Verkehrstheorie

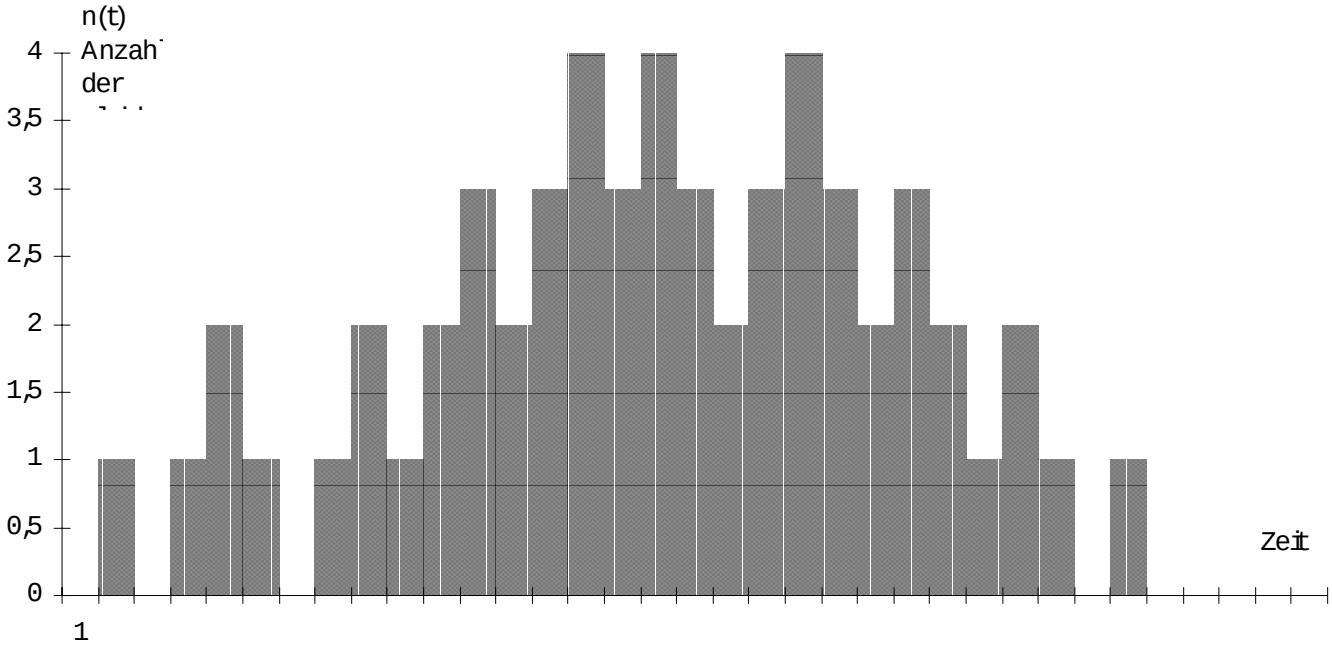
Verkehrsmenge = traffic volume [Erls] = Verkehrsfluß [Erl] * Zeit [s]

1 Leitung: maximaler Verkehrsfluß = 1 Erl
max. Verkehrsmenge in einer Stunde = 1 Erlh (Erlang-Stunde)

Bei mehreren Servern (Bedieneinheiten) gilt:

$$Y_m = \int_t^{t+T} n(t)\,dt$$

Y_m = Verkehrsmenge [Erls]
T = Meßzeit
n(t) = Zahl der belegten Bedieneinheiten



Hauptverkehrsstunde HVStd

ist die Stunde am Tag, in der die größte Verkehrsmenge zu bewältigen ist, das ist das Maximum von 4 aufeinanderfolgenden ¼-Stunden-Werten.

Verkehrswert Y = Verkehrsmenge / Meßzeit T

Wird in der dimensionslosen Größe Erlang [Erl] gemessen.

$$Y = \frac{Y_m}{T} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} n(t)\, dt \qquad T = \text{Meßzeit}$$

A = **Angebot** (Verkehrsangebot, offered traffic) $A = c_A \cdot t_m$

= Verkehr, wenn alle Belegungsversuche erfolgreich wären.

c_A = Belegungsversuche pro Sekunde (Ankünfte)

t_m = mittlere Belegungsdauer [s]

Y = **Durchsatz** (Belastung, carried traffic) $Y = c_y \cdot t_m$

= Verkehrswert der erfolgreichen Belegungen.

c_y = erfolgreiche Belegungen pro Sekunde

t_m = mittlere Belegungsdauer [s]

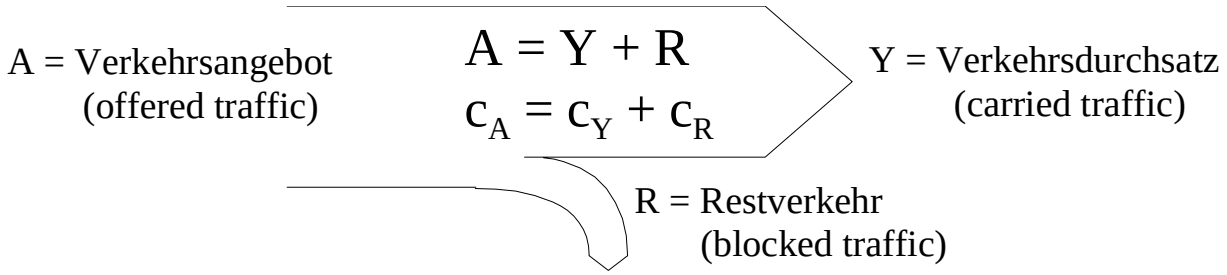
R = **Restverkehr** (blocked traffic) $R = c_R \cdot t_m = A - Y$

= Verkehrswert, den die Blockierten verursacht hätten.

c_R = abgewiesene Belegungsversuche pro Sekunde

t_m = mittlere Belegungsdauer [s]

B = **Blockierwahrscheinlichkeit**, Blockierung $B = \frac{c_R}{c_A} = \frac{R}{A} = \frac{A - Y}{A}$



Binominal Verteilung

p = Wahrscheinlichkeit, daß Zufallsexperiment eintrifft (Mittelwert)

n = Zahl der durchgeführten Versuche

x = Zahl der positiven Ergebnisse

f(x) = Wahrscheinlichkeit, daß Ereignis bei n Versuchen genau x-mal eintrifft.

Permutation — Wahrscheinlichkeit, daß es eintrifft — nicht eintrifft

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!} \qquad 0! = 1$$

Anwendung auf Verkehr:

Zufallsexperiment: Im Zeitintervall τ kommt eine Leitungsbelegung oder nicht

Problem: maximal 1 Leitungsbelegung pro Zeitintervall τ

Abhilfe: τ so klein wählen, daß nur 1 Leitungsbelegung möglich

Beispiel:

Gegeben: In 10 Minuten erfolgt im Mittel eine Leitungsbelegung.

Gesucht: Wahrscheinlichkeit f(x) für genau x-Belegungen in 10 Minuten.

1. Ansatz: τ = 1 Minute, p = 0,1 Leitungsbelegungen pro Minute (pro τ)
10 Minuten = 10 $\tau \rightarrow$ n = 10

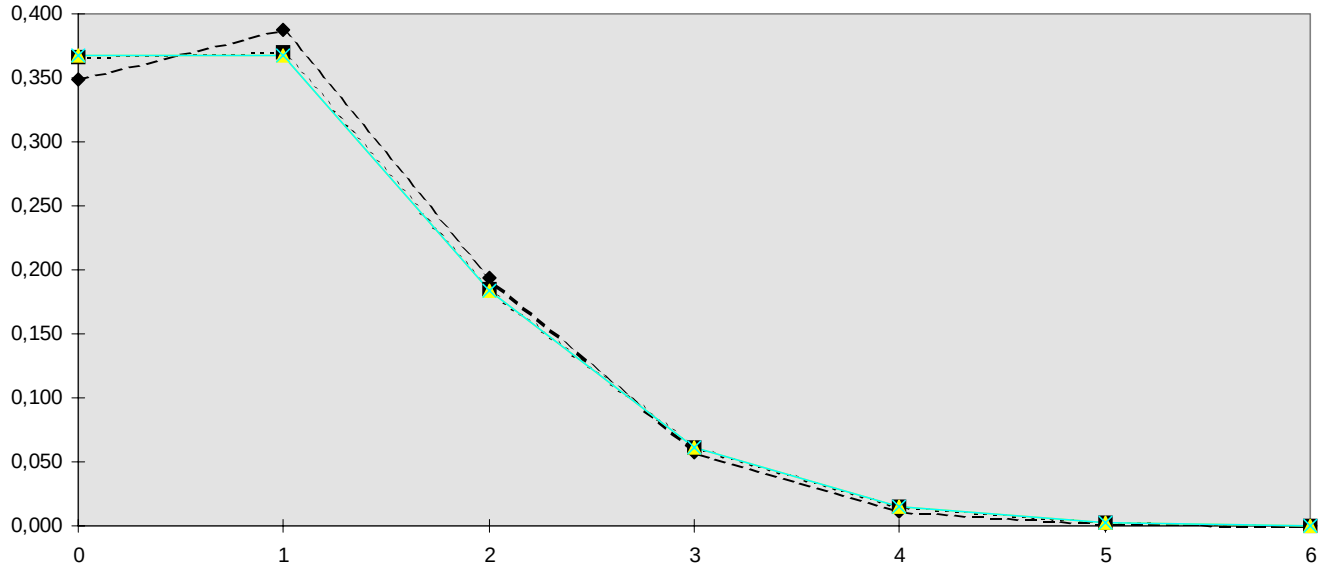
2. Ansatz: τ = 0,1 Minute, p = 0,01 Leitungsbelegungen pro Minute (pro τ)
10 Minuten = 100 $\tau \rightarrow$ n = 100

3. Ansatz: τ = 0,01 Minute, p = 0,001 Leitungsbelegungen pro Minute (pro τ)
10 Minuten = 1000 $\tau \rightarrow$ n = 1000

4. Ansatz: τ = 0,001 Minute, p = 0,0001 Leitungsbelegungen pro Minute
10 Minuten = 10.000 $\tau \rightarrow$ n = 10.000

p	0,1	0,01	0,001	0,0001
n	10	100	1.000	10.000
x	f(x)	f(x)	f(x)	f(x)
0	0,349	0,366	0,368	0,368
1	0,387	0,370	0,368	0,368
2	0,194	0,185	0,184	0,184
3	0,057	0,061	0,061	0,061
4	0,011	0,015	0,015	0,015
5	0,001	0,003	0,003	0,003
6	0,000	0,000	0,001	0,001

Je kleiner das Zeitintervall τ gewählt wird, um so genauer ist das Ergebnis.
Aber wegen der Fakultäten sehr schwer zu berechnen !



Poisson - Verteilung

Poisson-Verteilung entsteht aus Binominalverteilung:

das betrachtete Zeitintervall τ : $\tau \rightarrow 0$ Zeitraum T für das Ergebnis: $T = n\tau$

Zahl der Experimente n (=Zahl der τ) $n \rightarrow \infty$

Wahrscheinlichkeit p für das Ereignis: $p \rightarrow 0$

Grenzübergang so, daß Mittelwert μ konstant: $\mu = n\,p$

$$\mu = n\,p \quad \rightarrow \quad p = \frac{\mu}{n} \quad \rightarrow \quad p^x = \frac{\mu^x}{n^x}$$

Binominalverteilung:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x \quad (1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!}$$

$$(1-p)^{n-x} = (1-\frac{\mu}{n})^{n-x} = (1-\frac{\mu}{n})^n\,(1-\frac{\mu}{n})^{-x}$$

es folgt also:

$$f(x) = \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!} \quad \frac{\mu^x}{n^x} \quad (1-\frac{\mu}{n})^n (1-\frac{\mu}{n})^{-x}$$

für $n \rightarrow \infty$ geht $\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{n^x} = \left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\ldots\left(\frac{n-x+1}{n}\right) \rightarrow 1$ und $(1-\frac{\mu}{n})^n \rightarrow e^{-\mu}$ und $(1-\frac{\mu}{n})^{-x} \rightarrow 1$

Es folgt die **Poisson-Verteilung**:

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!} \quad e^{-\mu}$$

μ ist mittlere Ankunftswahrscheinlichkeit.

Beispiel:

Gegeben: In einem Supermarkt betreten pro Stunde 60 Kunden das Geschäft. $\rightarrow$ $\mu = 1\ \text{min}^{-1}$.

Gesucht: Wahrscheinlichkeit f(x) für genau x-Kunden in 1 Minute.

Die Minute wird in n kleine Zeitintervalle τ geteilt, wobei gilt: $\mu = n\ p$.

	Binominalverteilung			**Poisson-verteilung**
τ	1/4 min	1/8 min	1/100 min	
n	4	8	100	
p	0,25	0,125	0,01	$\mu = 1$
x	f(x)	f(x)	f(x)	f(x)
0	0,316	0,344	0,366	0,368
1	0,422	0,393	0,370	0,368
2	0,211	0,196	0,185	0,184
3	0,047	0,056	0,061	0,061
4	0,004	0,010	0,015	0,015
5		0,001	0,003	0,003

Ankunftsrate / Bedienrate

Ankünfte sind in der Praxis meist Poisson-verteilt,

sofern die Ankünfte voneinander unabhängig sind (ohne Gedächnis).

Beispiele für random access:
- Anforderungen an ein Betriebssystem (Interrupts)
- ankommende Personen an einem Postschalter
- ankommende Gespräche an einer Vermittlungsstelle
- Sendeanforderungen im Ethernet

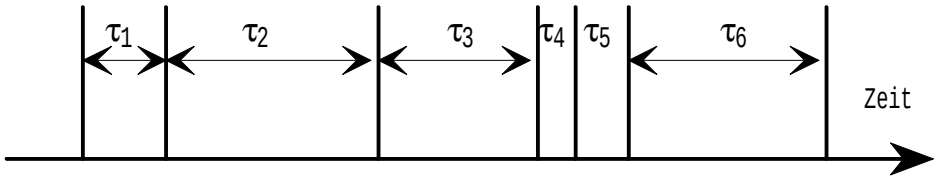
μ = Mittelwert, bestimmt die Verteilung. bezieht sich auf betrachtetes Zeitintervall T.

λ = normierte Ankunftsrate oder 'arrival rate' = arrivals pro Sekunde $\mu = \lambda T$

Inter arrival time

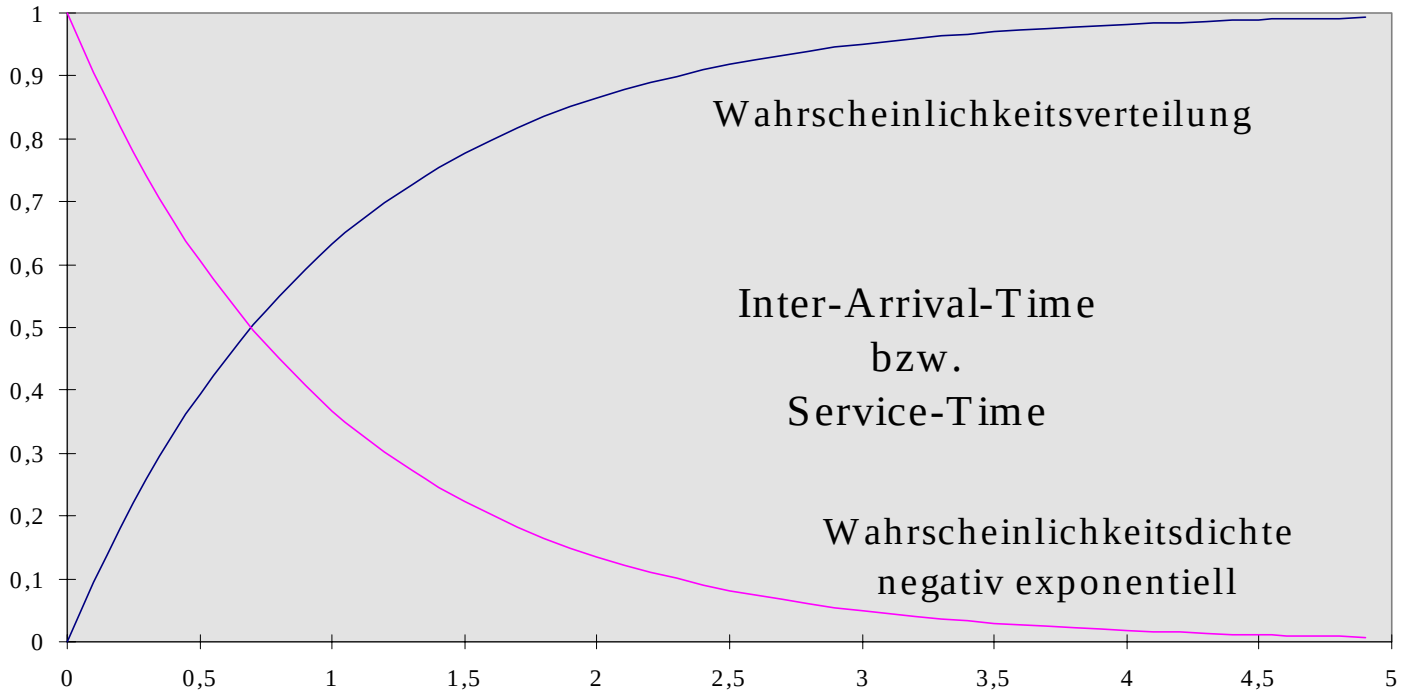
Die inter-arrival-time ist negativ exponentiell verteilt

$$f_\tau(\tau) = \lambda e^{-\lambda \tau}$$

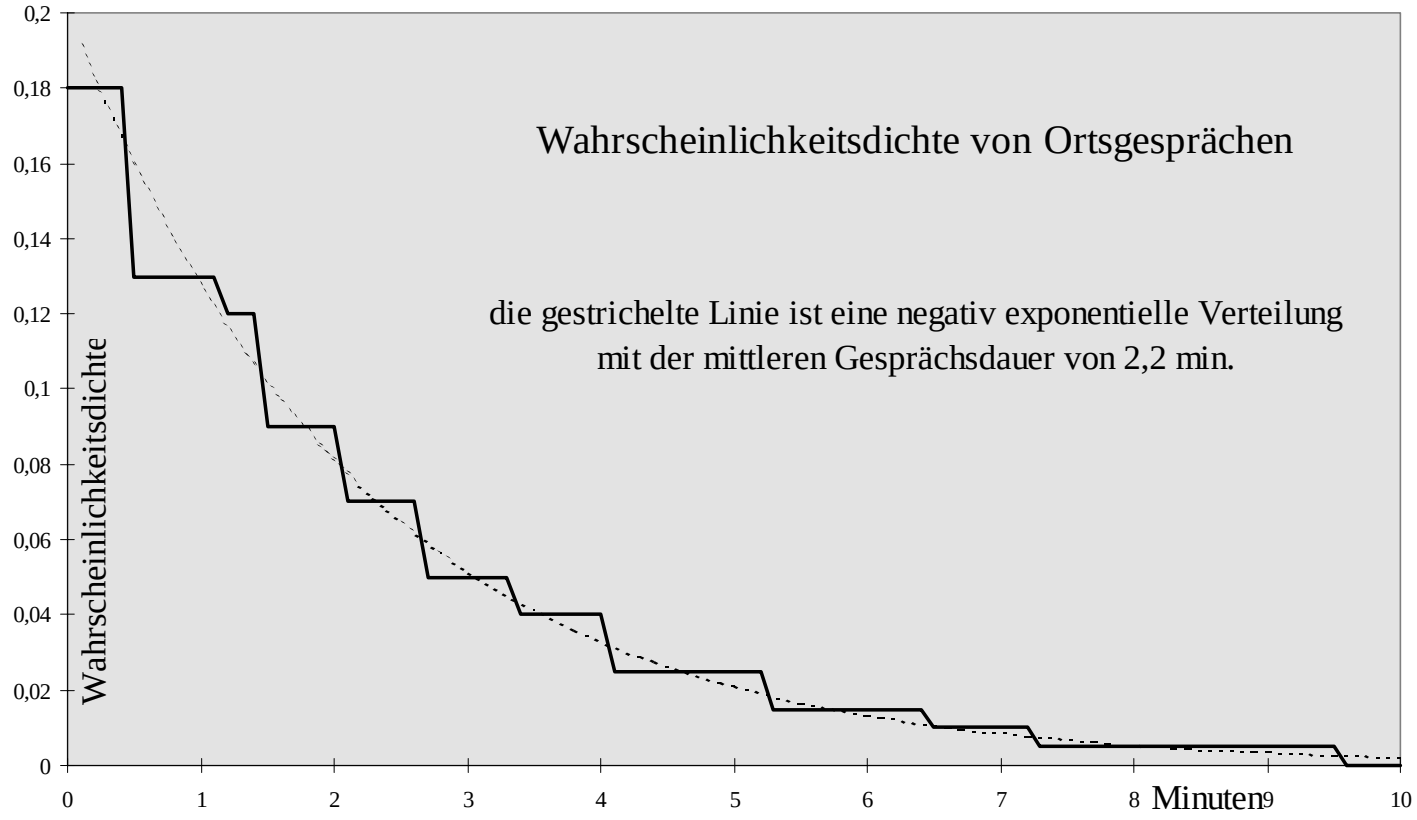


mittlere inter-arrival-time $E(\tau) = \int_0^\infty \tau \, f_\tau(\tau) \, d\tau = \frac{1}{\lambda}$

Varianz der inter-arrival-time $\sigma_\tau^2 = \frac{1}{\lambda^2}$



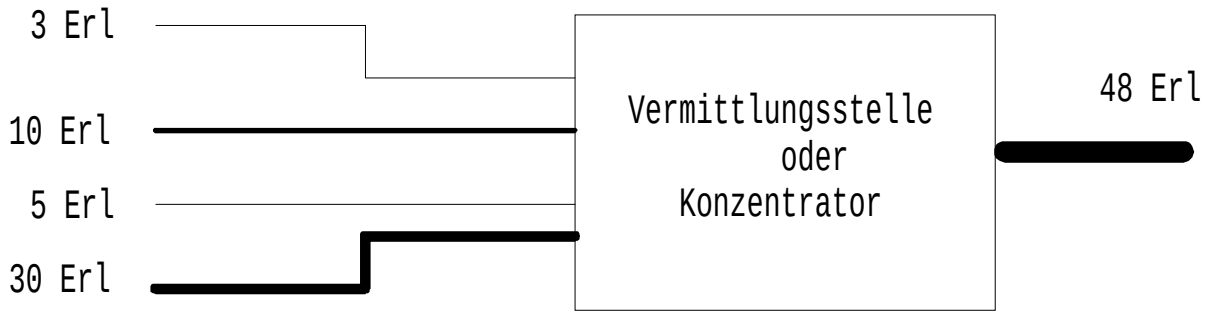
Wahrscheinlichkeitsverteilung F(τ) und Wahrscheinlichkeitsdichte f (τ) der inter-arrival-time bzw. Bedienzeit τ.



Überlagerung von Poisson-Quellen

Überlagerung von m Poisson-Quellen mit $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_m$ --> poissonverteilter Verkehr.

Die Ankunftsrate ist die Summe der einzelnen Verkehre: $\lambda_{gesamt} = \sum_i \lambda_i$



Ergodischer Prozeß

Ermittelung des Verkehrswerts bei einem Bündel von Leitungen:

1. zu einem beliebigen Zeitpunkt werden alle Leitungen gleichzeitig betrachtet

Bündel von 36 Leitungen,

24 sind belegt

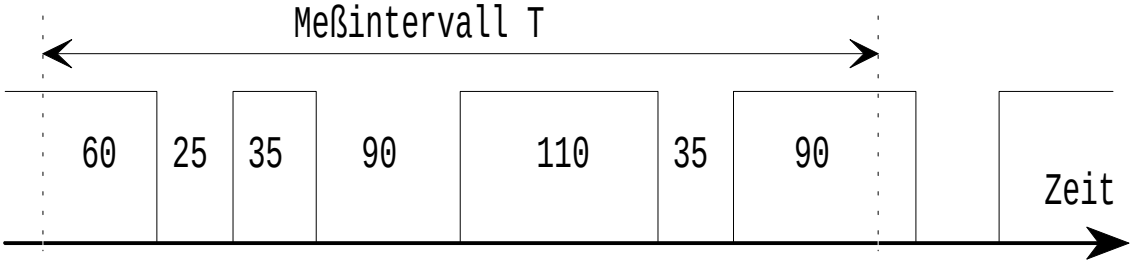
--> Verkehrswert = 24 Erl

*		*	*		*
	*		*	*	*
*	*		*	*	
*	*	*	*		*
*	*		*		*
*		*	*		

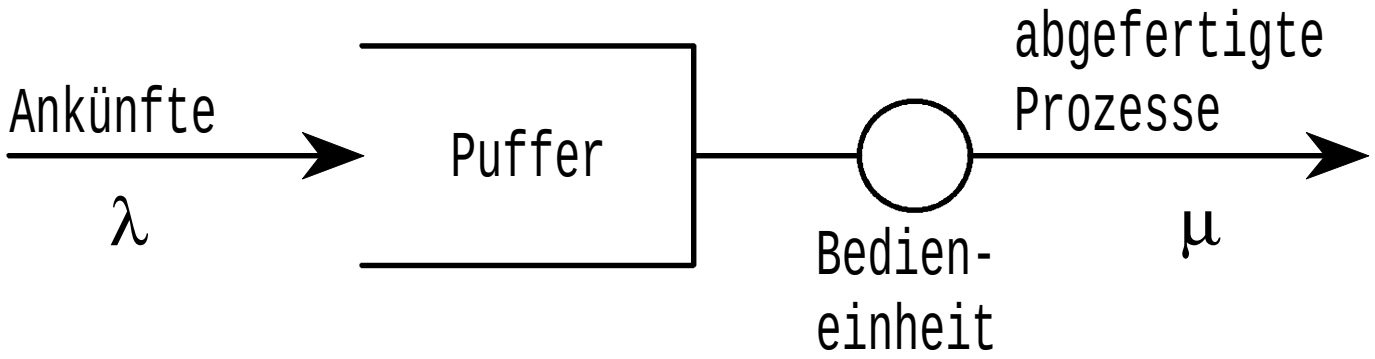
2. der Verkehrswert einer Leitung wird bestimmt und mit der Bündelstärke multipliziert

T = 500 s, davon 350 s belegt. Verkehrswert Leitung = 350/500 = 0,7 Erl.

36 Leitungen im Bündel Verkehrswert Bündel = 36 * 0,7 = 25,2 Erl.



Warteschlangentheorie



Bezeichnung von Warteschlangen: A / B / C

A = Verteilung des Ankunftsprozesses,
B = Verteilung des Bedienproz. (server)
C = Anzahl der Bedieneinheiten.

- M = Poisson-Verteilung, die wichtigste weil am häufigsten vorkommende Verteilung in der Praxis. Sie ist gekennzeichnet durch die negativ exponentielle Verteilung der 'interarrival time' bzw. 'service time'.
- D = Deterministische Verteilung mit konstanter 'interarrival time' bzw. 'service time'.
- G = General oder beliebige Verteilung der 'interarrival time' bzw. 'service time'.

M/M/1 - Queue

Negativ exponentielle Verteilung der 'interarrival time' und der 'service time'.
1 Bedieneinheit (server).

λ Ankunftsrate = Mittelwert der Ankünfte = 1/(Mittelwert der 'interarrival time')
μ Bedienrate = Mittelwert der pro Sekunde abgefertigten Kunden
= 1/(Mittelwert der Bedienzeit)

Stabilität: $\mu > \lambda$ sonst wächst die Warteschlange ins unendliche.

Kunden im System: $$N = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

N = mittlere Länge der Warteschlange inclusive des Kunden im Server

mittlere Wartezeit: $$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{N}{\lambda}$$

Formel von Little: $$N = \lambda \cdot T$$

Datenübertragung

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{N}{\lambda}$$ läßt sich auch auf die Übertragung von Daten anwenden.

μ Bedienrate = Kunden/Sekunde → Dienstleistungsrate in Paketen/Sekunde
λ Ankunftsrate = Ankünfte/Sekunde → erzeugte Pakete/Sekunde

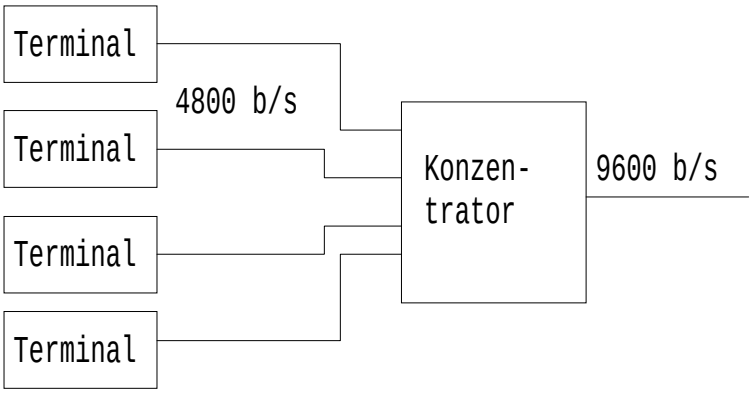
x = $\nu e^{-\nu x}$ = Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Größe der Datenpakete x,
d.h. Länge der Datenpaktete negativ exponentiell verteilt
$1/\nu$ = mittlere Paketlänge in Bits/Paket; Mittelwert der PDF $\nu e^{-\nu x}$
C = Kapazität der Übertragungsstrecke in Bits/Sekunde.
νC = Dienstleistungsrate in Paketen/Sekunde (= C / $1/\nu$).

mittlere Warte + Übertragungszeit = $$T = \frac{1}{\nu C - \lambda}$$

Beispiel Terminalkonzentrator:

Eingang: 4 Terminals mit je 4800b/s,
poissonverteilt,
Ankunftsrate λ = 2 Pakete/s
mittler Paketgröße
$1/\nu$ = 1000 Bits/Paket.

Ausgang: 9600 b/s.



Gesucht: mittlere Zeit zwischen der Ankunft des letzten Bits eines Datenpaketes am Konzentrator bis zur Übertragung dieses Bits auf der Ausgangsleitung?

Lösung: λ_i = 2 Pakete/s und ν C = 9.6 Pakete/s.
Überlagerung der 4 Leitungen am Eingang ergibt λ = 8 Pakete/s.

Die Übertagungszeit beträgt also $T = \frac{1}{\nu C - \lambda}$ = 1/(9,6 - 8) = 0,625 s.

Die mittlere Anzahl von Paketen im Konzentrator: N = 8/(9,6 - 8) = 5.

M/M/m - Queue

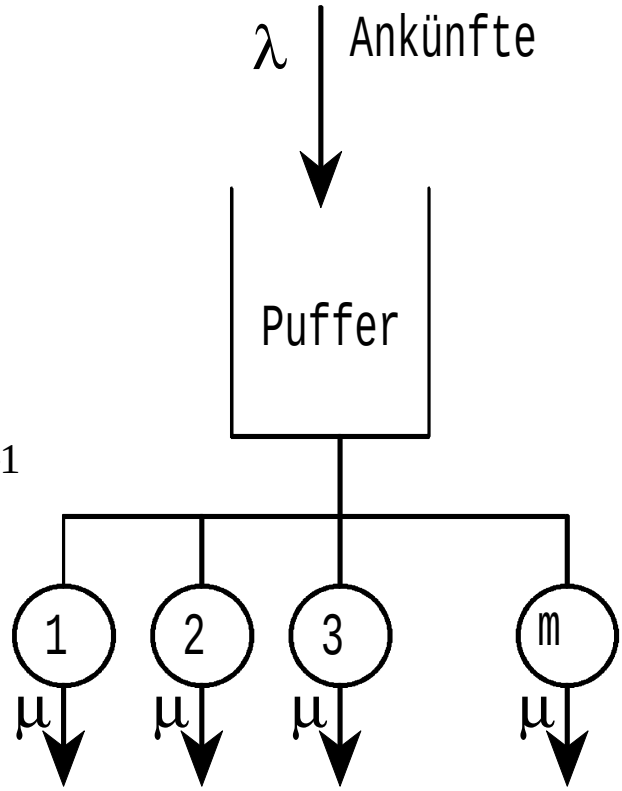
Warteschlangensystem mit m Servern

Wahrscheinlichkeit für k Kunden im System:

$$p_k = p_0 \frac{\lambda^k}{\mu^k \cdot k!} \qquad \text{für } k \leq m$$

$$p_k = p_0 \frac{\lambda^k \, m^m}{\mu^k \, m^k \, m!} \qquad \text{für } k \geq m$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{\mu^k \, k!} + \frac{\lambda^m}{\mu^m \, m! \, (1 - \lambda / m\mu)} \right]^{-1}$$



$k \leq m$ Puffer leer
$k \geq m$ alle Server belegt

Blockierungswahrscheinlichkeit:

Wahrscheinlichkeit, daß ein neuankommender Kunde auf einen Server warten muß $k = m$

$$p_{k=m} = p_0 \frac{\lambda^m}{\mu^m \cdot m!} = p_0 \frac{A^m}{m!} \qquad \text{Erlang-C Formel}$$

$A = \lambda / \mu$ = Verkehrsangebot = Verkehrswert [Erl] des ankommenden Verkehrs

Verlustsystem mit m Servern

Poissonverteilung: P(n,T) ist die Wahrscheinlichkeit, daß im Zeitraum T genau n Ankünfte erfolgen.

$$P(n,T) = \frac{(c_A\,T)^n}{n!}\,e^{-c_A T}$$

Für T = t_m erhält man wegen $A = c_A \cdot t_m$ die Wahrscheinlichkeit P(n), daß zu einem betrachteten Zeitpunkt genau n Belegung gleichzeitig bestehen.

$$P(n) = \frac{A^n}{n!}\,e^{-A}$$

Funktionsverlauf: $\frac{A^n}{n!}$ und Normierung auf 1 : e^{-A} => Exponentialreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (Formelsammlung)

Server (Leitungen) auf m begrenzt => neue Verteilung P(k), mit **k = 0, 1, 2, ... ,m**.

P(k) ist Poisson-Verteilung, die bei n = m abgeschnitten ist.

P(k): Wahrscheinlichkeit, daß zu einem bestimmten Zeitpunkt k Belegungen gleichzeitig bestehen (k ≤ m).

$$P(k) = \frac{A^k}{k!\cdot\sum_{i=0}^{m}\frac{A^i}{i!}} = \frac{\lambda^k}{\mu^k\cdot k!\cdot\sum_{i=0}^{m}\frac{\lambda^i}{\mu^i\,i!}}$$

Funktionsverlauf: $\frac{A^k}{k!}$ und Normierung mit Faktor: $\sum_{i=0}^{m}\frac{A^i}{i!}$

Daraus folgt für k = m (alle Server belegt) die Blockierwahrscheinlichkeit:

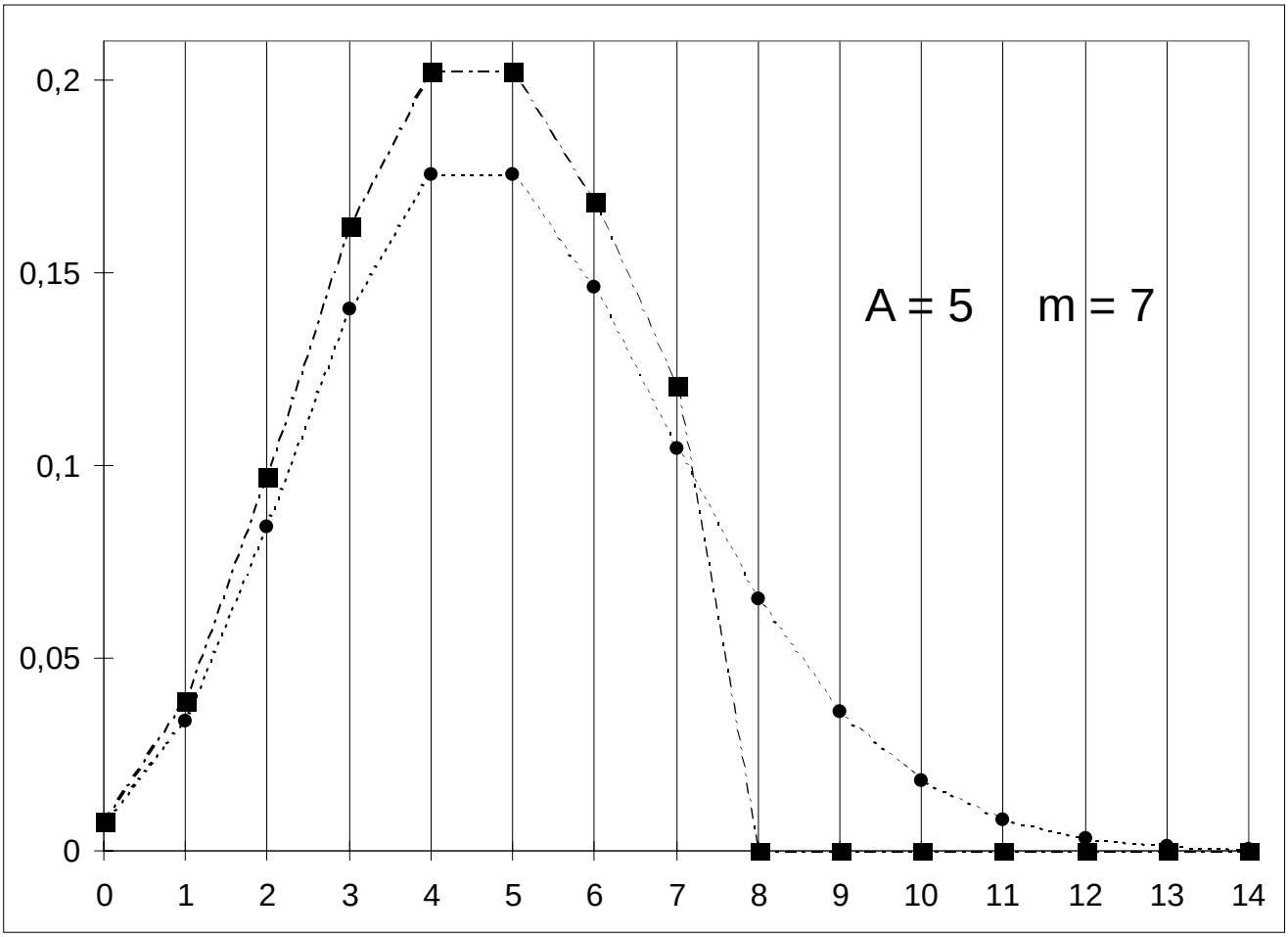
Blockierwahrscheinlichkeit,

= Erlang - B Formel = Erlangsche Verlustformel

$$P_B = \frac{A^m}{m!\cdot\sum_{i=0}^{m}\frac{A^i}{i!}} = \frac{\lambda^m}{\mu^m\cdot m!\cdot\sum_{i=0}^{m}\frac{\lambda^i}{\mu^i\,i!}}$$

Vergleich: Poisson-Verteilung $P(n) = \frac{A^n}{n!} e^{-A}$ und

Verteilung mit m-Servern $P(k) = \frac{A^k}{k! \cdot \sum_{i=0}^{m} \frac{A^i}{i!}}$



Bedingung für Formeln:

Poisson-Verkehr; kein Puffer (keine Warteschlange))

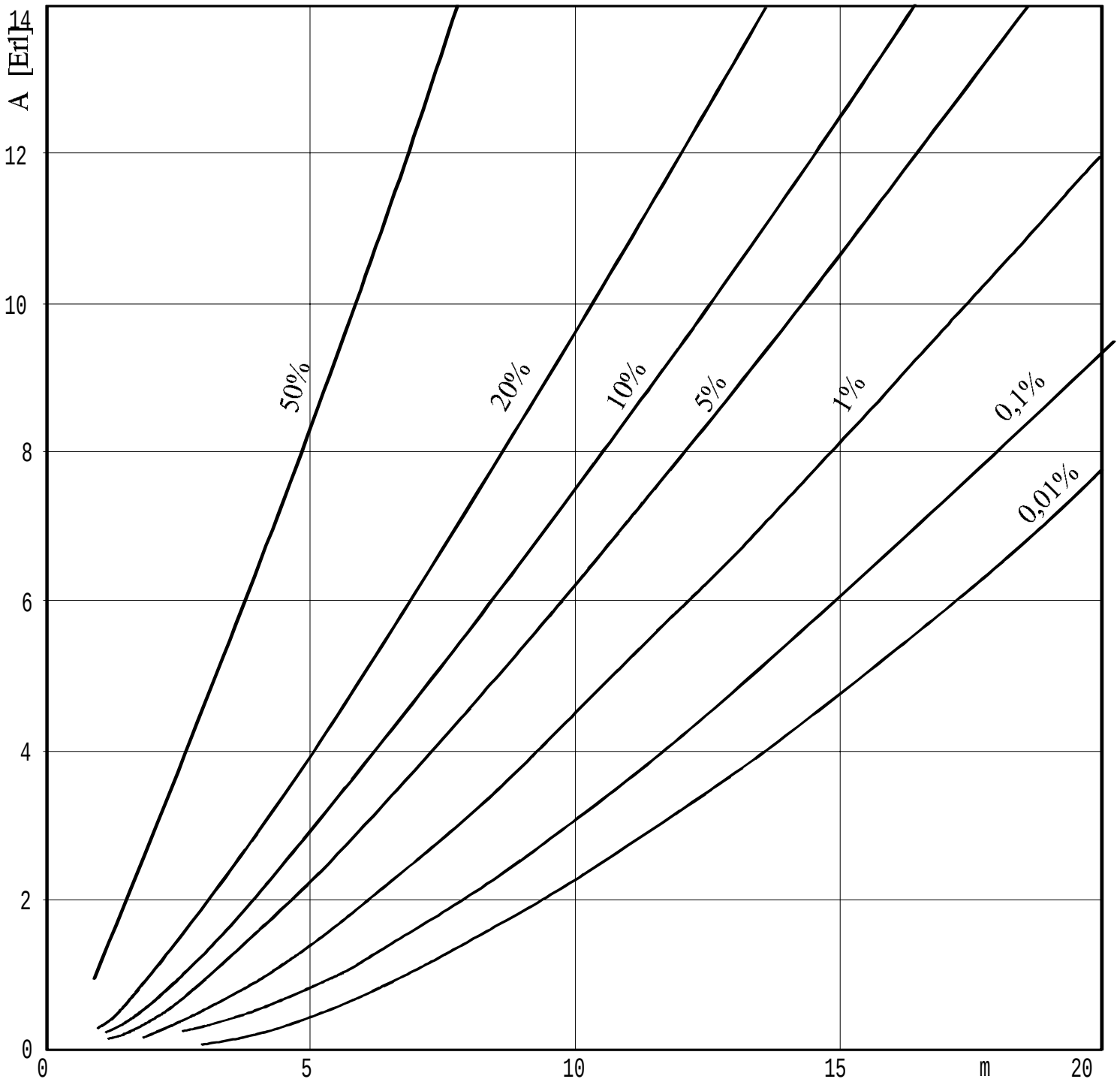
ein Teilnehmer der keine freie Leitung (=Server) vorfindet wird abgewiesen (Blockierung);
Ein abgewiesener Teilnehmer belastet das System nicht mehr (neuer Belegungsversuch)

m = Bündel aus m Leitungen (Server); k = Zahl der belegten Server $k \leq m$

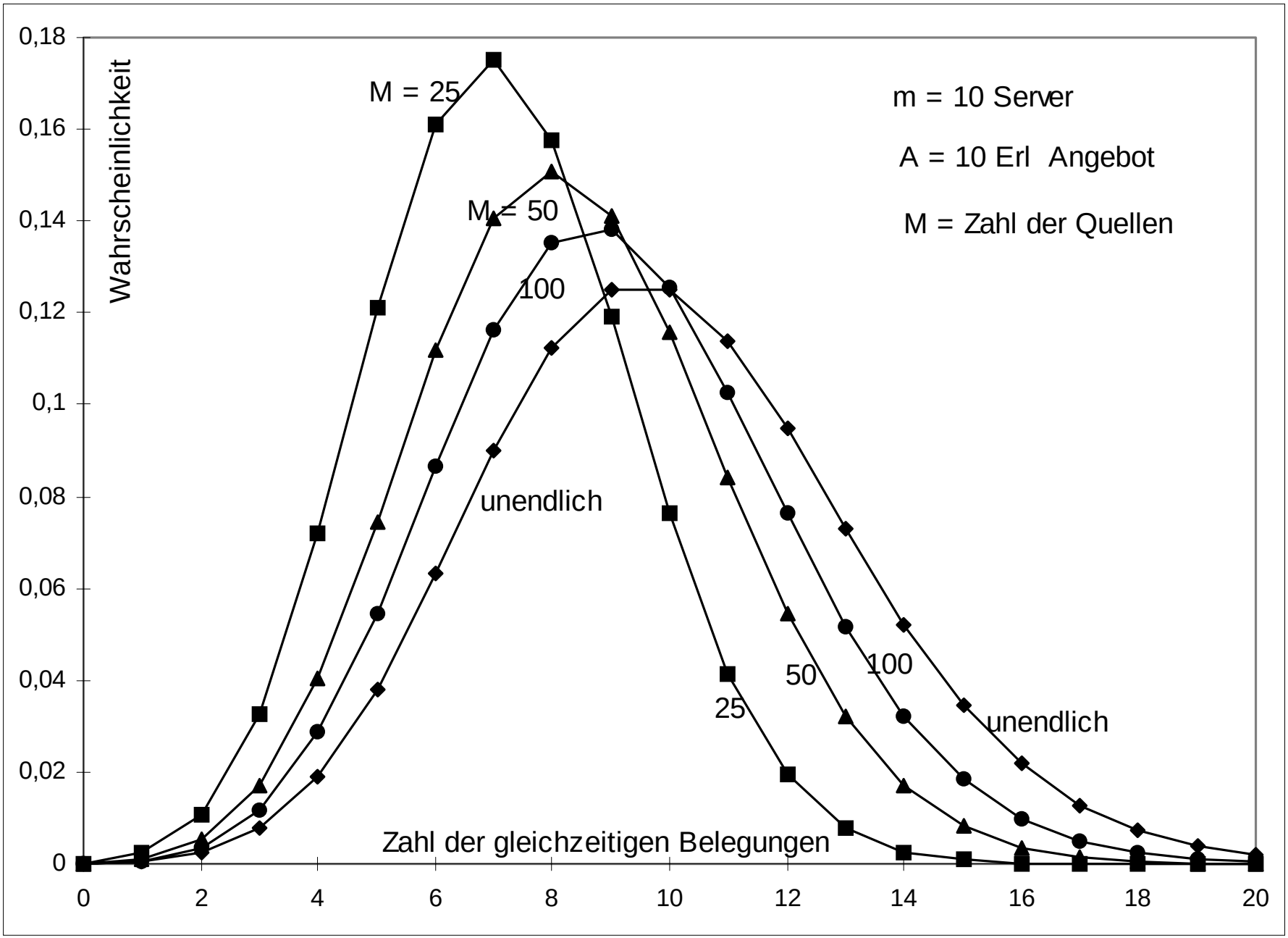
$A = \lambda / \mu$ = Verkehrsangebot = Verkehrswert [Erl] des ankommenden Verkehrs

Ist die Zahl der Verkehrsquellen endlich, dann sind der Durchsatz etwas höher und die Blockierung etwas niedriger als bei Poisson-Verkehr.

Die Poisson-Annahme ist konservativ, also eher pessimistisch.

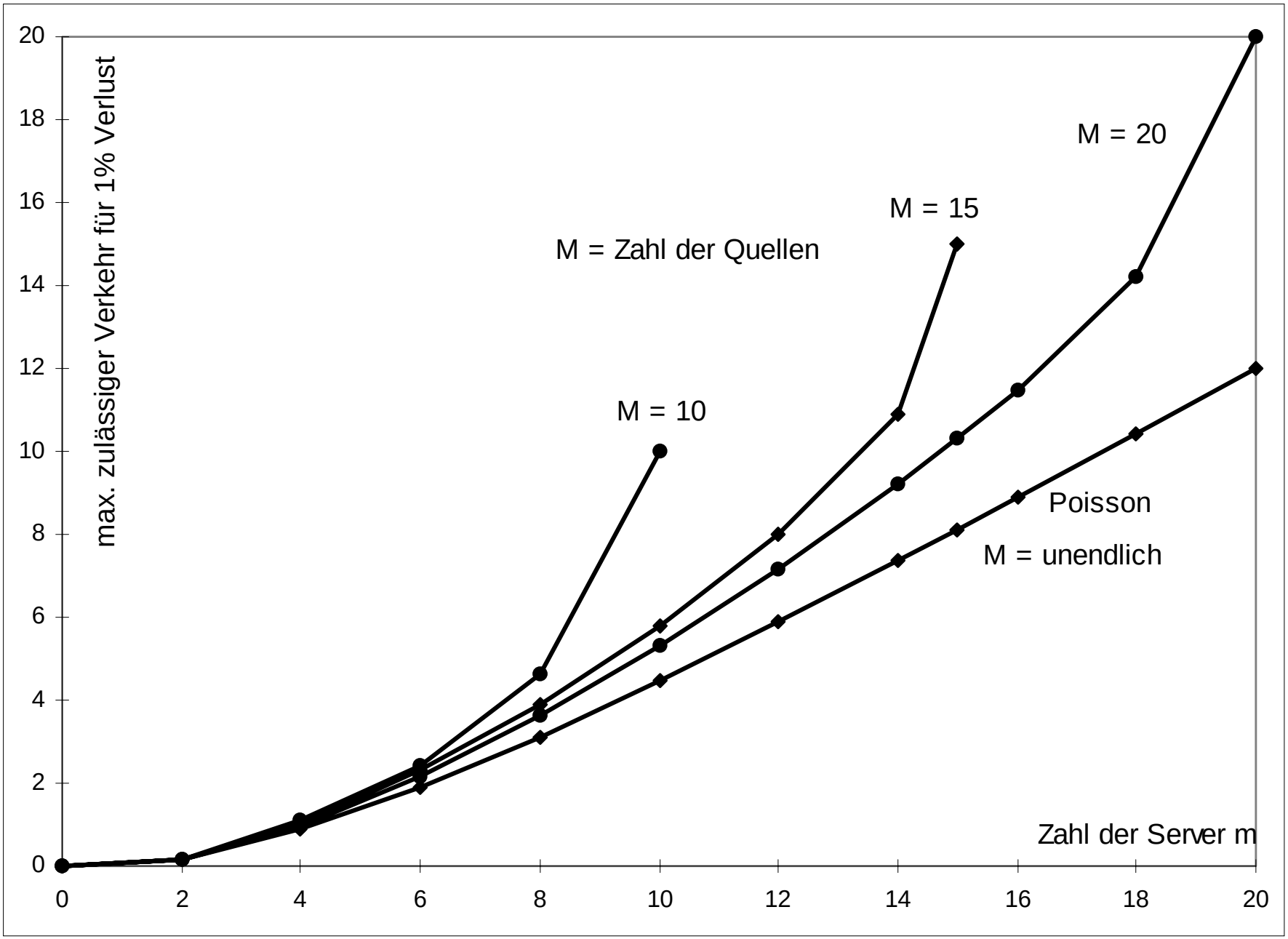


Verlustsystem mit m Servern (Erlang B)



Verlustsystem bei endlich vielen Quellen: Engset-Verteilung

Je größer M (die Zahl der Quellen) wird, desto mehr nähert sich die Engset-Verteilung der Poisson-Verteilung (M = unendlich).



Verlustsystem bei endlich vielen Quellen: Engset-Verteilung

zulässiges Angebot für eine Blockierwahrscheinlichkeit (Verlust) von 1% in Abhängigkeit der Anzahl der Server (Leitungen).

	Verlustsystem	Warte-Verlustsystem	Wartesystem
Anzahl der Warteplätze	0	w	∞
M/M/1 E{Anforderungen im System} = E{k} mittlere Anzahl von Kunden im System			$N = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}$
M/M/1 $E\{T_V\}$ = mittlere Verweilzeit			$E\{T_V\} = \lambda\, E\{k\} = \frac{1}{\mu - \lambda}$
	$\frac{\rho}{1+\rho} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\rho^s \frac{1-\rho}{1-\rho^{s+1}} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$	0
Verlustwahrscheinlichkeit	$B = \frac{A^m / m!}{\sum_{i=0}^{m} A^i / i!} \qquad A = \frac{\lambda}{\mu}$	$\frac{A^m}{m!} \frac{A^w}{m^w} \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \frac{1-(A/m)^{w+1}}{1-A/m}}$	
M/M/1 Verlustwahrscheinlichkeit P_V	$\frac{A^m}{m!} \sum_{i=0}^{w} i \left(\frac{A}{m}\right)^i p_0$	$\frac{A^m}{m!} \sum_{i=0}^{w} i \left(\frac{A}{m}\right)^i \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \frac{1-(A/m)^{w+1}}{1-A/m}}$	
M/M/m Verlustwahrscheinlichkeit P_V		$\frac{A^m}{m!} \frac{1-(A/m)^w}{1-(A/m)} \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \frac{1-(A/m)^{w+1}}{1-A/m}}$	

w = Anzahl der Warteplätze; s = Anzahl der Plätze im System, bei M/M/1: s = w+1

P_B = Blockierwahrscheinlichkeit, d.h. das System ist blockiert, alle Plätze sind belegt

P_V = Verlustwahrscheinlichkeit, d.h. Wahrscheinlichkeit, daß Anforderung abgewiesen wird weil das System blockiert ist. Ist λ unabhängig vom Systemzustand, gilt $P_V = P_B$