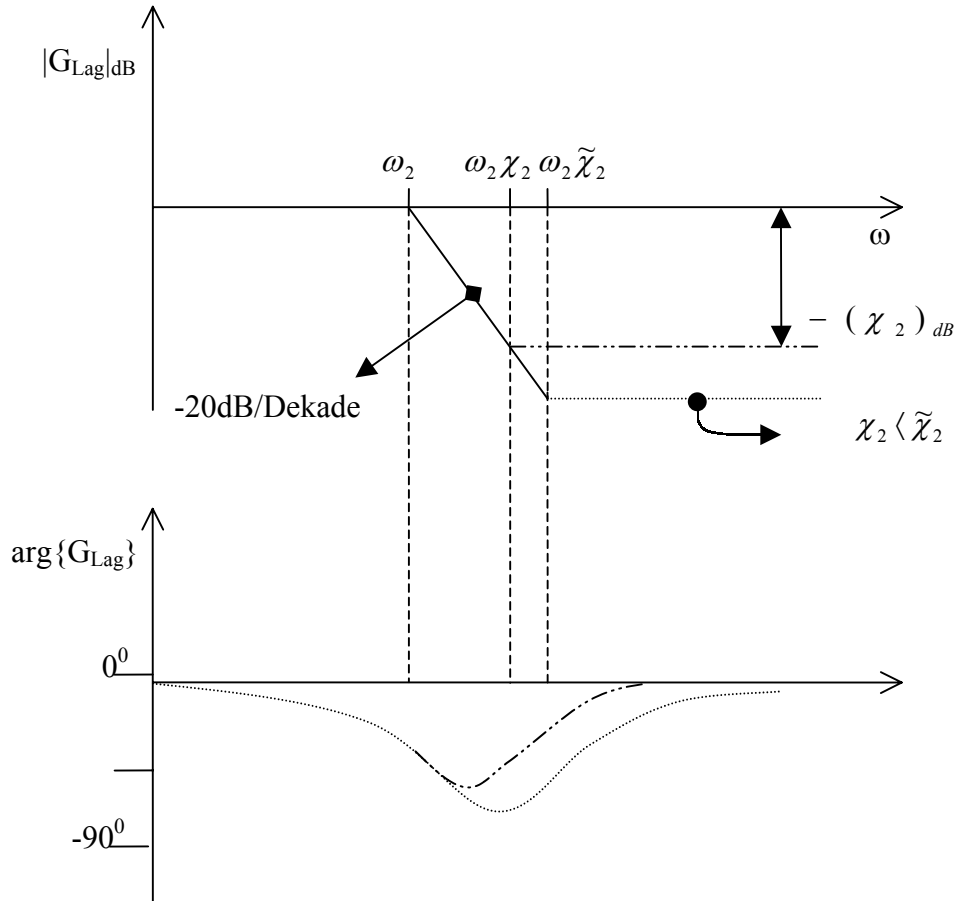


### 7.2.1 Lokale Phasenhebung mit dem LEAD-Glied: (= PD-T<sub>1</sub>-Glieder)



### 7.2.2 Bertagskorrektur durch LAG-Glied

$$G_{LAG}(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_2}}{1 + \frac{s}{\omega_2 \chi_2}}; \quad \text{mit } \omega_2 > 0; \chi_2 > 1$$



Wir hatten unter 7.1 bereits eine qualitative Darstellung der Zusammenhänge zwischen den einzelnen charakteristischen Kenngrößen kennengelernt. Hier noch einmal im Zusammenhang:

$h(t)$	$t_r \downarrow$	$\ddot{u} \downarrow$	$e_\infty \downarrow$
$G_\omega(j\omega)$	$\omega_B, B \uparrow$	$M_m \downarrow$	
$G_\omega(j\omega)$	$\omega_c \uparrow$	$\varphi_r \uparrow$	$V \uparrow$

Die Zusammenhänge sind folgendermaßen zu interpretieren:  $t_r \downarrow \Rightarrow B \uparrow \Rightarrow \omega_c$

Wenn sich das Regelsystem wie ein schwingungsfähiges PT<sub>2</sub>-Glieder verhalten soll ( $G_0$  wie I+PT<sub>1</sub> bei  $\omega_c$ ), dann lassen sich die Zusammenhänge quantifizieren:

$h(t)$	$t_r$	$\ddot{u}$	$e_\infty$
	$\omega_B \cdot t_r \approx 2,2$	$M_m \approx 1 + 5,76\ddot{u}^2$	
$G_\omega(j\omega)$	$\omega_B$	$M_m$	
	$\frac{\omega_B}{\omega_c} \approx 1,6$	$M_m \cdot \varphi_r \approx 60^\circ$	
$G_0(j\omega)$	$\omega_c$	$\varphi_r$	$V$

$e_{1\infty} = \frac{1}{1+V}$   
 $e_{2\infty} = \frac{1}{V}$  usw.

Damit wird der Einsatz von Lead- und Lagkompensatoren möglich.

## **8. Ein Verfahren zur algebraischen Formulierung von Frequenzkennlinienmethoden**

*„Zum Beginnen, zum Vollenden  
Zirkel, Bley und Winkelwaage,  
alles stockt und starrt in Händen,  
leuchtet nicht der Stern dem Tage.“  
J.W.v. Goethe*

### **8.2 Vorbemerkungen**

Die nachfolgend beschriebene Methode wurde vom Verfasser dieses Skripts selber entwickelt. Und obwohl er sie bis heute noch in keiner Fachzeitschrift oder Buch veröffentlicht hat, ist sie bereits Stoff von Grundlagenvorlesungen (zur Regelungstechnik) an verschiedenen Deutschen Hochschulen. An unserem Fachbereich an der Fachhochschule Nürnberg stehen mir leider zuwenig Vorlesungsstunden zur Verfügung um diesen Stoff selber vorzutragen. Ich hoffe aber, daß ich dies noch vor Erreichen meiner Pensionierung wenigstens einmal schaffe.

**Zusammenfassung** : Es wird gezeigt, wie sich die in der Praxis bewährten Frequenzkennlinienmethoden mit Hilfe von Sturmschen Ketten algebraisch formulieren lassen. Damit gelingt für die Synthese von Regelsystemen zunächst zweierlei: Man kann einerseits die wohlbekannten konstruktiven Elemente der Reglersynthese mit all ihren Kenngrößen wie Bandbreite, Transitfrequenz, Phasenrand usw. beibehalten. Andererseits braucht man das notwendige „Verbiegen“ von Frequenzkennlinien nicht mehr selber im Bode-Diagramm durchzuführen ( ein Verfahren das sonst notfalls wiederholt angestrengt werden muß). Zu diesen, die Entwurfsökonomie betreffenden, Vorteilen stellt sich als der Hauptvorteil des hier vorzustellenden Verfahrens heraus: die einfache Synthese von robusten Regelungssystemen und die Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen (bzw. von anderen Signalbeschränkungen). Damit kommen die seit vielen Jahren angestellten Untersuchungen zu Frequenzkennlinienmethoden zu einem vorläufigen Abschluß.

### **8.2 Einführung**

Die Reglersynthese mittels Frequenzkennlinien gehört zu den klassischen Synthesemethoden. Das „Denken in Frequenzkennlinien“ ist dem, in der Regelungstechnik tätigen, Ingenieur selbstverständlich und die Verständigung zwischen Ingenieuren in Begriffen wie Bandbreite, Transitfrequenz, Phasenrand, Kreisverstärkung usw. geläufig. Der Gebrauch der Hilfsmittel für Reglersynthesen die auf Frequenzkennlinienmethoden beruhen ( z.B. Bodediagramme, Phasenkennlinien von Lead- und Laggliedern) bleibt konstruktiv – und zeitaufwendig. Das hier vorzustellende Verfahren behält den konstruktiven Charakter dieser bewährten Syntheseverfahren bei, erspart dem Anwender aber den mühsamen Gebrauch der bisherigen Hilfsmittel: die Reglerparametrierung kann mit dem Rechner ermittelt werden.

Darüber hinaus bietet das hier vorzustellende Konzept eine Reihe von neuen Möglichkeiten um auch solche Praxisprobleme zu beherrschen, die sich bisher nur schwer, oder mit den klassischen Syntheseverfahren gar nicht zu lösen waren. Hierzu seien genannt:



- Die Synthese von robusten Regelungssystemen
- Die Reglersynthese unter Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen ( bzw. von anderen Signalbeschränkungen)
- Die Synthese von Mehrgrößenregelungen im Frequenzbereich
- Die Berücksichtigung von wesentlichen Nichtlinearitäten (also solchen die nicht einfach „weglinearisiert“ werden können).

Schließlich öffnet die algebraische Formulierung von Frequenzkennlinienmethoden neue Einsichten in die spektrale Theorie linearer Operatoren. Also in Problemkreise die nur noch am Rande mit regelungstechnischen Aufgabenstellungen verwandt sind. Es ist erstaunlich, daß das notwendige Handwerkzeug zur algebraischen Formulierung von Frequenzkennlinienmethoden einfach zu handhaben ist: Hierbei handelt es sich lediglich um die bekannten Sturmschen Ketten. Diese dürften vielen Ingenieuren noch aus ihrem Studium bekannt sein.

Die vorliegende Arbeit ist das Ergebnis einer mehrjährigen Beschäftigung des Verfassers mit entsprechenden Problemen aus der Praxis. Natürlich war die eingeschränkte Effektivität der klassischen Methoden, z.B. im Zusammenhang mit dem Problem der Stellgrößenbegrenzung, schon immer bekannt und es hat nicht an Versuchen gefehlt, hier zu verbesserten Syntheseverfahren zu kommen. In diesem Zusammenhang sei auf die Arbeiten von Prof. Dr. Schneider [1] ( TU-Graz ) aus den siebziger Jahren hingewiesen. Die von ihm aufgestellten Betragsungleichungen für die Reglersynthese können nunmehr algebraisch dargestellt und auch bei Strecken hoher Systemordnung effektiv eingesetzt werden.

### 8.3 Ableitung der algebraischen Formulierung einer Frequenzkennliniendarstellung

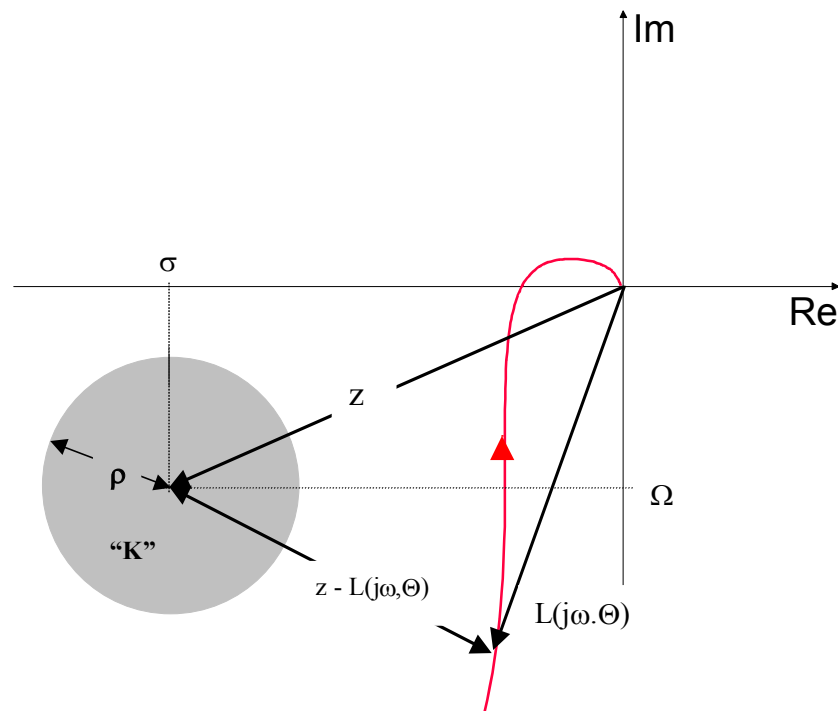
Es soll Bild 1 betrachtet werden. Hier ist die Ortskurve des Frequenzgangs eines linearen und zeitinvarianten Übertragungssystems dargestellt. Für die mathematische Beschreibung dieses Frequenzgangs werde folgende Notation vereinbart: Ausgegangen werde von der Übertragungsfunktion

$$L(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i} \quad (1)$$

mit ( $m \leq n$ ).  $U(s)$ ,  $Y(s)$  seien die Laplacetransformierten der Ein- und Ausgangsgröße des betrachteten Systems. Die Koeffizienten von Zähler- und Nennerpolynom sollen in einem ( $m + n + 1$ )-dimensionalen Parametervektor zusammengefaßt werden:

$$\Theta = (b_0, \dots, b_m, a_0, \dots, a_{n-1})^T \in R^{n+m+1} \quad (2)$$

Schreibweise statt (1) :  $L(s, \Theta)$  bzw.  $L(j\omega, \Theta) = L(s, \Theta) \big|_{j\omega}$  für den Frequenzgang (3)



**Bild 8.1:** Ortskurve eines Frequenzgangs und „verbotene“ Kreisscheibe „K“

Von der Ortskurve von  $L(j\omega, \Theta)$  werde verlangt, daß sie eine – zunächst völlig willkürliche Kreisscheibe – für alle Kreisfrequenzen  $\omega \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  meidet. Diese Kreisscheibe sei durch einen komplexen Mittelpunktsteiger „ $z = \sigma + j\Omega$ “ und durch ihren Radius „ $\rho$ “ gegeben.

Die Feststellung: „ $L(j\omega, \Theta)$  meidet für alle  $\omega \in [0, \infty)$  eine gegebene Kreisscheibe“ soll nun ohne Verwendung einer graphischen Darstellung getroffen werden!

„ $L(j\omega, \Theta)$  meidet für alle  $\omega \in [0, \infty)$  eine gegebene Kreisscheibe“ ist offenbar gleichbedeutend mit der Ungleichung:

$$\left| L(j\omega; \Theta) - z \right| > \rho \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (4)$$

Zwecks einer übersichtlichen Rechnung werde als Abkürzung eingeführt:

$$L(j\omega; \Theta) = \frac{Z(j\omega; \Theta)}{N(j\omega; \Theta)} = \frac{Z}{N}. \quad \text{Damit lautet Ungleichung (4)} \quad \left| \frac{Z}{N} - [\sigma + j\Omega] \right| > \rho$$

$$\text{Durch Quadrieren auf beiden Seiten} \quad \left| \frac{Z - N \cdot [\sigma + j\Omega]}{N} \right|^2 > \rho^2$$

und unter Verwendung der konjugiert komplexen Größen liefert dies:

$$\frac{Z - N \cdot [\sigma + j\Omega]}{N} \cdot \frac{Z^* - N^* \cdot [\sigma - j\Omega]}{N^*} > \rho^2. \quad \text{Ausmultipliziert und geordnet erhält man:}$$

$$[\sigma^2 + \Omega^2 - \rho^2] \cdot NN^* + ZZ^* - ZN^* \cdot [\sigma - j\Omega] - Z^*N \cdot [\sigma + j\Omega] > 0$$

Wegen  $(ZN^* \cdot [\sigma - j\Omega])^* = Z^*N \cdot [\sigma + j\Omega]$  und nun wieder mit allen Parametern und Variablen geschrieben erhält man schließlich:

$$[\sigma^2 + \Omega^2 - \rho^2] \cdot N(j\omega; \Theta) \cdot N(-j\omega; \Theta) + Z(j\omega; \Theta) \cdot Z(-j\omega; \Theta) - 2 \operatorname{Re} \{ Z(-j\omega; \Theta) \cdot N(j\omega; \Theta) \cdot [\sigma + j\Omega] \} > 0 \quad (5)$$

Die linke Seite dieser Ungleichung stellt ein reellwertiges Polynom dar, das mit

$$P(\omega, \Theta) := [\sigma^2 + \Omega^2 - \rho^2] \cdot N(j\omega; \Theta) \cdot N(-j\omega; \Theta) + Z(j\omega; \Theta) \cdot Z(-j\omega; \Theta) - 2 \operatorname{Re} \{ Z(-j\omega; \Theta) \cdot N(j\omega; \Theta) \cdot [\sigma + j\Omega] \}$$

(6)

abgekürzt werden soll.

Die Aussage „ $P(\omega, \Theta) > 0$ “ bedeutet aber, daß der Graph des Polynoms „ $P(\omega, \Theta)$ “ oberhalb der positiven  $\omega$ -Achse liegen muß und daß insbesondere für sein Absolutglied „ $a_0$ “ gelten muß:  $a_0 > 0$ .

Die Forderung „ $L(j\omega, \Theta)$  meidet für alle  $\omega \in [0, \infty)$  die Kreisscheibe“, zieht also die Forderung: „ $P(\omega, \Theta)$  hat keine positiven reellen Nullstellen“ nach sich.

Anstatt sich die Ortskurve von  $L(j\omega, \Theta)$  und die vorgegebene Kreisscheibe aufzuzeichnen, genügt es also zunächst,  $P(\omega, \Theta)$  zu bestimmen, die Nullstellen davon zu berechnen und diese durchzumustern. Tatsächlich erweist sich die explizite und ggf. aufwendige Nullstellenberechnung eines Polynoms als unnötig. Es genügt der Einsatz von Sturmschen Ketten!

Sturmsche Ketten gestatten es, die Anzahl der reellen Nullstellen eines Polynoms in einen Intervall – natürlich auch auf  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  – zu bestimmen, ohne deren Werte genau zu fixieren.

Es ist zweckmäßig, noch einmal an dieses Kalkül und ihren Gebrauch zu erinnern. Bekanntlich werden Sturmsche Ketten in der Mathematik wie folgt eingeführt:

Definition:

Die Funktionen  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$  bilden eine Sturmsche Kette auf dem Intervall  $(a, b)$ , falls sie auf  $[a, b]$  stetig sind, dort nur endlich viele Nullstellen besitzen und folgendes gilt:

- $f_0(\cdot)$  ist auf  $(a, b)$  stetig differenzierbar und es ist  $f_0(a)f_0(b) \neq 0$  und  $f_n(x) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b]$
- Für keinen Punkt  $x \in [a, b]$  verschwinden irgend zwei aufeinanderfolgende Funktionen  $f_k$  und  $f_{k+1}$  gleichzeitig ( $0 \leq k \leq n-1$ ).
- Falls für ein  $x_1 \in [a, b]$   $f'_k(x_1) = 0$  gilt, ist  $f_{k-1}(x_1)f_{k+1}(x_1) < 0$  für  $1 \leq k \leq n-1$ . Gilt  $f_0(x_1) = 0$  für  $x_1 \in [a, b]$ , dann ist  $f'_0(x_1)f_1(x_1) > 0$ .

Der Satz von Sturm besagt: „Es mögen die Funktionen  $f_0, f_1, \dots, f_n$  über dem Intervall  $(a, b)$  eine Sturmsche Kette bilden und es sei  $W(x)$  die Zahl der Zeichenwechsel dieser Folge im Punkt  $x$ . Dann gilt für die Anzahl  $N$  der Nullstellen der Funktion  $f_0(\cdot)$  in  $(a, b)$ :

$$N=W(a)-W(b) \text{ “}$$

Für Polynome kann mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus aus dem zu untersuchenden Polynom  $P(\omega, \Theta)$  und dessen erster Ableitung die Sturmsche Kette aufgebaut werden. Dies soll lediglich anhand eines Beispiels demonstriert werden:

Von einem Polynom  $p(x) = x^3 + x^2 + 2x + 5$  möchte man mit Hilfe von Sturmschen Ketten feststellen, wie viele reelle Nullstellen in den Intervallen  $I_1 = [-2; -1]$  bzw.  $I_2 = [0; +\infty]$  liegen.

Dann erzeuge man sich mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus eine Sturmsche Kette:

Man beginne mit  $p(x) = x^3 + x^2 + 2x + 5$  und bilde seine Ableitung:  $p' = 3x^2 + 2x + 2$ .

Als nächstes dividiere man  $p$  durch  $p'$  und schreibe in der Form  $p = p'q_1 - r_1$

$$p(x) = p'(x) \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{9} \right] - \left[ -\frac{10}{9} \cdot x - \frac{43}{9} \right]$$

Man schreibt also den negativen Rest der Division an.

Nun bilde man den Quotient aus  $p'$  und dem negativen Rest  $r_1$  und schreibe in der Form  $p' = r_1q_2 - r_2$

$$p'(x) = r_1(x) \cdot \left[ -\frac{27}{10} \cdot x + \frac{980}{100} \right] - [-48.87]$$

Mit diesem Vorgang wurde das Polynom bis auf Grad 0 abgebaut. Es bilden  $p, p', r_1, r_2$  eine Sturmsche Kette.

Für die Bestimmung der Nullstellen im vorgegebenen Intervall setzt man die Intervallgrenzen in die einzelnen Glieder der Sturmschen Kette ein und berechnet die zugehörigen Funktionswerte. Anschließend notiert man sich die Vorzeichen der Funktionswerte.

	x=-2	x=-1	x=0	x→+∞
p	-	+	+	+
p'	+	+	+	+
r <sub>1</sub>	-	-	-	-
r <sub>2</sub>	-	-	-	-

Bezeichnet  $W$  die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Sturmschen Kette und  $[a; b]$  das zu untersuchende Intervall, so berechnet sich die Anzahl der Nullstellen mit:

$N=W(a)-W(b)$ . In  $[-2; -1]$  liegt demnach  $N = W(-2)-W(-1) = 2-1 = 1$  Nullstelle und in  $[0; +\infty)$  befinden sich  $N = W(0)-W(+\infty) = 1-1 = 0$  Nullstellen.

Besonders einfach ist die Berechnung der Vorzeichen an den Intervallgrenzen 0 und  $+\infty$ , da sie identisch mit denen des Absolutglieds bzw. des Koeffizienten bei der höchsten Potenz in  $\omega$  sind. Das erlaubt es auch, daß man die Sturmschen Ketten auf eine Art bestimmt, wie sie bereits im Routhschen Algorithmus vorgezeichnet ist.

Wenn sich also  $P(\omega, \Theta)$  darstellen läßt als  $P(\omega, \Theta) = a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_1 \omega + a_0$ , dann generiere man die zugehörigen Sturmschen Ketten in einem, vom Verfasser sogenannten doppelzeiligen Routhschema:

<b>Zeilennummer</b>	<b>Rechenschritt</b>	<b>Rechnung</b>
1	1	Koeffizienten von $P(\omega, \Theta)$ eintragen: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$
2	3	Zwischenzeile ausfüllen, wie beim Routh-Algorithmus bekannt
3	2	Koeffizienten von $P'(\omega, \Theta)$ eintragen: $na_n, (n-1)a_{n-1}, \dots, a_1$
4	5	Wie 3. Rechenschritt
5	4	Rest von 2. und 3. Zeile wie beim Routh-Algorithmus berechnen, dann $\cdot(-1)$ nehmen
6	7	Wie 3. Rechenschritt
7	6	Rest von 4. und 5. Zeile wie beim Routh-Algorithmus berechnen, dann $\cdot(-1)$ nehmen

Die Rechenschritte 4 und 5 werden mit entsprechend veränderten Zeilennummern  $(n-1)$  mal durchgeführt. Siehe dazu Schritte 6 und 7. Als Zahlenbeispiel diene das schon auf der Vorseite verwendete Polynom  $p(\omega) = \omega^3 + \omega^2 + 2\omega + 5$

<b>Zeilennummer</b>	<b>Rechenschritt</b>	<b>Rechnung</b>			
1 --> <b>p</b>	1	1	1	2	5
2	3	1/3	4/3	5	
3 --> <b>p'</b>	2	3	2	2	
4	5	-109/9	2		
5 --> <b>r<sub>1</sub></b>	4	-10/9	-43/9		
6	7				
7 --> <b>r<sub>2</sub></b>	6	-48.87			

Da bei dem dargestellten Problem die Intervallgrenzen 0 und  $+\infty$  zum Einsatz kommen, kann man die Vorzeichen, ohne Einsetzen der Intervallgrenzen in die Polynome, sofort ablesen. Führt man für die ungeraden Zeilen die Bezeichnung „Hauptzeilen“ ein, so kann man schreiben:

- Die Vorzeichen der Zahlen in der ersten Spalte der Hauptzeilen ergeben  $W(+\infty)$ .
  - Die Vorzeichen der Zahlen in der hinteren Diagonale der Hauptzeilen ergeben  $W(0)$ .
- Wegen  $N = W(0) - W(+\infty) = 1 - 1 = 0$  und  $a_0 = 5 > 0$  hat das Beispielpolynom keine (reellen) Nullstellen auf  $\mathbb{R}_+$ .

Wir können unsere bisherigen Betrachtungen wie folgt zusammenfassen ( algebraische Formulierung einer Frequenzkennliniendarstellung ):

„Man berechne sich zu einem vorgegebenen Frequenzgang  $L(j\omega, \Theta)$  und zu einer vorgegebenen, verbotenen Kreisscheibe in der hier beschriebenen Weise ein Polynom  $P(\omega, \Theta)$  und dazu ein doppelzeiliges Routhschema.

Wenn die Ortskurve dieses Frequenzgangs für alle Frequenzen aus  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty]$  diese Kreisscheibe meidet, dann ist die Anzahl der Zeichenwechsel in der ersten Spalte der Hauptzeilen gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Diagonalen dieser Hauptzeilen.“

Der Vorteil der beschriebenen Methode ist es, daß man eine Überprüfung für unendlich viele Frequenzen auf die Überprüfung eines Zahlentableaus (des doppelzeiligen Routhschemas) zurückführt. Der Aufbau dieses Zahlentableaus ist sehr einfach zu organisieren und kann den Computer überlassen werden.

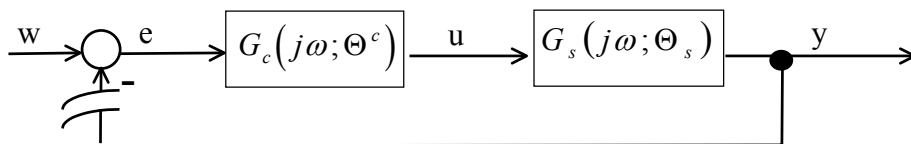
Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß man die eben beschriebene Ableitung der algebraischen Formulierung einer Frequenzkennliniendarstellung auch umkehren kann. Sie lautet sodann:

„Wenn in einem doppelzeiligen Routhschema die Anzahl der Zeichwechsel in der 1. Spalte der Hauptzeilen gleich der Zeichenwechsel in der Diagonalen dieser Hauptzeilen ist, wenn man dann die Koeffizienten der ersten Zeile mit Polynomkoeffizienten identifiziert und dieses Polynom in der Form (6) darstellen kann, dann definieren  $Z(j\omega, \Theta)$  und  $N(j\omega, \Theta)$  eine rationale Funktion und  $\sigma, \Omega$  und  $\rho$  eine Kreisscheibe in der Zahlenebene. Die Ortskurve dieser so definierten rationalen Funktion meidet für alle (unendlich vielen) Frequenzen die Kreisscheibe.“

Diese Umkehrung der algebraischen Formulierung erscheint sehr gekünstelt, da es schwer vorstellbar scheint, wie man von einem doppelzeiligen Routhschema zu einer Darstellung der Form (6) kommt. Die nachfolgenden Beispiele zeigen aber, daß gerade diese Darstellung bei uns immer selbstverständlich ist.

## 8.4 Die Synthese von robusten Kompensatoren

Es werden einschleifige Regelkreise wie in Bild 2 betrachtet.



**Bild 2:** Offener einschleifiger Regelkreis. Bezeichnungen entsprechend der bisher verwendeten Nomenklatur.

Zwischen dem Übertragungsverhalten des geschlossenen Regelkreises

$$T(j\omega; \Theta^c; \Theta_s) := \frac{G_c(j\omega; \Theta^c) G_s(j\omega; \Theta_s)}{1 + G_c(j\omega; \Theta^c) G_s(j\omega; \Theta_s)} \quad (7)$$

und dem Frequenzgang der offenen Regelschleife, die man entsprechend Bild 2 durch Auftrennen des Rückkopplungszweiges erhält,

$$L(j\omega; \Theta^c; \Theta_s) = G_c(j\omega; \Theta^c) \cdot G_s(j\omega; \Theta_s) \quad (8)$$

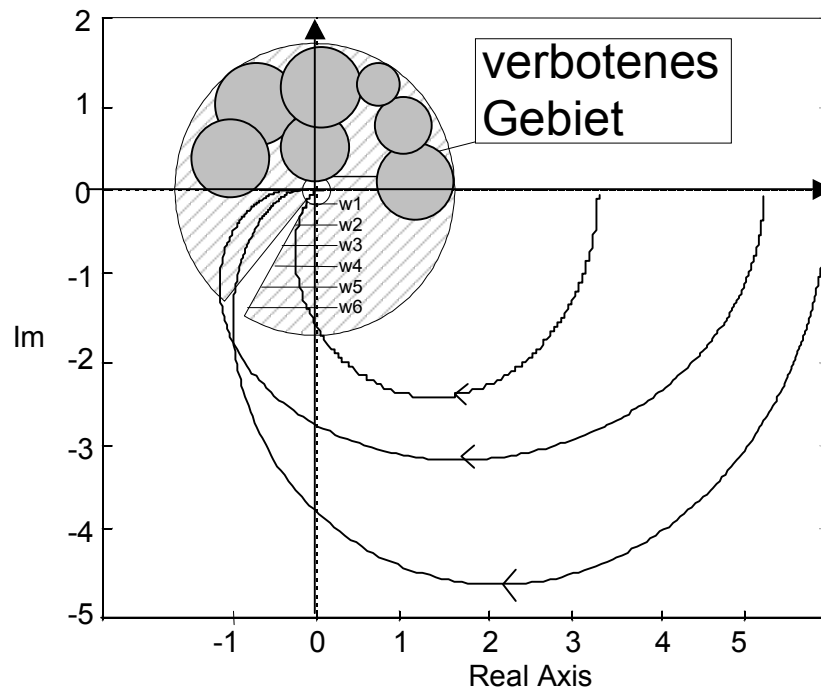
bestehen bekanntlich folgende Zusammenhänge:

$$\text{für } |L(j\omega; \Theta^c; \Theta_s)| \gg 1 \quad \text{gilt: } T(j\omega; \Theta^c; \Theta_s) \approx 1 \quad (8)$$

$$\text{für } |L(j\omega; \Theta^c; \Theta_s)| \ll 1 \quad \text{gilt: } T(j\omega; \Theta^c; \Theta_s) \approx L(j\omega; \Theta^c; \Theta_s) \quad (9)$$

Das bedeutet bekanntlich, daß der Verlauf der Ortskurve  $L(j\omega; \Theta^c; \Theta_s)$  in der Umgebung der Durchtrittskreisfrequenz  $\omega_c$  durch den Einheitskreis im wesentlichen das Übertragungsverhalten des zugehörigen Regelungssystems bestimmt.

Normalerweise ist der Parametervektor einer Regelstrecke nicht genau bekannt. Oder er variiert in unvorhergesehener Weise. Dies soll dadurch berücksichtigt werden, daß man annimmt,  $\Theta_s$  sei Element aus einer endlichen Familie von Parametervektoren  $\Theta_s \in \{\Theta_s^1, \Theta_s^2, \dots, \Theta_s^n\}$  welche repräsentativ für die angenommenen Parametervariationen sind. Ein Regler sei robust, wenn er mit einem einzigen Parametervektor  $\Theta^c$  dem Regelsystem stets dasselbe Zeitverhalten aufprägt. Nach den Ausführungen zu den Ungleichungen (8) und (9) genügt es bereits, wenn man einen Regler findet, der sämtliche Ortskurven von  $L(j\omega; \Theta^c; \Theta_s^1), L(j\omega; \Theta^c; \Theta_s^2), \dots, L(j\omega; \Theta^c; \Theta_s^n)$  in der Umgebung der Durchtrittskreisfrequenz so „zusammenbündelt“, daß diese dort denselben Verlauf (entspricht gleichem Phasenrand und somit gleichem Überspringen) und dieselbe Durchtrittskreisfrequenz (entspricht gleicher Anstiegszeit) haben. Diese Zusammenbündelung wiederum gelingt dadurch, daß man den betrachteten Ortskurven bestimmte Teilgebiete in der Ortskurvenebene erlaubt und andere verbietet. Die verbotenen Gebiete sollen durch Kreisscheiben approximiert werden (vgl. Bild 3). Damit kommt sodann die algebraischen Formulierungen von Frequenzkennlinienmethoden zur Anwendung.

**Bild 3:**

Ortskurven der Frequenzgänge von offenen Regelschleifen. Das verbotene Gebiet öffnet sich mit einem kleinen Sektorwinkel (Grenzen für den Phasenrand) und begrenzt damit die zulässige Streubreite für die  $L(j\omega; \Theta^c; \Theta_s^i)$ . Das verbotene Gebiet ist bereits teilweise durch eine zusammenhängende Kreisscheibenüberdeckung nachgebildet.

In diesem Zusammenhang stellt sich noch ein entwurfstechnisches Problem: Die Ortskurven von  $L(j\omega; \Theta^c; \Theta_s^i)$  verlaufen zunächst einmal durch das verbotene Gebiet denn der robuste Regler ist noch nicht bekannt. Um den Entwurf mit dem Rechner durchführen zu können wird eine mehrstufige Entwurfsmethode vorgeschlagen die sich bisher gut bewährt hat.

1. Man setze die Zeitbereichsanforderungen an den Regelkreis um in Frequenzbereichsspezifikationen an  $L(j\omega; \Theta^c; \Theta_s^i)$ . Solche Vorgehensweisen sind wohlbekannt [2].
2. Dann berechne man einen Regler, der für sich alleine diese Frequenzbereichsspezifikationen erfüllt. Die Ortskurve des Reglerfrequenzgangs werde so mit Kreisscheiben eingegrenzt, daß ein hinreichend „enges“ erlaubtes Gebiet in der Umgebung des Einheitskreises übrigbleibt.
3. Man definiere sich einen „Ersatzfrequenzgang“:

$$L_{ers}(j\omega; \Theta^c; \Theta_s^i; V) = \frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{G_c(j\omega; \Theta^c) \cdot (1 + V) \cdot G_s(j\omega; \Theta_s^i)}{1 + G_s(j\omega; \Theta_s^i) \cdot V} \quad (10)$$



Aus Grenzwertbetrachtungen folgt:

$$\lim_{V \rightarrow 0} L_{ers}(j\omega; \Theta^c; \Theta_i^s; V) = L(j\omega; \Theta^c; \Theta_i^s) \quad (11)$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} L_{ers}(j\omega; \Theta^c; \Theta_i^s; V) = G_c(j\omega; \Theta^c) \quad (12)$$

Man erkennt, daß sich für hinreichend großes „V“ die Ortskurven von  $L_{ers}(j\omega; \Theta^c; \Theta_i^s; V)$  wie die Ortskurven von  $G_c(j\omega; \Theta^c)$  aussehen und folglich auch im erlaubten Gebiet liegen.

4. Man löse das erste Optimierungsproblem:

Zielfunktion:

$$V^2 = \min_{\Theta^c} \quad (13)$$

Restriktionen:

$$|L(j\omega; \Theta^c; \Theta_i^s; V) - z_j| > r_j \quad ; \quad \omega \in \mathbb{R}_+ \quad i \in (1, \dots, k) \quad j \in (1, \dots, n)$$

Die Restriktionen bedeuten, daß  $n$  Kreisscheiben  $(z_j; r_j)$  von  $k$  Ortskurven  $L(j\omega; \Theta^c; \Theta_i^s; V)$  gemieden werden müssen. Für  $V=0$  sind alle Ortskurven des Frequenzgangs von „L“ in das erlaubte Gebiet eingefädelt. Für diese Optimierungsaufgabe wurde vom Verfasser eine Variante des Rosenbrockschen Algorithmus verwendet.

5. Man löse das zweite Optimierungsproblem:

Zielfunktion:

$$\sum_{v=1}^m \sum_{i=1}^k \left[ L(j\omega_{qv}; \Theta^c; \Theta_i^s) \cdot L(-j\omega_{qv}; \Theta^c; \Theta_i^s) - q_v^2 \right]^2 = \min_{\Theta^c} \quad (14)$$

Restriktionen:

$$|L(j\omega; \Theta^c; \Theta_i^s) - z_j| > r_j \quad ; \quad \omega \in \mathbb{R}_+ \quad i \in (1, \dots, k) \quad j \in (1, \dots, n)$$

Dadurch erzwingt man, daß die Ortskurven der offenen Schleifen an  $m$  Frequenzpunkten  $\omega_{qv}$ ,  $qv \in \{1, \dots, m\}$  vorgeschriebene Werte annimmt. Üblicherweise genügt ein solcher Frequenzpunkt. Hier nimmt man  $\omega_c$ , die Durchtrittskreisfrequenz. Bei der Durchtrittskreisfrequenz muß gelten:

$$\sum_{i=1}^k \left[ L(j\omega_c; \Theta^c; \Theta_i^s) \cdot L(-j\omega_c; \Theta^c; \Theta_i^s) - 1 \right] = \underset{\Theta^c}{Min}$$

## 8.5 Ein Beispiel

Es wird das aus der Fachliteratur wohlbekannte Beispiel [3] behandelt. Infolge von Parametervariationen werden 8 signifikante Streckenübertragungsfunktionen hierzu angegeben:

$$G_s(s; \Theta_1) = \frac{97.8s^2 + 2410s + 4832}{s^3 + 15.84s^2 + 22s - 52.75} \quad \text{instabil}$$

$$G_s(s; \Theta_2) = \frac{272s^2 + 6.819E3s + 3.27E4}{s^3 + 17.13s^2 + 34.93s - 122.5} \quad \text{instabil}$$

$$G_s(s; \Theta_3) = \frac{85s^2 + 2034s + 4013}{s^3 + 15.33s^2 + 17.51s - 14.64} \quad \text{instabil}$$

$$G_s(s; \Theta_4) = \frac{176s^2 + 3950s + 1.454E4}{s^3 + 15.74s^2 + 43.6s + 269.1} \quad \text{stabil}$$

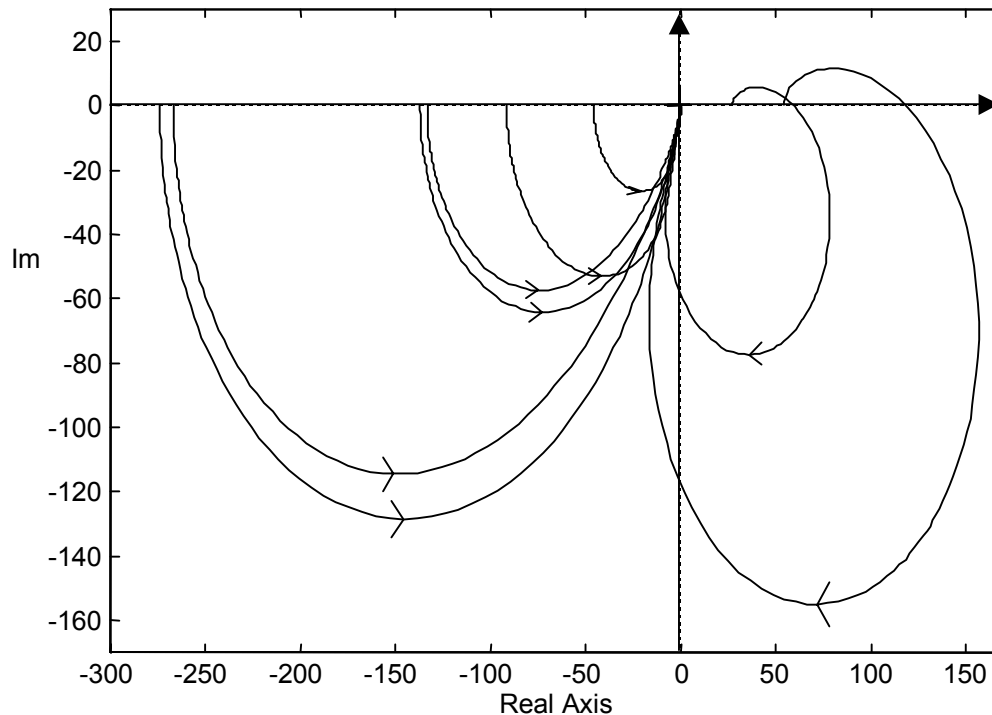
$$G_s(s; \Theta_5) = \frac{48.9s^2 + 1205s + 2416}{s^3 + 15.84s^2 + 22s - 52.75} \quad \text{instabil}$$

$$G_s(s; \Theta_6) = \frac{136s^2 + 3410s + 1.634E4}{s^3 + 17.13s^2 + 34.93s - 122.5} \quad \text{instabil}$$

$$G_s(s; \Theta_7) = \frac{42.5s^2 + 1017s + 2007}{s^3 + 15.33s^2 + 17.51s - 14.64} \quad \text{instabil}$$

$$G_s(s; \Theta_8) = \frac{88s^2 + 1975s + 7270}{s^3 + 15.74s^2 + 43.6s + 269.1} \quad \text{stabil}$$

Bild 4 zeigt die entsprechenden Streckenfrequenzgänge in der Ortskurvenebene.



**Bild 8.4:** Ortskurven der 8 Streckenfrequenzgänge

Gesucht ist ein robuster Regler der allen diesen möglichen Strecken folgendes Zeitverhalten aufprägt:

Überschwingweite	< 30%
Anstiegszeit	< 0,15 sec
Stationärer Lagefehler	0

Diesen Spezifikationen im Zeitbereich entsprechen folgende Spezifikationen für  $L(j\omega)$ :

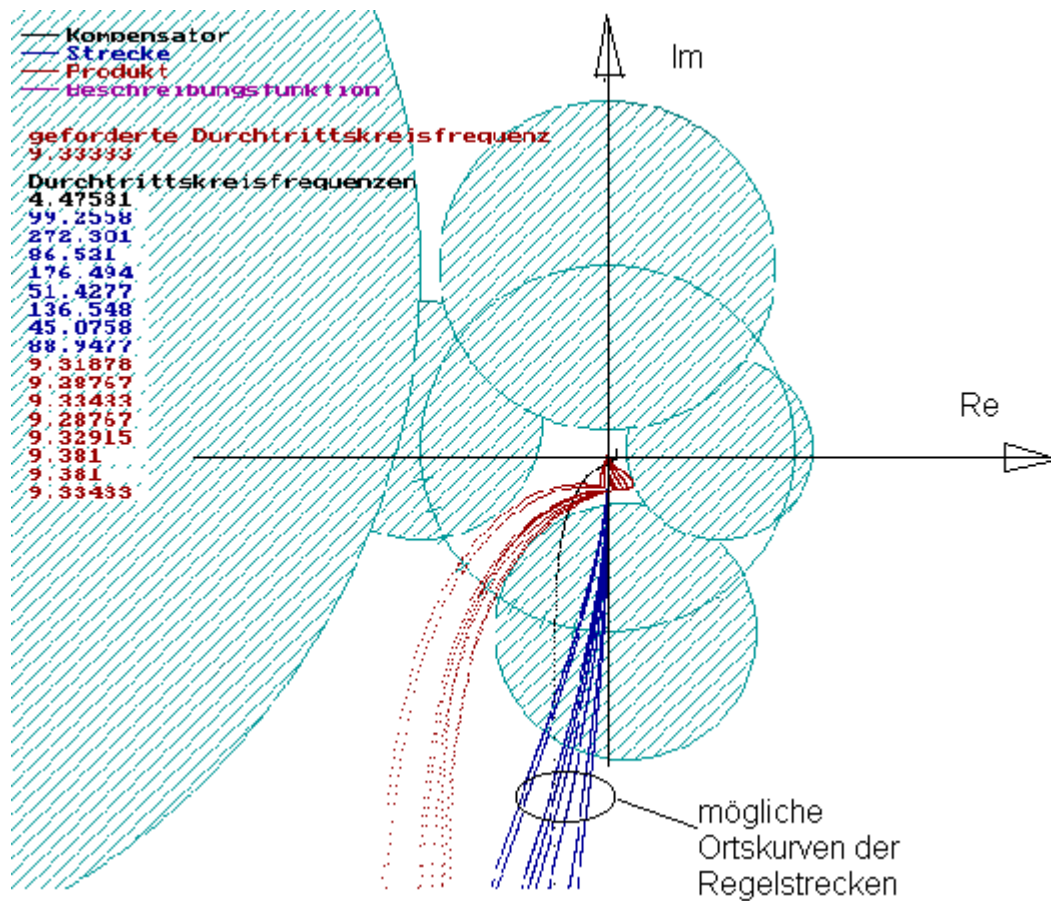
Phasenrand $\Phi_R$	> 49°
Durchtrittskreisfrequenz	> 9,33 1/sec

### **Regler mit I-Anteil**

Der Öffnungswinkel für das verbotene Gebiet werde durch  $[\Phi_R - 5\%, \Phi_R + 5\%]$  gegeben. Durch die Auswahl von geeigneten Kreisscheiben kann dieser Öffnungswinkel nachgebildet werden. Weitere Kreisscheiben sollen ein zusammenhängendes Gebiet erzeugen. Ein Regler, der für sich alleine nach Rückkopplung diese Spezifikationen im Zeitbereich erfüllt kann sofort angegeben werden. Mit einer Gegenkopplung von  $V = 10$  liegen auch die Ortskurven von  $L_{ers}(j\omega; \Theta^c; \Theta_i^s; V)$  innerhalb des erlaubten Gebietes. Nach Abarbeitung der beiden Optimierungsprobleme liegen auch alle Ortskurven von  $L(j\omega; \Theta^c; \Theta_i^s)$  innerhalb dieses Gebietes. Dies zeigt Bild 5. Die geforderte Durchtrittskreisfrequenz wird bis auf weniger als 0,5% genau angenommen. Als robuster Regler wurde

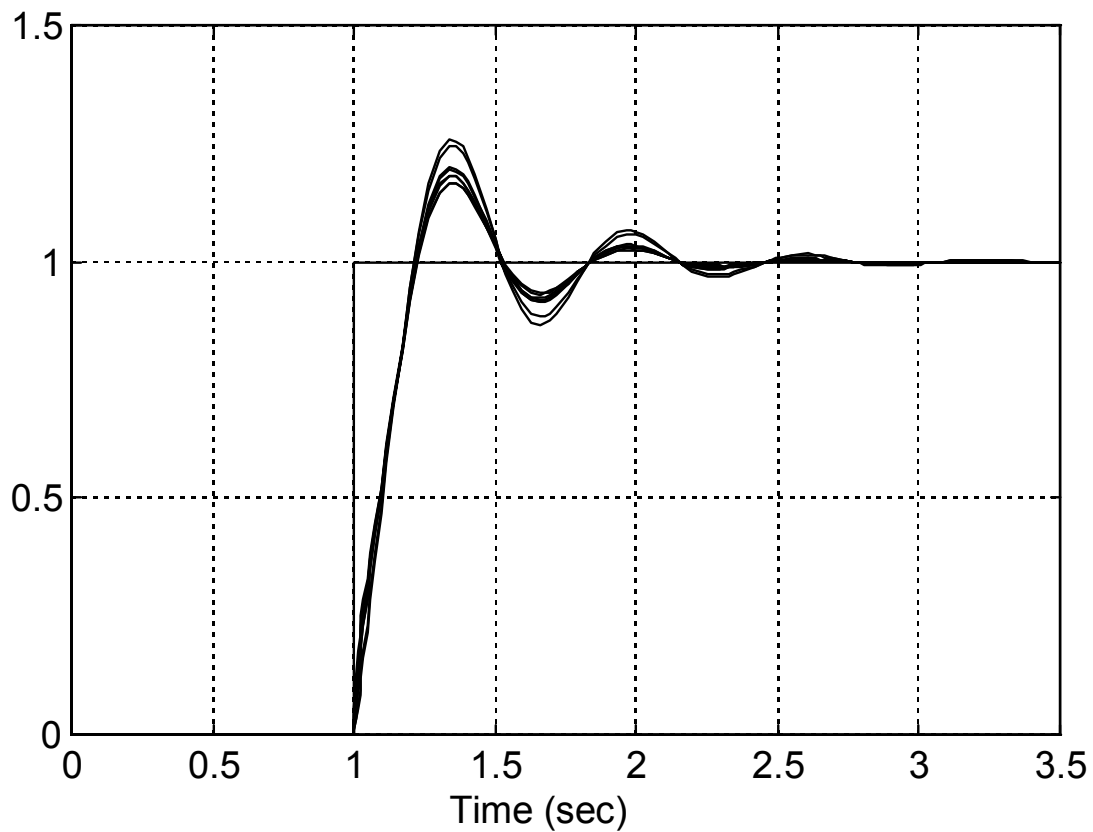
$$G_c(s; \Theta^c) = \frac{0.0587291 s^3 + 3.06917 s^2 + 36.0231 s + 631.545}{s^3 + 15.4632 s^2 + 132.516 s + 0}$$

berechnet.



**Bild 8.5:** Ortskurven von  $G_s(j\omega; \Theta_i^s)$  und Endkonfigurationen von  $L(j\omega; \Theta^c; \Theta_i^s)$ . Verbotenes Gebiet durch Kreisscheiben approximiert.

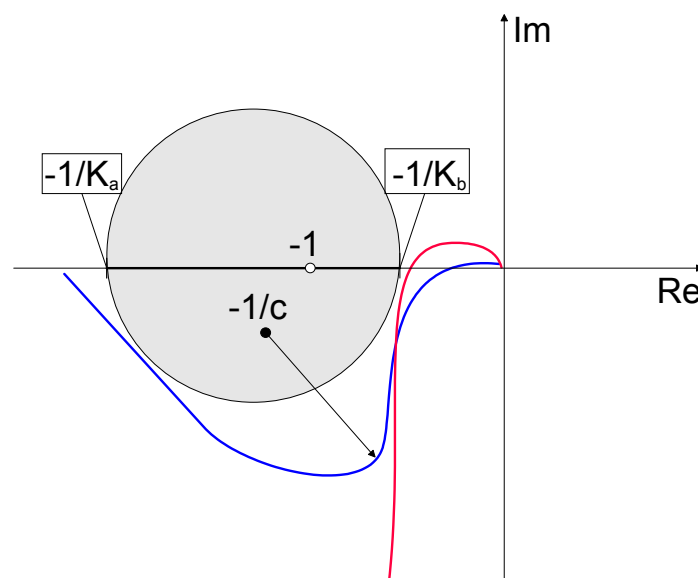
Zum Schluß seien in Bild 6 auch noch die Übergangsfunktionen der sich so ergebenden, robusten Regelsysteme dargestellt. Man vergewissert sich, daß die ursprünglichen Zeitbereichsforderungen bezüglich Anstiegszeit und Überspringen gut erfüllt werden.



**Bild 8.6:** Übergangsfunktionen des Regelsystems zu den vorgelegten, acht möglichen Streckenfrequenzgängen.

## 8.6 Ausblick

Ein Regelsystem das auf der Grundlage des hier erstmals vorgestellten Konzepts entworfen wird, hat eine Reihe von günstigen Eigenschaften. Dies folgt aus der Tatsache, daß hier das verbotene Gebiet durch Kreisscheiben nachgebildet wird. Man betrachte hierzu schließlich Bild 7.



**Bild 8.7:**     *Darstellung einer speziellen Kreisscheibe aus dem verbotenen Gebiet.*

Unter Verwendung der dort angeführten Bezeichnungen kann man diese Eigenschaften so formulieren:

1.     Wenn  $V_0$  der zu  $\Theta_i^s$  gehörende Wert der Kreisverstärkung ist, dann bleibt nach dem Nyquist-Kriterium der Regelkreis auch dann noch stabil, wenn  $V_0$  zwischen  $1/\alpha$  und  $1/\beta$  variiert.
2.     Bei zusätzlichem Auftreten einer Streckentotzeit von  $T_t < \phi_r / \omega_c$  bleibt der Regelkreis stabil.
3.     Nach dem Kreiskriterium darf  $V_0$  - wie in 1. beschrieben - sogar zeitlich beliebig variieren, ohne daß das Regelungssystem instabil wird. (Es muß an dieser Stelle ausdrücklich betont werden: Ein Reglerentwurf, bei dem für alle beliebigen aber festen Zeiten die Pole des Regelungssystems berechnet werden die in der linken offenen s-Halbebene liegen, kann sonst durchaus eine instabile Realisierung sein!)

Zum Schluß sei noch einmal auf das Problem der Stellgrößenbeschränkung hingewiesen. Die entsprechenden Syntheseungleichungen sind in jedem Lehrbuch für Regelungstechnik nachzulesen. Z.B. [2]. Entscheidend ist die algebraische Formulierung dieser Syntheseungleichungen. Diese werden im 2. Kapitel dieser Arbeit vorbereitet und sind nunmehr leicht anzugeben. In der Diplomarbeit [4] wurde eine solche Synthese durchgeführt. Schließlich liegt auch eine Arbeit mit einer algebraischen Darstellung von Synthesebedingungen für Mehrgrößensysteme vor [5].

## Literatur

- [1] Schneider, Gerd: „Eine einfache Methode zum Entwurf von Regelsystemen mit Begrenzungen“. Regelungstechnik 32, Jahrgang 1984, Heft 9, Seite 290-298.
- [2] Landgraf Schneider: „Elemente der Regelungstechnik“, Springerverlag, Berlin 1970
- [3] Ackermann: „Robustness Against Sensor Failures“, 8. IFAC-Congress, Koyoto Japan, 1981, Pergamon Press.
- [4] Kirici: „Eine algebraische Methode zum Entwurf von Regelsystemen mit Begrenzungen“, Diplomarbeit FH-Nürnberg 1997
- [5] Fischer: „Ein algebraisches Stabilitätskriterium für lineare zeitinvariante Mehrgrößensysteme“, Diplomarbeit FH Nürnberg 1987