GEORG-SIMON-OHM- Fachhochschule Nürnberg
Fachbereich Nachrichten- und Feinwerktechnik

Prüfungsfach:Systemtheorie

Studiengang: BTI
Semester: 4
Prüfungstermin: 17.07.2001, 11:00 Uhr
Dauer der Prüfung: 90 Minuten
Anzahl der Aufgabenblätter: 12 (inkl. Deckblatt)
Hilfsmittel: unbegrenzt
Maximal erreichbare Punktzahl: 100

Note: _____
Punktzahl: _____
Erstkorrektor: _____
Zweitkorrektor: _____

Prüfer/Aufgabensteller der Prüfung: Theo Kupfer

Name: _____

Vorname: _____

Geb.datum: _____

Matrikel-Nr.: _____

Unterschrift: _____

Wichtige Hinweise:
1. Tragen Sie bitte, bevor Sie mit der Lösung der Aufgaben beginnen, die erforderlichen Angabe zu Ihrer Person im Deckblatt der Aufgabenblätter ein!
2. Die Lösungen sind auf den Aufgabenblättern einzutragen!(ggf. Rückseiten der Blätter verwenden)
3. Von mehreren Lösungen zur gleichen Aufgabe, ist die gültige Lösung eindeutig zu kennzeichnen!
4. Lösungswege müssen klar erkennbar sein.
5. Bei Formeln bitte Variablen und Parameter eindeutig erklären.

Musterlösung

Viel Erfolg

Aufgabe 1: (Maximale Punktzahl: 10) Erreichte Punktzahl: _____

Bestimmen Sie für das im Bild 1 gezeigten System, ob es

- stabil
- gedächtnisbehaftet
- kausal
- linear
- zeitinvariant

ist. Begründen Sie das Ergebnis.

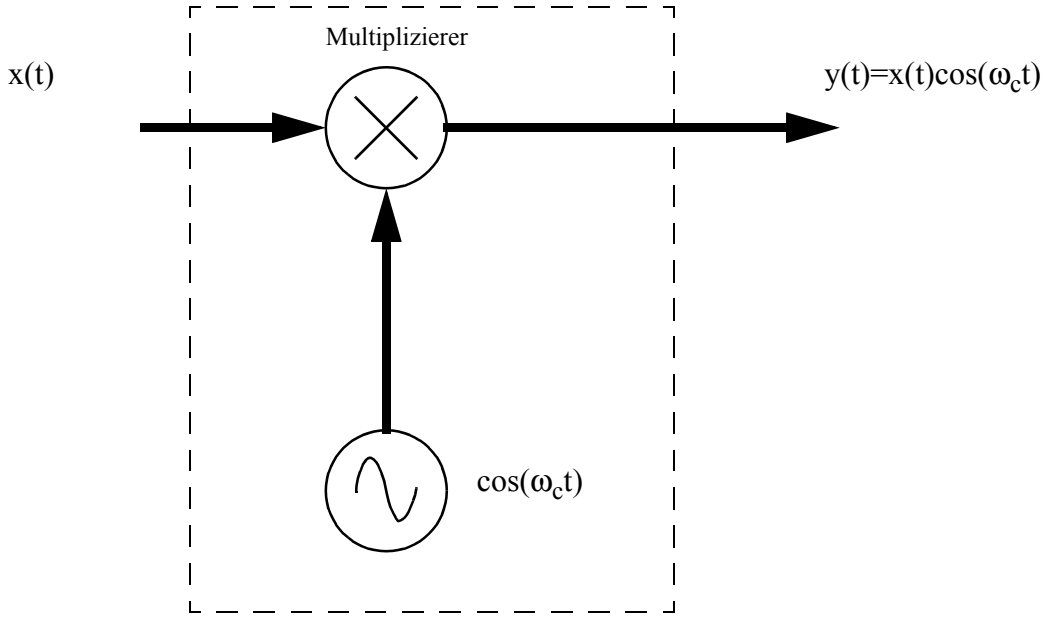


Bild 1

a) Stabilität

Lösung: ☒ **stabil**
☐ **nicht stabil**

Begründung:

$$\left|x(t)\right| < K \Rightarrow y(t) < K$$

b) Dynamik

Lösung: ☐ **gedächtnisbehaftet**
☒ **gedächtnislos**

Begründung:

y(t) hängt nicht von vergangenen Werten von x(t) ab.

c) Kausalität

Lösung: ☒ **kausal**
☐ **nicht kausal**

Begründung:

y(t) hängt nicht von zukünftigen Werten von x(t) ab.

d) Linearität

Lösung: ☒ **linear**
☐ **nicht linear**

Begründung:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t)\cos(\omega_0 t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(t)\cos(\omega_0 t)$$
$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow \left(ax_1(t) + bx_2(t)\right)\cos(\omega_0 t)$$
$$=$$
$$ay_1(t) + by_2(t) = ax_1(t)\cos(\omega_0 t) + bx_2(t)\cos(\omega_0 t)$$

e) Zeitvarianz

Lösung: ☐ **zeitinvariant**
☒ **zeitvariant**

Begründung:

$$y(t-\tau) = x(t-\tau)\cos(\omega_0 t - \omega_0 \tau) \neq x(t-\tau)\cos(\omega_0 t)$$

Aufgabe 2: (Maximale Punktzahl: 20) Erreichte Punktzahl: _____

Bild 2 zeigt die Blockschaltbilder zweier Systeme zweiter Ordnung. Bestimmen Sie, ob beide Systeme gleiches Systemverhalten besitzen.

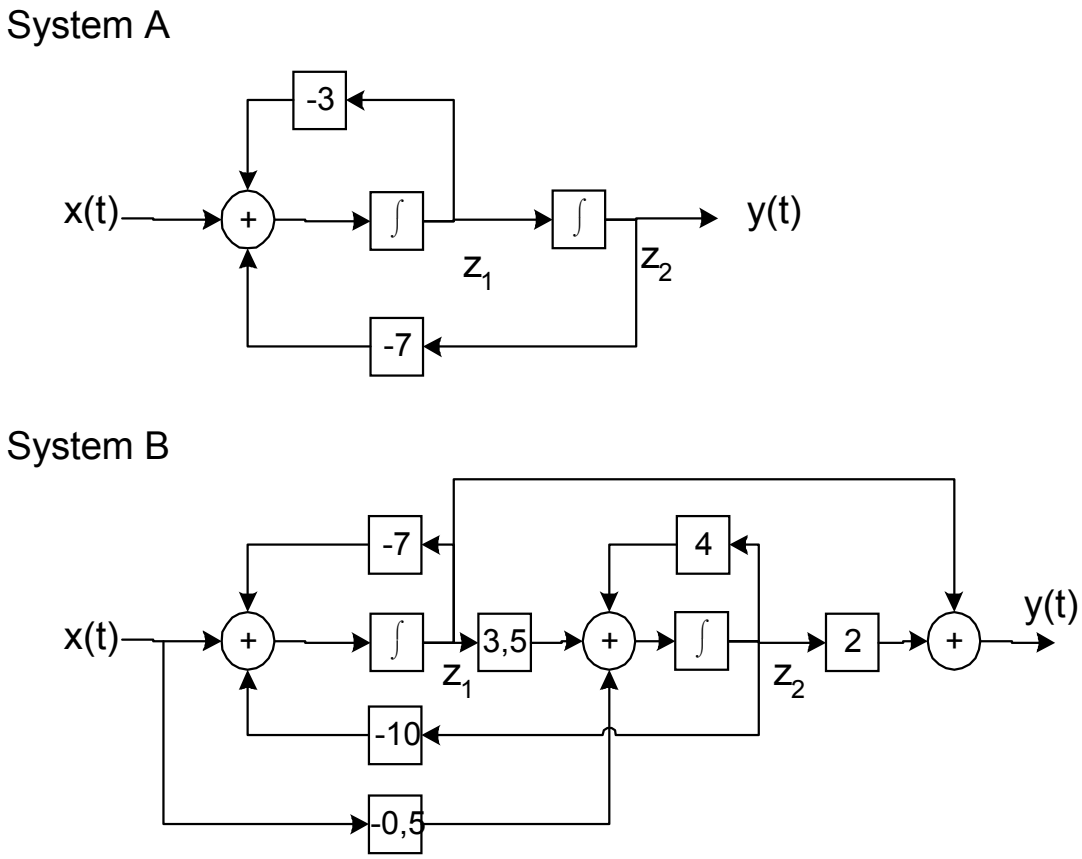


Bild 2

Ihre Lösung:

Gleiches System verhalten heisst $H_A(s) = H_B(s)$

Beweis siehe nächste Seite

$$H(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$$

$$H_A(s)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3 & -7\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+0$$

$$H_A(s)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}s+3 & 7\\ -1 & s\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$H_A(s)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{(s+3)s+7}\begin{bmatrix}s & -7\\ 1 & s+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$H_A(s)=\frac{1}{s^2+3s+7}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\ 1\end{bmatrix}$$

$$H_A(s)=\frac{1}{s^2+3s+7}$$

$$H_B(s)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-7 & -10\\ 3,5 & 4\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\ -0,5\end{bmatrix}+0$$

$$H_B(s)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}s+7 & 10\\ -3,5 & s-4\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\ -0,5\end{bmatrix}$$

$$H_B(s)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\frac{1}{(s+7)(s-4)+35}\begin{bmatrix}s-4 & -10\\ 3,5 & s+7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -0,5\end{bmatrix}$$

$$H_B(s)=\frac{1}{s^2+3s+7}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-4+5\\ 3,5-\dfrac{s+7}{2}\end{bmatrix}$$

$$H_B(s)=\frac{1}{s^2+3s+7}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1\\ -\dfrac{s}{2}\end{bmatrix}$$

$$H_B(s)=\frac{s+1-s}{s^2+3s+7}=\frac{1}{s^2+3s+7}=H_A(s)$$

Aufgabe 3: (Maximale Punktzahl: 10) Erreichte Punktzahl: _____

Bestimmen Sie die Laplace Transformierte X(s) und zeichnen Sie das Pol-Nullstellen Diagramm für die folgenden Signale. Kennzeichnen Sie den Konvergenzbereich im Pol-Nullstellen Diagramm.

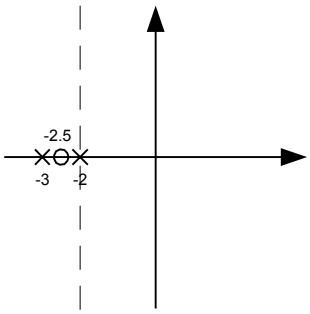
a) $\mathbf{x(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)+e^{-3t}\varepsilon(t)}$

Lösung:

$$e^{-2t}\varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-2$$

$$e^{-3t}\varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+3} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-3$$

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}=\frac{2s+5}{(s+2)(s+3)} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-2 \cap \mathrm{Re}\{s\}>-3$$



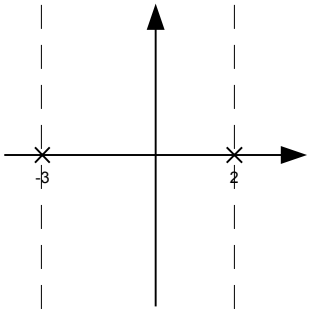
b) $\mathbf{x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)+e^{2t}\varepsilon(-t)}$

Lösung:

$$e^{-3t}\varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+3} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-3$$

$$e^{2t}\varepsilon(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{-1}{s-2} \qquad \mathrm{Re}\{s\}<2$$

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+3}-\frac{1}{s-2}=\frac{-5}{(s-2)(s+3)} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-3 \cap \mathrm{Re}\{s\}<2$$



c) $\mathbf{x(t)=e^{2t}\varepsilon(t)+e^{-3t}\varepsilon(-t)}$

Lösung:

$$e^{2t}\varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-2} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>2$$

$$e^{-3t}\varepsilon(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{-1}{s+3} \qquad \mathrm{Re}\{s\}<-3$$

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \text{ existiert nicht da } \mathrm{Kb}=\varnothing \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-3 \cap \mathrm{Re}\{s\}<2$$

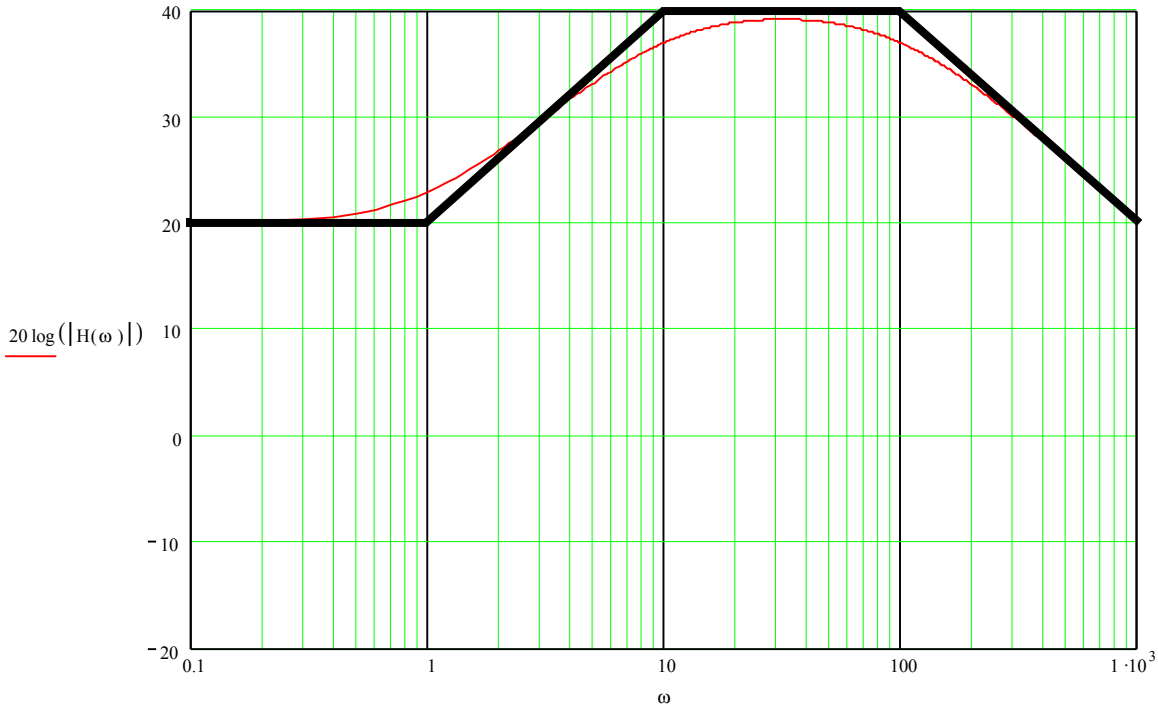
Aufgabe 4: (Maximale Punktzahl: 10) Erreichte Punktzahl: _____

Zeichnen Sie das Bode Diagramm (Betrag und Phase) für ein System mit folgendem Frequenzgang:

$$H(j\omega) = \frac{10^4 (1 + j\omega)}{(10 + j\omega)(100 + j\omega)}$$

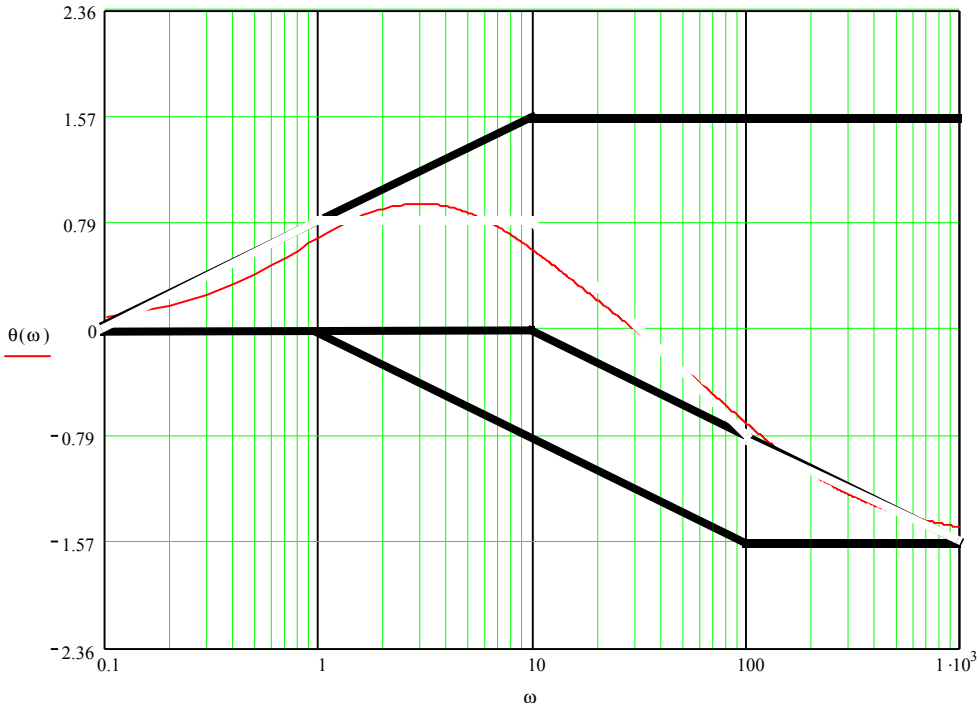
a) Betrag

Lösung:



a) Phase

Lösung:



Aufgabe 5: (Maximale Punktzahl: 10) Erreichte Punktzahl: _____

Ein idealer 90° Phasenschieber hat den Frequenzgang:

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)} & \omega > 0 \\ 0 & \omega = 0 \\ e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)} & \omega < 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Impulsantwort h(t)=$F^{-1}\{H(j\omega)\}$. Benutzen sie dabei die Beziehungen:

$$sign(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ 0 & \omega = 0 \\ -1 & \omega < 0 \end{cases}$$

$$sign(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{j\omega}$$

Ihre Lösung:

$$H(j\omega) = -j \cdot sign(\omega)$$

direkt aus Tabelle

$$\frac{1}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet -j\pi sign(w)$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$

oder mit Dualitätsprinzip

$$sign(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{j\omega}$$

$$\frac{2}{jt} \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi sign(-\omega)$$

$$sign(-\omega) = -sign(\omega)$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$

Aufgabe 6: (Maximale Punktzahl: 20) Erreichte Punktzahl: _____

Ein kausales LTI System wird durch die folgende DGL beschrieben.

$$\ddot{y}(t) - 6\dot{y}(t) + 25y(t) = \dot{x}(t) - 3x(t)$$

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion H(s)
- Zeichnen Sie das Pol-Nullstellendiagramm (inkl. Konvergenzbereich)
- Bestimmen Sie die Impulsantwort h(t)
- Zeichnen Sie ein zugehöriges Blockdiagramm
- Ist das System stabil?

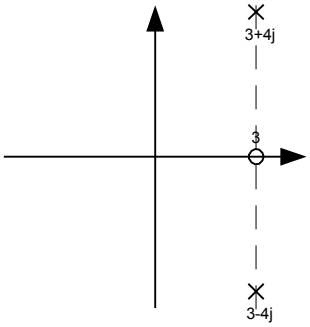
Ihre Lösung:

a) Übertragungsfunktion H(s)

$$H(s) = \frac{s-3}{s^2 - 6s + 25}$$

b) Pol-Nullstellendiagramm

$$H(s) = \frac{s-3}{(s-3+4j)(s-3-4j)}$$



c) Impulsantwort h(t)

$$H(s) = \frac{s-3}{s^2 - 6s + 25} = \frac{s-3}{(s-3)^2 + 16}$$

Aus Tabelle:

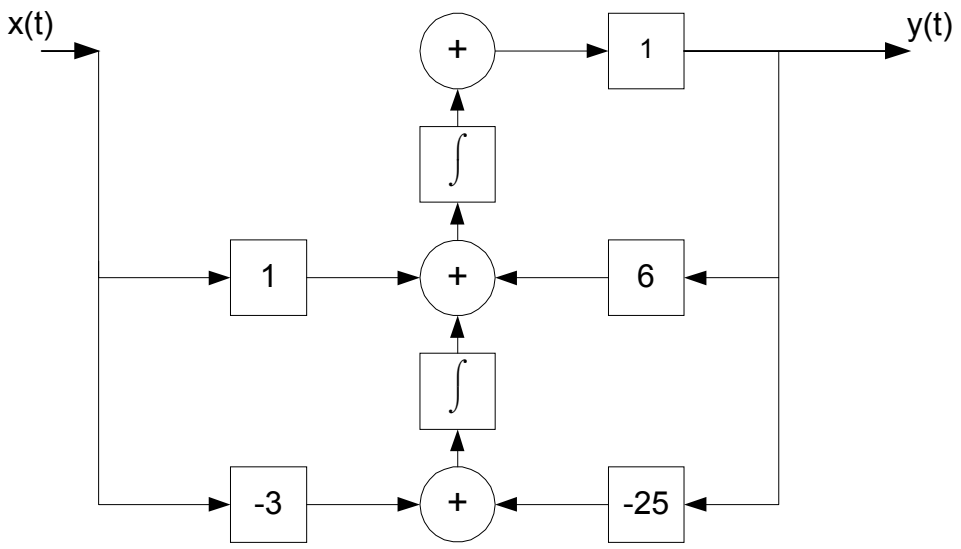
$$\frac{\text{s+a}}{(\text{s+a})^2 + \omega_0^{\ 2}} \bullet\!\!-\!\!\circ e^{-at} \cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow$$

$$h(t) = e^{3t} \cos(4t)\varepsilon(t)$$

d) Blockdiagramm

z.B. Direktform III



e) ☐ **stabil**
☒ **nicht stabil**

Begründung:

Pol in der rechten Halbebene.

Aufgabe 7: (Maximale Punktzahl: 20) **Erreichte Punktzahl: _____**

Ein periodisches Rechtecksignal x(t) mit der Frequenz 1 MHz wird mit einem Cosinussignal u(t) mit der Frequenz f_0=7,5 MHz multipliziert (gemischt). Das Ergebnis wird mit einem idealen Tiefpassfilter mit der Grenzfrequenz f_g=700 kHz gefiltert.

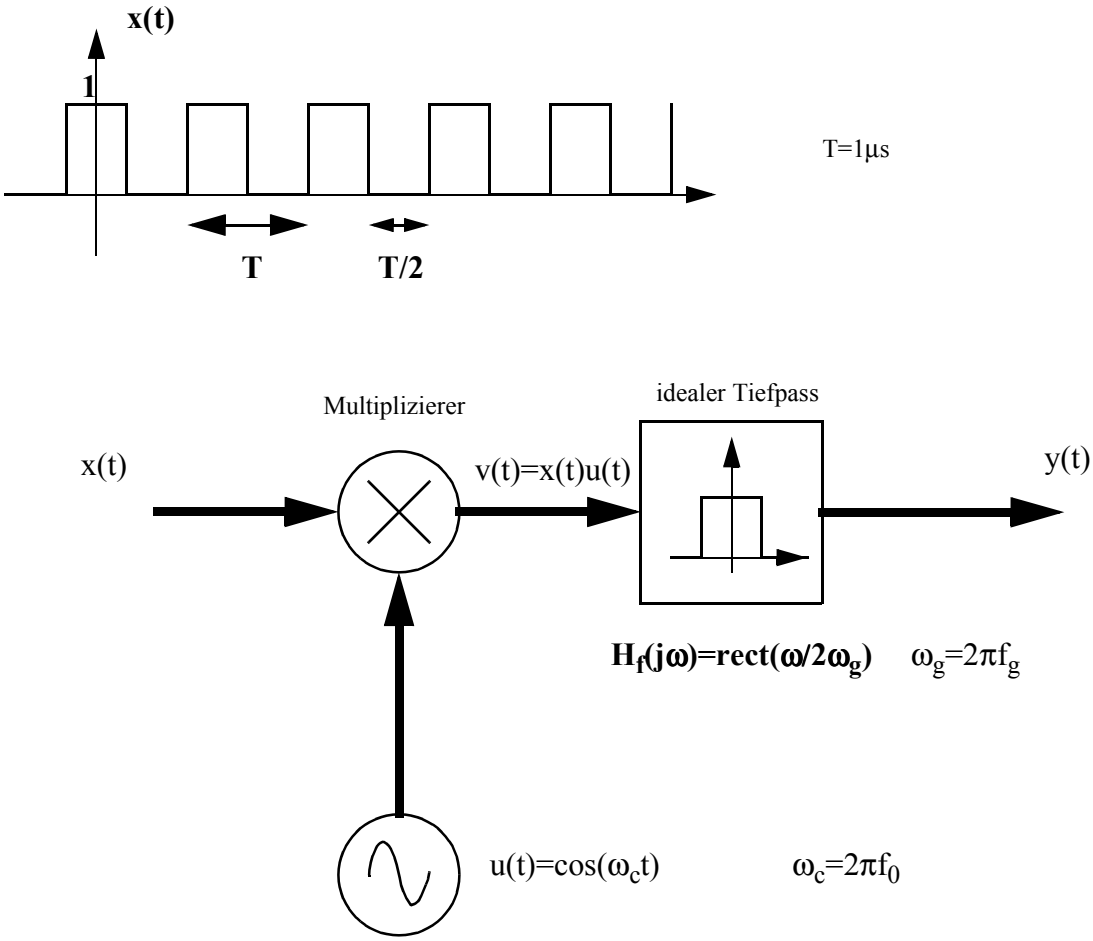


Bild 3

- Bestimmen Sie das Spektrum des Eingangssignals $X(j\omega)$.
- Bestimmen Sie das Spektrum $V(j\omega)$ am Ausgang des Multiplizierers.
- Bestimmen Sie das Spektrum $Y(j\omega)$ des Ausgangssignals.
- Bestimmen Sie y(t).
- Wie kann durch Veränderung der Signalform von x(t) die Amplitude des Ausgangssignals y(t) vergrößert werden.

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die Spektren graphisch.

Lösung: Analytisch

$$x(t) = rect\left(\frac{2t}{T}\right) * f_r \perp\perp\perp (tf_r) \qquad f_r = \frac{1}{T}$$

Mit Faltungsatz und Tabelle

$$X(j\omega) = \frac{T}{2} si\left(\frac{\omega T}{4}\right) \cdot \perp\perp\perp \left(\frac{\omega}{2\pi f_r}\right)$$

$$U(j\omega) = \pi\left[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$v(t) = x(t) \cdot u(t)$$

Mit Multiplikationsatz

$$V(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * U(j\omega)$$

$$V(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X\left(j(\omega+\omega_0)\right) + X\left(j(\omega-\omega_0)\right)\right]$$

$$V(j\omega) = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \frac{T}{2} si\left(\frac{(\omega+\omega_0)T}{4}\right) \cdot \perp\perp\perp \left(\frac{(\omega+\omega_0)}{2\pi f_r}\right) \\ + \frac{T}{2} si\left(\frac{(\omega-\omega_0)T}{4}\right) \cdot \perp\perp\perp \left(\frac{(\omega-\omega_0)}{2\pi f_r}\right) \end{array}\right]$$

$$Y(j\omega) = H_f(j\omega) \cdot V(j\omega)$$

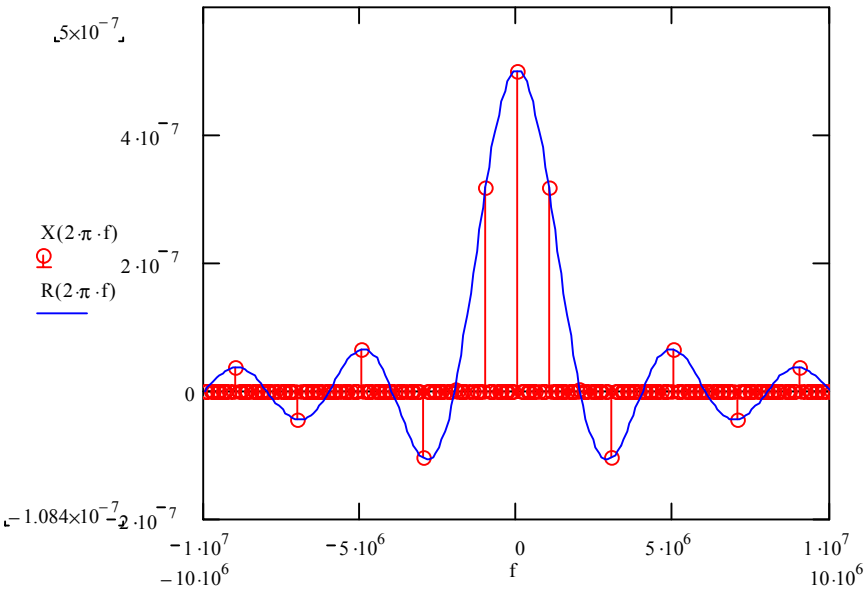
Aus Graphik ist ersichtlich,

daß nur die zwei Delta Impulse bei +- 500 kHz das Filter passieren

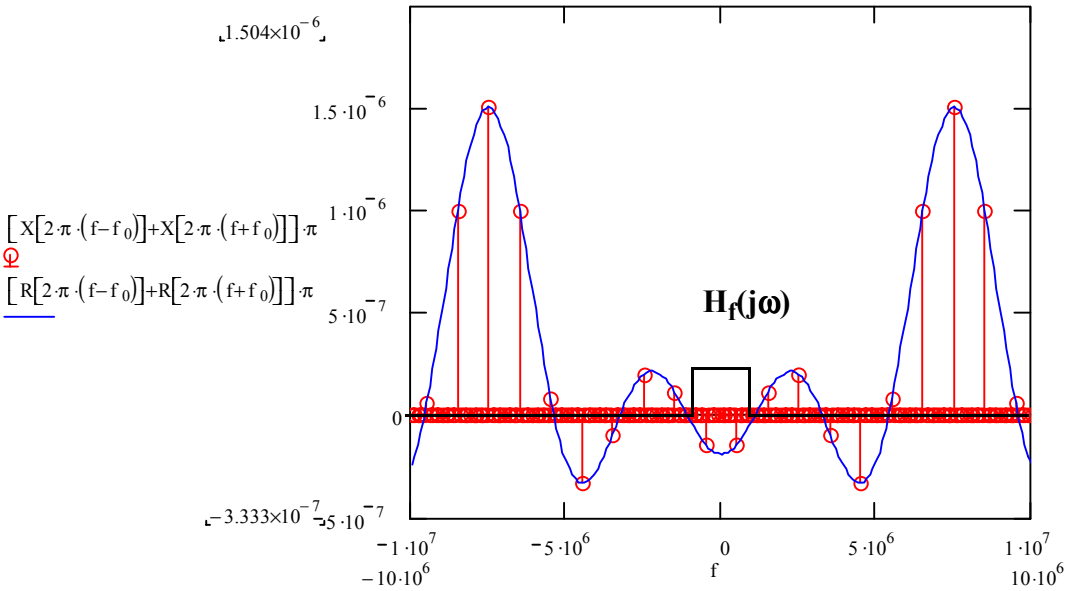
$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \frac{T}{2} si\left(\frac{\left(-2\pi \cdot 500 \cdot 10^3 + \omega_0\right)T}{4}\right) \cdot 2\pi f_r \delta\left(\omega + 2\pi \cdot 500 \cdot 10^3\right) \\ + \frac{T}{2} si\left(\frac{\left(2\pi \cdot 500 \cdot 10^3 - \omega_0\right)T}{4}\right) \cdot 2\pi f_r \delta\left(\omega - 2\pi \cdot 500 \cdot 10^3\right) \end{array}\right]$$

$$y(t) = 2 \cdot T \cdot f_r \cdot si\left(\frac{\left(-2\pi \cdot 500 \cdot 10^3 + \omega_0\right)T}{4}\right) \cdot \cos\left(2\pi \cdot 500 \cdot 10^3 t\right)$$

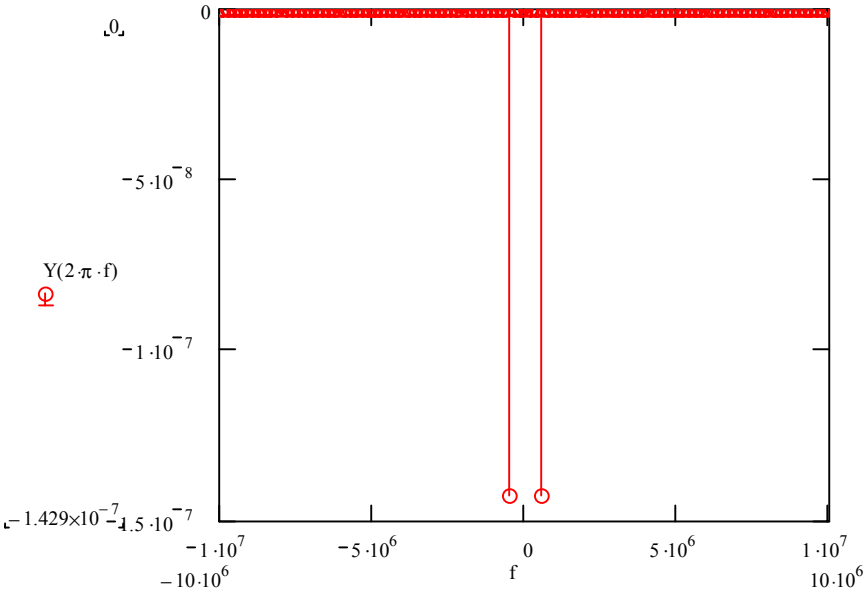
X(jω)


5×10⁻⁷
4·10⁻⁷
2·10⁻⁷
0
−1.084×10⁻⁷
−2·10⁻⁷
X(2·π·f)
R(2·π·f)
−1·10⁷
−10·10⁶
−5·10⁶
0
5·10⁶
1·10⁷
10·10⁶
f

V(jω)


1.504×10⁻⁶
1.5·10⁻⁶
1·10⁻⁶
5·10⁻⁷
0
−3.333×10⁻⁷
−5·10⁻⁷
[X[2·π·(f−f0)]+X[2·π·(f+f0)]]·π
[R[2·π·(f−f0)]+R[2·π·(f+f0)]]·π
Hf(jω)
−1·10⁷
−10·10⁶
−5·10⁶
0
5·10⁶
1·10⁷
10·10⁶
f

Y(jω)



Die Ausgangsamplitude kann durch Veränderung des Tastverhältnisses erhöht werden.