Praktikum Regelungstechnik

[Grundlagen des Reglerentwurfs](#)
[Regeln für die praktische Arbeit](#)
[Einstellung der Geräte](#)
[Statische Kennlinien](#)
[PT2 Glied](#)
[PID-Reglers](#)
[Darstellungsformen des PID-Reglers](#)
[Bauelementeauswahl](#)

Einstellregeln:

[Chien, Hrones und Reswick](#)
[Zeitprozentwert-Methode](#)
[Verfahren nach Ormans](#)
[Kompensation](#)
[Pol und Nullstellen](#)
[Betragsoptimum](#)

Grundlagen des Reglerentwurfs:

Der geregelte Prozess soll die in der Spezifikation festgelegten Forderungen bezüglich **Führungs-** und **Störverhaltens** erfüllen.
Dazu zählen:

- **Stabilität**
- **Stationäre Genauigkeit**
- **Transientes Verhalten**
- **Robustheit**

Gliederung eines Projektes:

- **Spezifikation**
  - **Anwendungstypische Eingangsgrößen für Führung und Störung**
  - **Festlegen der Arbeitspunkte**
  - **Stationäre Genauigkeit**
  - **Transientes Verhalten (Max. Überschwingen, Anregel- und Ausregelzeit)**
- **Modellbildung**
  - **Theoretische Analyse**
  - **Aufnahme der statischen Kennlinien**
  - **Messung der Sprungantwort, Bodediagramm**
  - **Erstellen eines Modells, Zerlegung in bekannte Blöcke**
  - **Vergleich Modell - Reale Werte**
- **Entwurf**
  - **Festlegen der Struktur um Forderungen zu erfüllen**
  - **Berechnen der Reglerparameter**
  - **Optimieren der Reglerparameter**
  - **Robustheit (Parameteränderungen, Toleranzen) prüfen**
- **Verifikation**
  - **Umsetzen der gefundenen Parameter in der Applikation**
  - **Optimieren der Applikation, 'Feinjustierung"**

Die 10 Regeln für die praktische Arbeit im Praktikum Prozessregelung

Professionell Arbeiten (Planen - Durchführen - Präsentieren)!
Teamarbeit nutzen (Aufbau - Messung - Simulation - Auswertung)!
Masseanschlüsse sind sternförmig und möglichst kurz zu verbinden (Masseschleifen vermeiden)!
Signale am Schirm entsprechend sinnvoll **auflösen** (Cursor verwenden)!
Ergebnisse gleich **auswerten** (z. B. EXCEL) und beschriften!
Diagramme beschriften, Kurven **eindeutig** kennzeichnen und Parameter angeben!
Ergebnisse mit **Erwartungen** vergleichen (Korrekturmöglichkeit, Toleranzen)!
Beim PID Regler ist der Unterschied der **Parameter** (KP, TN, TV) und (KP*, TN*, TV*) zu beachten!
Bei der Simulation sind **Begrenzungen** (z. B. Betriebsspannung) erforderlich!
Mess- und Simulationsergebnisse zusammenfassen und **gegenüberstellen**!

Übersicht

Bei der Einstellung der Geräte ist abzuschätzen:

Was wird als Ergebnis erwartet?
Welche Einstellung am Generator und Oszilloskop sind für die Aufzeichnung erforderlich? (Zeitkonstanten, Verstärkung des untersuchten Regelgliedes)
Generator: Frequenzform, Frequenz, Amplitude, Offset
Oszilloskop: 1. Kanäle: Nullinie, Amplitude
2. Zeitbasis: Zeit pro Square, Delay
3. Trigger: Kanal, Slope, Level

Übersicht

Aufnahme der statischen Kennlinien:

Messwerte direkt in EXCEL eintragen und graphisch darstellen (XY-Punktdiagramm verwenden, da hier auch Zwischenwerte eingegeben werden können bzw. es müssen nicht alle Werte gemessen werden). Fehler sind hier leicht zu erkennen und zu korrigieren.
Auf Linearität prüfen und Nichtlinearitäten beachten und diskutieren. Die Verstärkung Kp kann hier abgelesen werden, bzw. geeignete Arbeitspunkte festgelegt/überprüft werden.

Übersicht

Untersuchung des PT2 Gliedes:

Wie kann man die Dämpfung und die Kreisfrequenz aus der Sprungantwort und im Frequenzbereich bestimmen?
Vereinfachung bei Dämpfung >=1
Vergleich mit erwarteten Ergebnissen aus Simulation was verursacht Unterschiede?

Übersicht

Realisierung eines realen PID-Reglers (PID-T1):

Der reale "D-Regler" kann nicht wie in der Simulation durch Reihenschaltung von OP-Schaltung eines 'idealen D-Glieds', und PT1 Glieds erreicht werden.
Mögliche Realisierung des PIDT1 Reglers als invertierende OP-Schaltung (multiplikative Form) mit

$$v = -\frac{Zf}{Zs}$$

Zf als I-Glied (Rf, Cf)
Zs als DT1-Glied (R, Rs, Cs)

Unterschied der **Parameter** (KP, TN, TV) und (KP', TN', TV') beachten!
oder als Σ Schaltung aus P, I, DT1 Glied.

Darstellungsformen des PID-Reglers:

Additive Form: (unabhängige Einstellung der Parameter)

$$G(s) = K * \left(1 + \frac{1}{TNs} + TVs \right) = K * \frac{1 + TNs + TN * TVs^2}{TNs}$$

Multiplikative Form: (Bodediagramm, PN-Diagramm, einfacher elektrischer Aufbau)

$$G(s) = \frac{(1 + TN's) * (1 + TV's)}{TN's} = \frac{1 + (TN' + TV')s + TN'*TV's^2}{TN's}$$

Umrechnung durch Koeffizientenvergleich
TN' * TV' = TN*TV ; TN'+TV' = TN ; K = TN/TN'
daraus folgt: (additive Form)

$$\mathbf{TV = \frac{TN'*TV'}{TN'+TV'}\ ;\quad TN = TN'+TV'\ ;\quad K = TN/TN'}$$

oder: (multiplikative Form)

$$\mathbf{TN' = \frac{TN \pm \sqrt{TN^2 - 4*TN*TV}}{2}\ ;\quad TV' = TN - TN'}$$

mit TN > TV

Übersicht

Bei der Bauelementeauswahl ist zu beachten:

Kondensatoren sind üblicherweise in der DIN/IEC E6-Reihe erhältlich.
Die Baugröße, beeinflußt Platzbedarf und Kosten.
Widerstände sind in Abstufungen E24 (5%), E48 (2%), E96 (1%) und E192 (0.5%) möglich.
Formel für Eq - Reihe: $Rn = 10^{n/q}$
Vorgabe Rmin = 10kOhm bei unserer OP Schaltung.

Übersicht

Einstellregeln nach Chien, Hrones und Reswick:

für PTn Strecken mit 1<Tg/Tu<10 und V=KR*KS
Durch Anlegen der Wendetangente bestimmt man die Verzugszeit Tu und die Ausgleichszeit Tg.
Damit werden die Reglerparameter ohne Modellbildung der Strecke direkt bestimmt.

	Aperiodisches Verhalten		**20% Überschwingen**	
REGLER	Führung	Störung	Führung	Störung
KR	V=0,3Tg/Tu	V=0,3Tg/Tu	V=0,7Tg/Tu	V=0,7Tg/Tu
KR(1+1/sTN)	V=0,35Tg/Tu TN=1,2Tg	V=0,6Tg/Tu TN=4Tu	V=0,6Tg/Tu TN=Tg	V=0,7Tg/Tu TN=2,3Tu
KR(1+1/sTN+ sTV)	V=0,6Tg/Tu TN=Tg TV=0,5Tu	V=0,95Tg/Tu TN=2,4Tu TV=0,42Tu	V=0,95Tg/Tu TN=1,35Tg TV=0,47Tu	V=1,2Tg/Tu TN=2Tu TV=0,42Tu

Übersicht

Zeitprozentwert-Methode:

Bei diesem Verfahren wird die Strecke durch n gleiche (PT1)n Glieder ersetzt.
Aus der gemessenen Sprungantwort werden die Zeitwerte bei 10%, 50% und 90% entnommen und wird das Verhältnis μ =t10/t90 gebildet und aus der Tabelle die Ordnung n des Modells bestimmt.

μ	**n**	**α 10**	**α 50**	**α 90**
0,046	1	9,941	1,443	0,434
0,137	2	1,880	0,596	0,257
0,207	3	0,907	0,374	0,188

Die Zeitkonstante ergibt sich aus der Gleichung:
τ = 1/3 (α 10*t10+α 50*t50+α 90*t90)

Übersicht

Verfahren nach Ormans:

Bei diesem Verfahren wird die Strecke durch zwei (PT1) mit ungleichen Zeitkonstanten und ein Totzeitglied angenähert.
Es wird zunächst bei der Sprungantwort die Totzeit t_T abgespaltet.
Danach werden die Zeiten bei 30% und 70% Amplitude abgelesen.
Am Oszilloskop zunächst die Cursor V1 und V2 auf den Wert 30% bzw. 70% setzen, dann mit dem Cursor t1 bzw. t2 die Zeiten entnehmen.
Für die beiden Ersatzzeitkonstanten gilt:
T1 + T2 = t70% / 1,2

T1 - T2 = (t30%+t70%) / 0,6 * $\sqrt{(0,45 - t30\% / t70\%)}$

Übersicht

Kompensation: Entwurf von Kompensationsreglern

Durch die Wahl eines geeigneten Reglers werden die Pole der Strecke mit den größten Zeitkonstanten durch Nullstellen des Reglers kompensiert.

z.B. PT3 Strecke mit **PID-T1** Regler

$$G_w(s) = \frac{Kp}{(1+\tau 1s)(1+\tau 2s)(1+\tau 3s)} * \frac{Kr\,(1+TNs)(1+TVs)}{s\,(1+\tau_r s)}$$

mit $\tau 1 > \tau 2 > \tau 3$ $TN = \tau 1$ $TV = \tau 2$

Der **PD-T1** Regler tauscht die Zeitkonstante $\tau 1$ in $\alpha\tau_r$ durch Kompensation von $\tau 1 = TV$ und hebt die Phase bei ω_m um sin Φmax an.

z.B. PT3 Strecke mit **PD-T1** Regler

$$G_w(s) = \frac{Kp}{(1+\tau 1s)(1+\tau 2s)(1+\tau 3s)} * \alpha\,\frac{Kr\,(1+TVs)}{(1+\alpha\tau_r s)}$$

$$\omega_m = \frac{1}{TV\,(\alpha)^{\wedge}½}; \quad \sin \Phi max = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad \text{mit } \alpha < 1$$

Lage der Pol und Nullstellen (negative reelle Achse):

```
PT2 Strecke   ---------------X-------X----------   reelle Pole
                          -1/T2    -1/T1       0
P             ----------------------------------   keine Kompensation
I             ----------------------------------X
PI            ----------------------O---------X   kompensiert größten Pol
DT1           ------X-------------------------O   liefert keinen Sollwert
PDT1          ------X----------------O----------   kompensiert größten Pol
PIDT1         ------X--------O-------O---------X   kompensiert zwei Pole

                  -1/Tr      -1/TV    -1/TN       0
```

Betragsoptimum:

Dieses Verfahren hat in der Praxis große Bedeutung erlangt.
Es werden zunächst die großen Stecken-Zeitkonstanten (Pole) durch Kompensation mit den Regler-Zeitkonstanten (Nullstellen) kompensiert. Die verbleibenden kleinen Zeitkonstanten werden als Summen-Zeitkonstante σ zusammengefaßt.

$$F(s) = \frac{Kr}{TNs} * \frac{Ks}{1 + \sigma s}$$

Das Einstellkriterium für Systeme mit Ausgleich lautet:

$$\mathbf{Kr*Ks = \frac{TN}{2*\sigma}}$$

Bei dieser Einstellung beträgt die Anregelzeit tan = 4,7 σ; Ausregelzeit taus = 11σ;
Überschwingweite ü = 4,3%; Betragsoptimale Dämpfung δ = 0,707

Erich J. Niebler mailto:Erich.Niebler@gmx.de

Vorwort

Literatur

1. Einführung

1.1. Die Grundbegriffe Steuerung und Regelung
am Beispiel einer Radarspiegelpositionierung
1.1.1. Lösung des Ausgangsproblems mit Hilfe einer Steuerung
1.1.2. Lösung des Ausgangsproblems durch Regelung
1.1.3. Wirkplan / Signalflußplan
1.1.4. Sonderformen
1.1.4.1. Kaskadenregelung
1.1.4.2. Mehrpunktregelung
1.1.4.3. Störgrößenaufschaltung
1.1.4.4. Digitalregelung
1.1.5 Eine Zwischenbemerkung zum „Minus im Regelkreis“
1.2. Die Grundbegriffe der Regelungstechnik im Allgemeinen
1.2.1. Das Steuern
1.2.2. Das Regeln
1.3. Bisherige Betrachtungen: Was will die Regelungstechnik?
1.4. Aufgaben zum 1. Kapitel
1.5. Lösung der Aufgaben zum 1. Kapitel

2. Mathematische Modellbildung, Strukturbilder, Zustandsvariable

2.1. Betrachtungen zur Regelstrecke (Einführungsbeispiel)
2.2. Zum Begriff: Zustandsvariable (state variable)
2.3. Mathematische Modellierung des Gesamtsystems:
Regelstrecke + Regeleinrichtung
2.4. Bearbeitung von mathematischen Modellen durch Simulation
2.4.1. Das EULER'sche Polygonzugverfahren
2.4.2. Professionelle Simulationssprachen
2.5. Weitere Modellverfeinerungen
2.5.1 Berücksichtigung des Getriebes
2.5.2 Berücksichtigung der Wellenelastizität
2.6. Simulationsergebnisse für das Einführungsbeispiels auf der Grundlage des„einfachsten Modells“.
2.7. Erste Folgerungen und Verbesserungsvorschläge für den betrachteten Regelkreis anhand der Simulationsergebnisse
2.7.1 Erste Folgerungen
2.7.2 Verbesserungsvorschläge

2.8. Reglereinstellung (-parametrierung) nach ZIEGLER und NICHOLS
2.9. Reglereinstellung nach CHIEN-HRONES und RESWICK
2.9.1 Nichtschwingungsfähiges Übergangsverhalten der Regelstrecke, wobei die Sprungantwort in einen festen Endwert mündet.
2.9.2 Übergangsverhalten der Regelstrecke, das sich bei Stellgrößensprüngen einem rampenähnlichen Verlauf angleicht („Strecke ohne Ausgleich“)

2.10. Parametrierung von PID-Algorithmen nach Takahashi
2.11. Aufgaben zum 2. Kapitel
2.12. Lösung der Aufgaben zum 2. Kapitel

3. Systemtheoretische Aspekte
3.1. Regeln für die Laplace-Transformation
3.2. Übertragungsfunktionen, Gewichtsfunktionen, Übergangsfunktion
3.3. Anmerkungen zu Übertragungsfunktionen / Gewichtsfunktionen
3.3.1. Grundlagen
3.3.2 Beispiele für Partialbruchentwicklungen, graphische Residuenbestimmungen und für den Einfluß von „langsamen“ und „schnellen“ Polen
3.4. Bestimmung der Übertragungsfunktion G(s) aus dem Strukturbild
3.4.1 Anwendung auf das Einführungsbeispiel
3.4.2 Nochmalige Berechnung von Gw(s) unter Verwendung von praktisch gebräuchlichen Kenngrößen
3.4.3 Schlußbemerkungen
3.5. Anmerkungen zum Steuerungsproblem
3.6. Zur schaltungstechnischen Realisierung von Übertragungsfunktionen (bzw. von Frequenzgängen = Systemfktn.)
3.7. Weitere Beispiele
3.8. Das Wurzelortsverfahren
3.8.1 Die K-Normalform
3.8.2 Die Ausgangsgleichungen für das Wurzelortsverfahren
3.8.3 Wichtige Konstruktionsregeln für das Zeichnen der WOK’s
3.8.4 Rechenbeispiele zur Reglersynthese mit dem Wurzelortsverfahren
3.8.5 Vorgabe von Dominanzgebieten

3.9 Aufgaben zum 3. Kapitel
3.10 Lösung der Aufgaben zum 3. Kapitel

4. Zeitdiskrete Regelungen (Digitalregelungen)

4.1. Aufgabenstellung

4.2. Beispiele für zeitdiskrete Systeme und deren mathematische Beschreibung

- 4.2.1 Schaltwerke und Algorithmen
- 4.2.2 Analoge Regelstrecken die mit AD und DA-Wandlern beaufschlagt sind und so zu zeitdiskreten Systemen werden.
- 4.2.3 Weitere zeitdiskrete Systeme die ein ursprünglich analoges Filter bzw. einen ursprünglich analogen Regler nachbilden.
- 4.2.4 Was bleibt uns im nichtlinearen Fall ?

4.3. Definition und Eigenschaften der Z-Transformation von Folgen

4.4. Anwendung der z-Tranformation von Folgen auf lineare, zeitdiskrete Systeme

- 4.4.1 Bezugnahme auf 4.2.1: Schaltwerke und Algorithmen
- 4.4.2 Bezugnahme auf 4.2.2: Analoge Regelstrecken die mit AD und DA-Wandlern beaufschlagt sind und so zu zeitdiskreten Systemen werden.
- 4.4.3 Bezugnahme auf 4.2.3: Angabe der z-Übertragungsfunktion von weiteren zeitdiskreten Systemen die ein ursprüngliches analoges Filter ... nachbilden.

4.5. Anwendung der z-Tranformation von Folgen speziell auf zeitdiskrete Regelungssysteme

- 4.5.1 Beispiel
- 4.5.2 Weitere Korrespondenzen

4.6. Systemtheoretische Ergänzungen zum Thema: Zeitdiskrete Regelstrecken

4.7. Zur Stabilität von zeitdiskreten Systemen

- 4.7.1 Grundlagen
- 4.7.2 Zusammenhang: Polstellenverteilung i.d. komplexen z-Ebene⇔Sprungantwort

4.8. Zur Synthese von Regelsystemen mit dem WOK-Verfahren.

- 4.8.1 Beispiel

4.9. Genauigkeitsfragen I: Der Einfluß der endlichen Abtastzeit.

- 4.9.1 Bezugnahme auf das Rechenbeispiel von 4.2.3
- 4.9.2 Rechenaufgabe

4.10. Geanuigkeitsfragen II: Endliche Abtastzeiten /Mantissenlängen

- 4.10.1 Die Abbildungseigenschaft der (komplexen) e-Funktion
- 4.10.2 Beispiele hierzu

4.11. Die Deltatransformation von Folgen und verwandte Transformationen
4.12 Aufgaben zum 4. Kapitel
4.13 Lösung der Aufgaben zum 4. Kapitel

5. Frequenzgangdarstellung; BODE-Diagramm
5.1. Herleitung des BODE-Diagramms anhand eines Beispiels

5.2. Skizzieren der Ortskurve des Frequenzgangs mit Unterstützung des BODE-Diagramms
5.3. Kürzen von Polstellen durch Nullstellen
5.4 Weitere Anmerkungen zum Rechnen mit „dB“
5.5 Nochmals: Entwurf eines Notchfilters
5.6 Anlagen

6. Reglerentwurf; Betrachtungen am geschlossenen Regelkreis
6.1. Regelungen mit einem und zwei Freiheitsgraden
6.2 Regelfehler und die Stabilität von Regelkreisen
6.2.1 Regelfehler
6.2.2 Die Stabilität in Regelkreisen
6.3 Zusammenstellung wichtiger Regelkreisglieder
6.3.1. Das P-Glied
6.3.2. Das I-Glied
6.3.3. Das D-Glied
6.3.4. Das Totzeitglied
6.3.5. Das PI-Glied (der PI-Regler)
6.3.6. Das PD-Glied (der PD-Regler)
6.3.7. Das PID-Glied (der PID-Regler)
6.3.8. Das PID-T1-Glied (der PID-T1-Regler)
6.3.9. Das PT1-Glied (Verzögerungsglied 1. Ordnung)
6.3.10. Das PT2-Glied (Verzögerungsglied 2. Ordnung)
6.3.10.1 Das nichtschwingungsfähige PT2-Glied
6.3.10.2 Das schwingungsfähige PT2-Glied
6.3.11. Das schwingungsfähige PT2-Glied, dargestellt durch I-Glied und PT1-Glied

6.4 Formulierung der allgemeinen Forderungen an einen Regelkreis durch Frequenzgänge
6.5 Reglereinstellung nach dem Betragsoptimum
6.6 Das Symmetrische Optimum

7. Reglersynthese mittels FKL-Verfahren

7.1 Der Grundgedanke dieses Syntheseverfahrens
7.2 Der Einsatz von Lead- und Lag-Kompensatoren.
7.2.1 Lokale Phasenanhebung mit dem LEAD-Glied: (= PD-T_1 -Glied)
7.2.2 Bertagskorrektur durch LAG-Glied

8. Ein Verfahren zur algebraischen Formulierung von Frequenzkennlinienmethoden

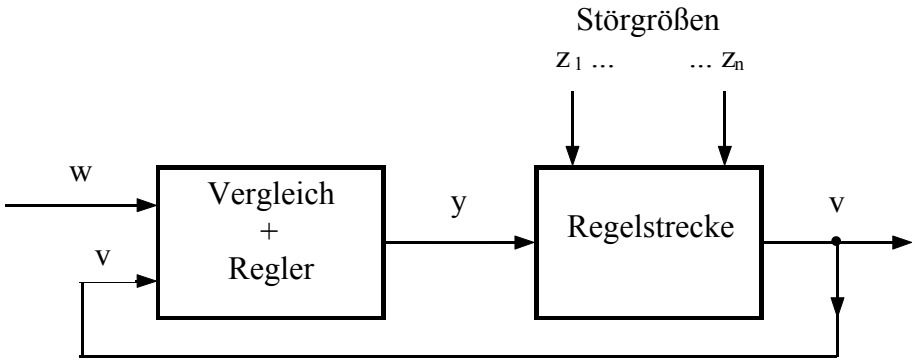
8.1 Vorbemerkungen
8.2 Einführung
8.3 Ableitung der algebraischen Formulierung einer Frequenzkennliniendarstellung
8.4 Die Synthese von robusten Kompensatoren
8.5 Ein Beispiel
8.6 Ausblick

Im Sinne des hier vorgestellten Einführungsbeispiels definiert auch DIN 19226 den Begriff **„regeln“**.

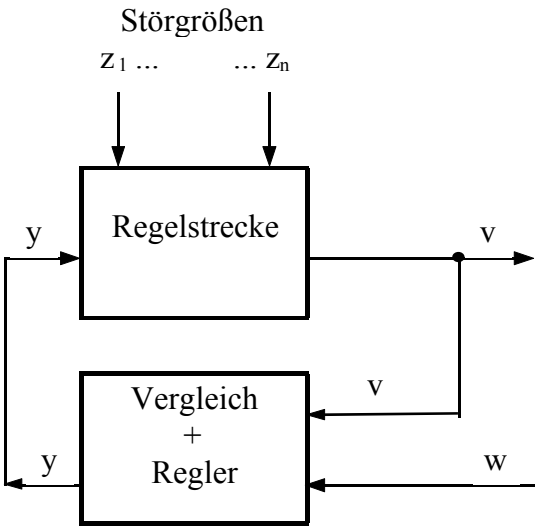
Das Regeln, die Regelung, ist ein Vorgang, bei dem eine Größe, die zu regelnde Größe (*Regelgröße*), fortlaufend erfaßt, mit einer anderen Größe, der *Führungsgröße,* verglichen und im Sinne einer Angleichung der Führungsgröße beeinflußt wird.
Kennzeichen für das Regeln ist der geschlossene Wirkungsablauf, bei dem die Regelgröße im Wirkungsweg des Regelkreises fortlaufend sich selbst beeinflußt.

Vereinfachte Strukturen von Wirkplänen:

Darstellung 1:



Darstellung 2:



1.2 Die Grundbegriffe der Regelungstechnik im Allgemeinen

1.2.1 Das Steuern

Das Steuern, die Steuerung, ist der Vorgang in einem System, bei dem eine oder mehrere Größen als Eingangsgrößen andere Größen als Ausgangsgrößen aufgrund der dem System eigentümlichen Gesetzmäßigkeiten beeinflussen.
Kennzeichen für das Steuern ist der offene Wirkungsweg oder ein geschlossener Wirkungsweg, bei dem die durch die Eingangsgrößen beeinflußten Ausgangsgrößen nicht fortlaufend und nicht wieder über dieselben Eingangsgrößen auf sich selbst wirken.

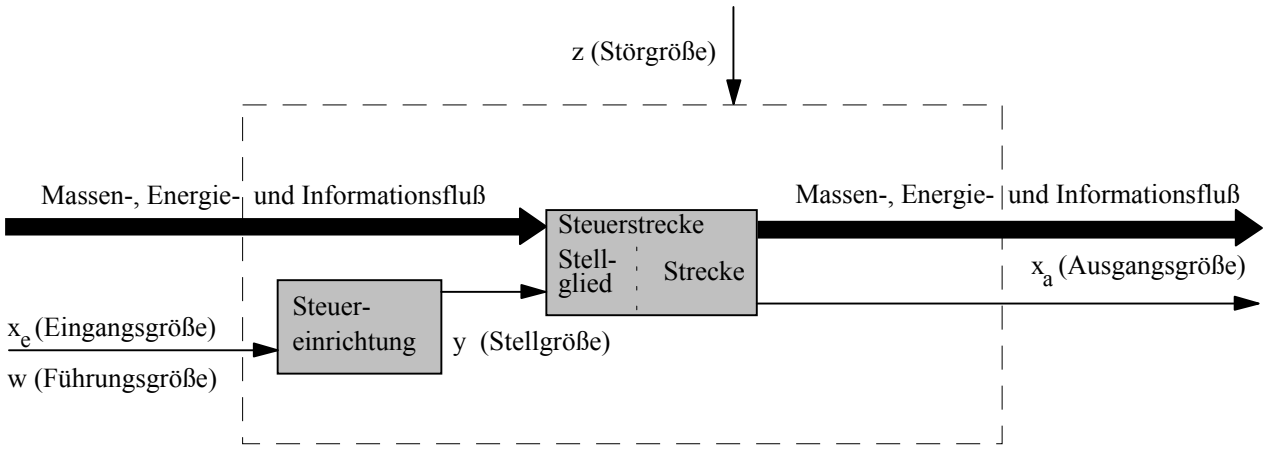


Bild 1.13: *Ausführliche wirkungsmäßige Betrachtung einer Steuerung*

Begriffe und Benennungen der Steuerungstechnik:

Die *Strecke* ist der Teil der Steuerstrecke, der die Ausgangsgröße x_a aufbaut, erzeugt bzw. abgibt.
Die *Strecke* (Steuerstrecke, Regelstrecke) ist derjenige Teil des Wirkungsweges, welcher den aufgabengemäß zu beeinflussenden Bereich des Systems darstellt.

Das *Stellglied* ist der Teil der Steuerstrecke, der unmittelbar in den Wirkungsablauf eingreift (Energie-, Massen und Informationsfluß). Der Ort des Eingriffs heißt *Stellort*.
Die *Stellgröße y* ist die Größe, die das *Stellglied* steuert. Sie ist die Ausgangsgröße der Steuereinrichtung.

Die *Steuereinrichtung* erzeugt die Stellgröße y. Sie ist dabei als Teil des Wirkungsweges anzusehen, der die aufgabengemäße Beeinflussung der Steuerstrecke über das Stellglied bewirkt. Sie wird von der Eingangsgröße x_e beeinflußt. Die Eingangsgröße x_e wird auch als Führungsgröße w bezeichnet.

Die *Störgröße z* steht stellvertretend für alle Einflüsse, die von außen auf die Steuerung einwirken können.
Steuerkette heißt die Gesamtheit aus Steuereinrichtung, Stellglied und Strecke.

1.2.2 Das Regeln

Das Regeln ist ein Vorgang, bei dem eine Größe, die zu regelnde Größe, fortlaufend erfaßt, mit einer anderen Größe, der Führungsgröße, verglichen und abhängig vom Ergebnis dieses Vergleichs im Sinne einer Angleichung an die Führungsgröße beeinflußt wird. Der sich dabei ergebende Wirkungsablauf findet in einem geschlossenen Kreis, dem Regelkreis, statt.

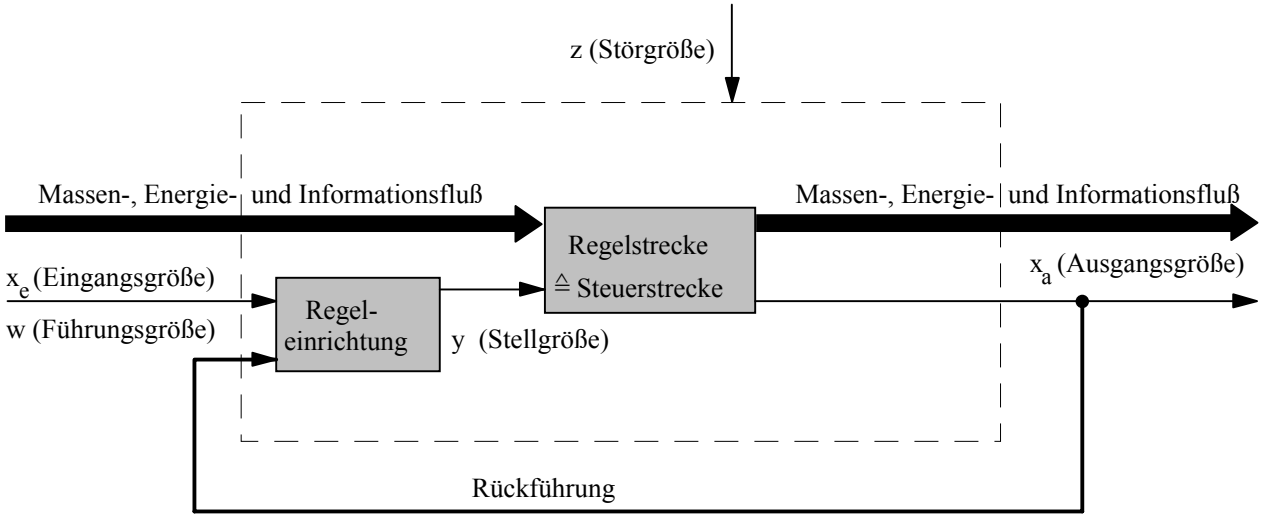


Bild 1.14: *Blockschaltbild des Regelkreises*

Der Aufbau des Blockschaltbildes hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem einer Steuerung. Mit der Aufschaltung der Ausgangsgröße x_a auf die Regeleinrichtung (Rückführung) ist der Wirkungsablauf im Gegensatz zur Steuerung jedoch geschlossen. Dies ist das wesentliche Unterscheidungsmerkmal zwischen Regelung und Steuerung.

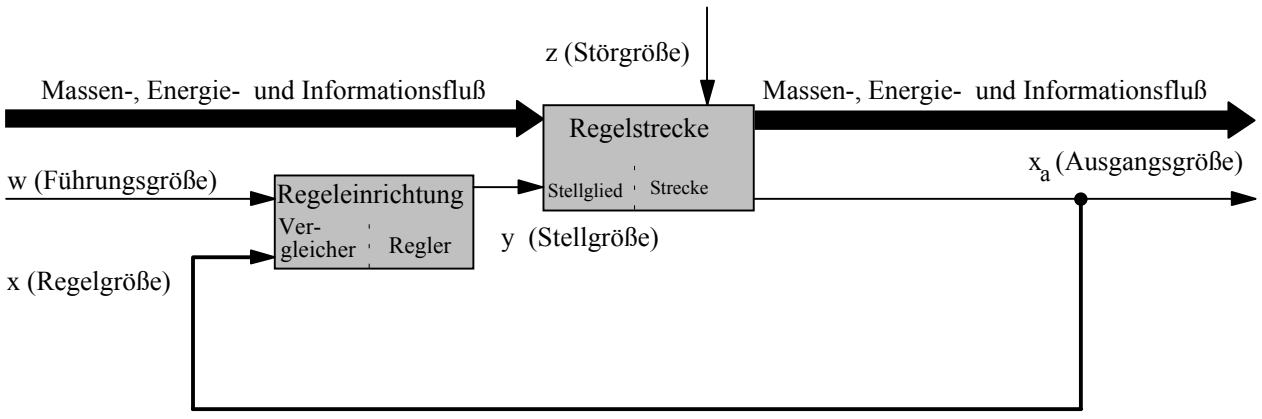


Bild 1.15: *Erweitertes Blockschaltbild der Regelung*

Die Begriffe Sollwert, Istwert werden entsprechend auf die Regelung übertragen. Der Wert der Ausgangsgröße x_a wird also fortlaufend erfaßt und in geeigneter Form dem Vergleicher in der Regeleinrichtung zugeführt. Wird nach dem Vergleich mit der Führungsgröße w festgestellt, daß keine Differenz zwischen den beiden Größen vorliegt, so bleibt die Stellgröße y unverändert. Der über die Führungsgröße w bestimmte Zustand der Strecke bleibt erhalten. Damit liegt eine Regelung vor.

Größen und Bereiche im Regelkreis:

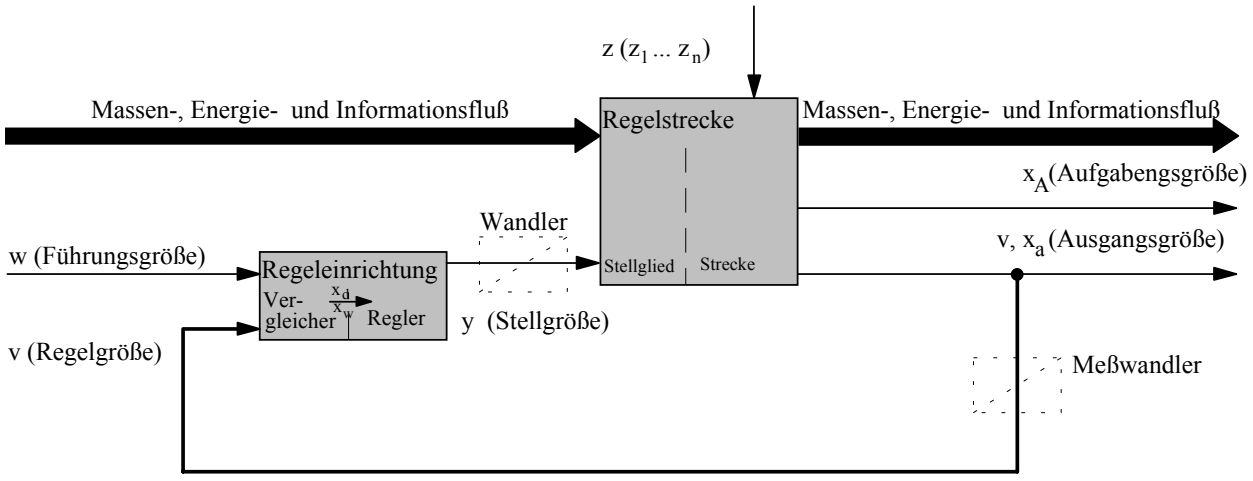


Bild 1.16: *Regelkreis*

Die wichtigsten Begriffe des Regelns:

Aufgabengröße:
Die Aufgabengröße x_A ist die Größe, die sich aus der Aufgabenstellung für die Regelung ergibt.

Aufgabenbereich X_{Ah}:
Der Aufgabenbereich X_{Ah} ist der Bereich, in dem die Aufgabengröße x_A noch liegen darf, damit die richtige Funktion der Regelung gegeben ist.

Regelgröße v (auch Istwert genannt)
Die Regelgröße v ist die Größe, die zur aufgabengemäßen Ausführung der Regelung meßtechnisch erfaßt wird.

Regelbereich X_h:
Der Regelbereich X_h ist der Bereich, in dem die Regelgröße eingestellt werden kann und bei definiertem Störungseinfluß noch ausgeregelt wird.

Führungsgröße w (auch Sollwert genannt):
Die Führungsgröße w wird dem Regelkreis von außen zugeführt und von ihm selbst nicht beeinflußt.

Führungsbereich W_h:
Der Führungsbereich W_h ist der Bereich, in dem die Führungsgröße w eingestellt werden kann und die Regelung aufgabengemäß folgt.

Störgrößen z_1 ... z_n:
Die Störgrößen z wirken von außen auf den Regelkreis störend ein. Ihre Einwirkung ist nicht auf die Regelstrecke begrenzt, sondern eine Einwirkung ist auch auf die Regelrichtung möglich.

Störbereich Z_h:
Der Störbereich Z_h ist der Bereich, in dem eine Störung noch ausgeregelt werden kann, also die Regelung aufgabengemäß arbeitet.

Regeldifferenz x_d, Regelfehler e:
Die Regeldifferenz x_d, der Regelfehler e, ist die Differenz zwischen Führungsgröße w und Regelgröße v.

$$e = x_d = w - v \quad \text{bzw. } e = x_d = w-x$$

Die Regeldifferenz x_d wird innerhalb der Regeleinrichtung durch den Vergleicher aus den beiden Eingangsgrößen w und x gebildet. Mit Hilfe von x_d läßt sich im Signalflußplan die Wirkungsumkehr im geschlossenen Regelkreis verdeutlichen.

Regelabweichung x_w:
Die Regelabweichung x_w ist die Differenz zwischen Regelgröße x und Führungsgröße w.

$$x_w = x - w$$

Es gilt also $x_w = - x_d$. Die Regelabweichung wird vorzugsweise zur Anzeige benutzt, da hiermit leicht erkennbar ist, ob die Regelgröße x

größer ($v > w \rightarrow x_w$ positiv) oder
kleiner ($v < w \rightarrow x_w$ negativ)

als die Führungsgröße w ist.

Stellgröße y:
Die Ausgangsgröße der Regeleinrichtung ist die Stellgröße y, die der Regler aufgabengemäß aus seiner Eingangsgröße x_d bildet.

Stellbereich Y_h:
Der Stellbereich Y_h ist der Bereich, in dem die Stellgröße y geändert werden kann.

Stellgeschwindigkeit v_y:
Die Stellgeschwindigkeit v_y ist die Geschwindigkeit, mit der die Stellgröße y geändert wird.

Stellzeit T_y:
Die Stellzeit T_y ist die Zeit, in der die Stellgröße y den Stellbereich Y_h bei maximaler Stellgeschwindigkeit v_y durchläuft.

1.3 Bisherige Betrachtungen: **Was will die Regelungstechnik?**

„Regieren heißt regeln“ Kung Fu-Dse (551-479 v. Chr.)

- **Gutes Folgeverhalten**
  (Ausgangssignal soll möglichst unverzögert dem Eingangssignal folgen)
  ideal: v(t)=w(t) für alle t

- **Gute Störunterdrückung**
  ideal: v(t) unabhängig von z(t) für alle t

- **Nebenbedingungen:**
  a) Stabilität
  b) Realisierbarkeit
  c) Stellgrößenaufwand
  d) Störgrößenaufwand
  e) Unempfindlichkeit gegenüber inneren Störungen („Robustheit“)

Versuchen Sie, von den Übungsaufgaben zum 1. Kapitel wenigstens die Nummern 1 und 2 zu bearbeiten.

Wenn sie auf Schwierigkeiten stoßen, bedenken Sie folgendes:

„... daß es in der Welt keine unerkennbaren Dinge gibt, wohl aber Dinge, die noch nicht erkannt sind; auch diese werden durch die Kräfte der Wissenschaft und der Praxis aufgedeckt und erkannt werden.“ J. Stalin

„ Auf gute Zusammenarbeit“, sagte Dr. Karl. Hera Lind (Das Weibernest)

2.Mathematische Modellbildung, Strukturbilder, Zustandsvariable

„In bunten Bildern wenig Klarheit, viel Irrtum und ein Fünkchen Wahrheit“, Goethe, Faust I

2.1. Betrachtungen zur Regelstrecke (Einführungsbeispiel)

Vor der mathematischen Modellierung (hier der Modellierung der Regelstrecke aus dem Einführungsbeispiel) sind zwei grundsätzliche Fragen zu klären:

- Welche Effekte sollen (müssen) berücksichtigt werden?
- Welche Größen können Eingangsgrößen, welche können Ausgangsgrößen sein?

Allgemeine Vorgehensweise:

(1) Festlegen von Ein- und Ausgangsgröße(n)

(2) Anschreiben aller Systemgleichungen *ohne* Rücksicht, ob vollständig oder redundant

(3) Strukturbild hierzu zeichnen (Beginnend mit der vereinbarten Ausgangsgröße und endend mit der vereinbarten Eingangsgröße müssen alle anderen Verbindungslinien geschlossen sein).

(4) Zustandsmodell ablesen

Beispiel 1: *Mathematische Modellbildung der Regelstrecke des Ausgangsproblems*

(vgl. Bild 1.6 und Bild 1.7)

(1) Eingangsgrößen: $y = m_{an}(t)$; $z = m_W(t)$

Ausgangsgröße: $v = \varphi(t)$

(2) Systemgleichungen:

Bezeichne J das Trägheitsmoment aller sich drehenden Teile, dann gilt:

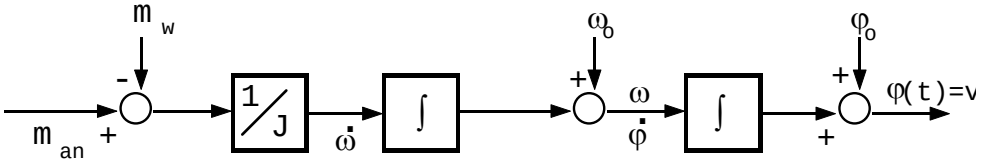
$$J \cdot \dot{\omega}(t) = m_{an}(t) - m_w(t); \qquad \omega(0) = \omega_0;$$

$$\dot{\varphi}(t) = \omega(t); \qquad \varphi(0) = \varphi_0;$$

bzw.
$$\omega(t) = \omega(0) + \frac{1}{J} \cdot \int_0^t \left[m_{an}(\tau) - m_w(\tau) \right] \cdot d\tau \; ;$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \omega(\tau) \cdot d\tau \; ;$$

(3) Strukturbild hierzu:



(4) Zustandsmodell ablesen:

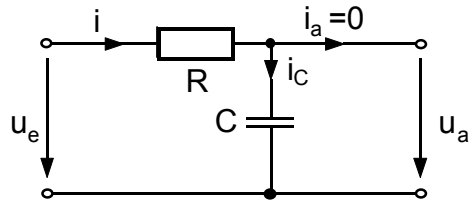
$$\dot{\varphi} = \omega; \qquad \varphi(0) = \varphi_0;$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J} \cdot (m_{an} - m_w); \quad \omega(0) = \omega_0;$$

$$v = \varphi \; ;$$

In den nachfolgenden Beispielen geht es jedesmal darum, das Zustandsmodell aufzustellen.

Beispiel 2a:



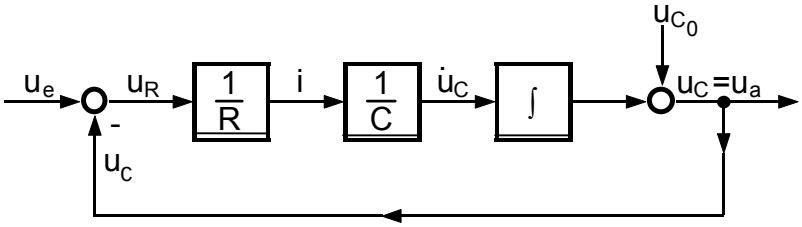
u_e = Eingangsgröße
u_a = Ausgangsgröße

zu (2): $u_e = R \cdot i + u_C$; $u_R = R \cdot i$ bzw. $i = \frac{u_R}{R}$; $i = i_c$; $u_a = u_c$;

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}; \quad u_C(0) = u_{C_0};$$

bzw. $$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(\tau) \cdot d\tau \; ;$$

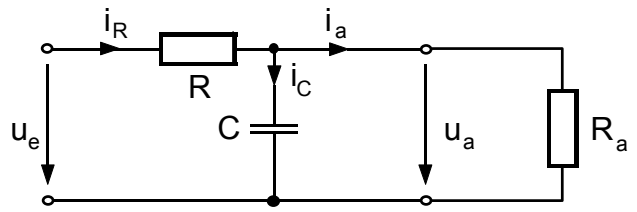
zu (3):



zu (4): $\dot{u}_C = -\frac{1}{RC} \cdot u_C + \frac{1}{RC} \cdot u_e$; $u_C(0) = u_{C_0}$;

$u_a = u_C$;

Beispiel 2b: (Beispiel 2a ergänzt um Lastwiderstand R_a)

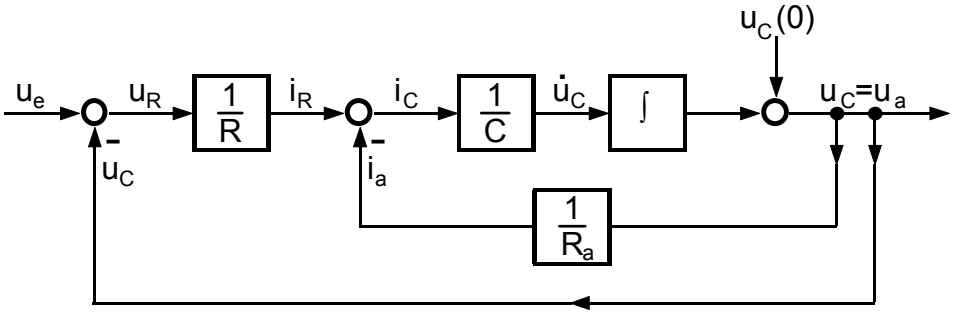


u_e = Eingangsgröße
u_a = Ausgangsgröße

zu (2): $u_e = u_R + u_C;\quad u_a = u_C;\quad u_R = R \cdot i_R;\quad i_R = \frac{1}{R} \cdot u_R;\quad u_a = R_a \cdot i_a;\quad i_a = \frac{1}{R_a} \cdot u_a;$

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(\tau) \cdot d\tau\ ;\quad i_R = i_C + i_a;$$

zu (3):



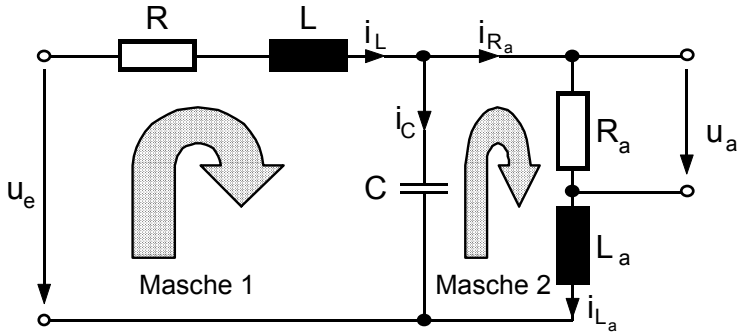
zu (4): gesucht ist eine Darstellung des Typs:

$$\dot{u}_C = f(u_C, u_e);\quad u_C(0) = u_{C_0};$$
$$u_a = g(u_C, u_e)$$

Diese lautet:

$$\dot{u}_C = -\frac{1}{C} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_a} \right) \cdot u_C + \frac{1}{RC} \cdot u_e;\quad u_C(0) = u_{C_0};$$
$$u_a = u_C;$$

Beispiel 3: RLC-Netzwerk



u_e = Eingangsspannung
u_a = Ausgangsspannung

gesucht: Zustandsmodell vom Typ

$$\dot{u}_C = f_1(u_C, i_L, i_{L_a}, u_e) \quad ; \qquad u_C(0) = u_{C_0} \; ;$$
$$\dot{i}_L = f_2(u_C, i_L, i_{L_a}, u_e) \quad ; \qquad i_L(0) = i_{L_0} \; ;$$
$$\dot{i}_{La} = f_3(u_C, i_L, i_{L_a}, u_e) \quad ; \qquad i_{L_a}(0) = i_{L_{a0}} \; ;$$
$$u_a = g(u_C, i_L, i_{L_a}, u_e) \quad ;$$

zu (2): Masche 1: $u_e = u_R + u_L + u_C$

Masche 2: $u_C = u_{R_a} + u_{L_a}$

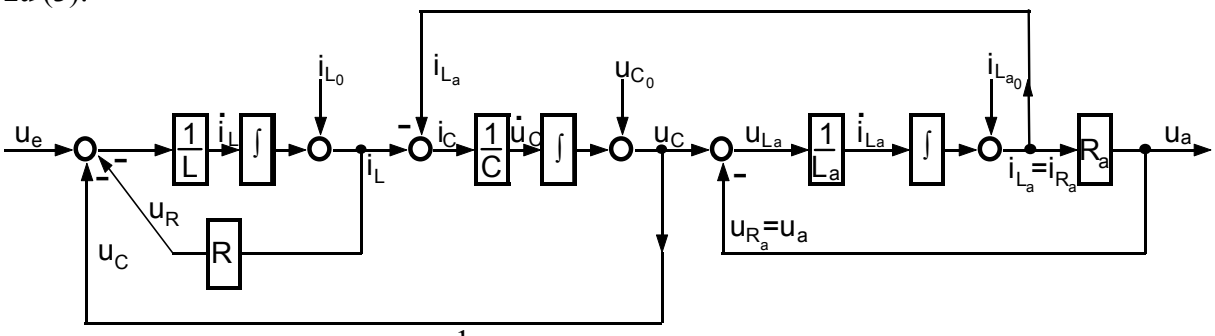
Knoten: $i_L = i_C + i_{R_a}$; $\quad i_{R_a} = i_{L_a}$

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(\tau) \cdot d\tau$$

$$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L(\tau) \cdot d\tau$$

$$i_{L_a} = i_{L_a}(0) + \frac{1}{L_a} \cdot \int_0^t u_{L_a}(\tau) \cdot d\tau$$

zu (3):



zu (4):

$$\dot{u}_C = \frac{1}{C} \cdot (i_L - i_{L_a}); \qquad u_C(0) = u_{C_0};$$
$$\dot{i}_L = \frac{1}{L} \cdot (u_e - u_C - R \cdot i_L); \qquad i_L(0) = i_{L_0};$$
$$\dot{i}_{L_a} = \frac{1}{L_a} \cdot (u_C - R_a \cdot i_{L_a}); \qquad i_{L_a}(0) = i_{L_{a0}};$$
$$u_{R_a} = R_a \cdot i_{L_a};$$

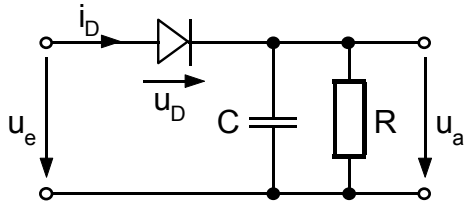
Darstellung der Lösung von Beispiel 3 in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \\ \dot{i}_{L_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/C & -1/C \\ -1/L & -R/L & 0 \\ 1/L_a & 0 & -R_a/L_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \\ i_{L_a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u_e \; ; \qquad \begin{pmatrix} u_C(0) \\ i_L(0) \\ i_{L_a}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{C_0} \\ i_{L_0} \\ i_{L_{a\,0}} \end{pmatrix} ;$$

$$u_{R_a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_c \\ i_L \\ i_{L_a} \end{pmatrix} + (0) \cdot u \quad ; \quad \text{Abkürzende Notation: } \dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot u; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$v = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot u.$$

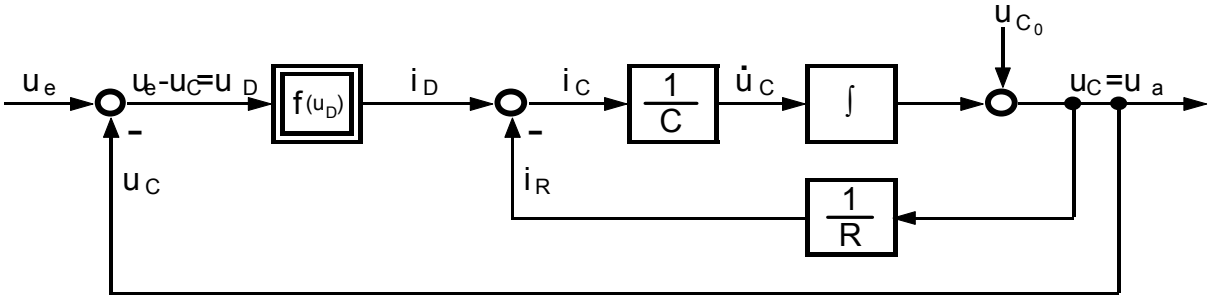
Beispiel 4: Spitzenwertgleichrichter; AM-Demodulator



u_e = Eingangsspannung
u_a = Ausgangsspannung

zu (2): $i_D = I_S \cdot \left(e^{u_D / U_T} - 1 \right) \equiv f(u_D)$

zu (3):



zu (4): $\dot{u}_C = \frac{1}{C} \cdot \left(f(u_e - u_C) - \frac{1}{R} \cdot u_C \right)$; $\qquad u_C(0) = u_{C_0}$;

bzw. $\dot{u}_C = \frac{1}{C} \cdot I_S \cdot \left(e^{\frac{u_e - u_C}{U_T}} - 1 \right) - \frac{1}{RC} \cdot u_C$;

$u_a = u_C$;

2.2. Zum Begriff: Zustandsvariable (state variable)

Bekanntlich gelten folgende Beziehungen:

$E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2$ (Energie in einem geladenen Kondensator gespeichert)

$E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_L^2$ (Energie in einer stromdurchflossenen Spule gespeichert)

$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$ (Rotationsenergie)

$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ (kinetische Energie)

$E_F = \frac{1}{2} \cdot c_F \cdot x^2$ (Energie in einer gespannten Feder gespeichert)

$E_{DF} = \frac{1}{2} \cdot c_D \cdot \varphi^2$ (Energie in einer gedrehten Feder gespeichert)

Offenbar sind die (Quadrate der) Kondensatorspannungen, Spulenströme, ... , Drehfederwinkel, ... den in den entsprechenden Bauteilen gespeicherten Energieinhalten proportional.
Kennt man in einem System, das durch Differentialgleichungen vom Typ $\dot{u}_C(t) = \ldots, \ldots, \dot{\varphi}(t) = \ldots, \ldots$ beschrieben wird, zu einem bestimmten Zeitpunkt die aktuellen Werte zu $u_C(t), \ldots, \varphi(t), \ldots$, dann kennt man den aktuellen energetischen Zustand. Deshalb nennt man solche „energietragenden Größen“ auch *Zustandsvariablen*.
Eine Systembeschreibung mit Differentialgleichungen in Zustandsvariablen (Zustandsdifferentialgleichungen, state-differential-equations) ist sehr sinnvoll: Da sich Energieinhalte nur stetig in der Zeit ändern, sind die Ableitungen der Zustandsvariablen niemals unendlich.

„Sein Gehirn wächst ständig, wenigstens was die Teile anlangt, die sich mit Mathematik befassen. Sie quellen immer größer auf ... Seine Stimme wird zum bloßen Schnarren, was für die Wiedergabe von Formeln ausreicht ... Die Fähigkeit des Lachens geht ihnen verloren, falls es sich nicht gerade um die plötzliche Entdeckung eines paradoxen Problems handelt. Am tiefsten fühlt er sich bewegt, wenn er eine rechnerische Aufgabe löst ...“
H. G. Wells: Die ersten Menschen auf dem Mond.

2.3. Mathematische Modellierung des Gesamtsystems: Regelstrecke + Regeleinrichtung (vgl. Einführungsbeispiel)

„ Die Mathematik ist dem Liebestrieb nicht abträglich“, Paul Möbius (Irrenarzt)

Bei der nachfolgenden mathematischen Modellbildung sollen nur die denkbar einfachsten Modellannahmen getroffen werden. Modellverfeinerungen werden höchstens andiskutiert.

(1) Eingangsgrößen: Sollwert α, Störgröße $z = m_w$

Ausgangsgröße: Istwert = Regelgröße $v = \varphi$

(2) Systemgleichungen

Regelstrecke:
$$\dot{\varphi} = \omega; \qquad \varphi(0) = \varphi_0;$$
$$\dot{\omega} = \frac{1}{J} \cdot \left(m_{an} - m_w\right); \qquad \omega(0) = \omega_0;$$
$$v = \varphi;$$

oder:
$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega(\tau) \cdot d\tau;$$
$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{1}{J} \cdot \int_0^t \left[m_{an}(\tau) - m_w(\tau)\right] \cdot d\tau;$$

Istwertpoti:
$$r = \varphi \cdot \left(\frac{U_1}{\alpha_m}\right)$$

Sollwertpoti:
$$w = -\alpha \cdot \left(\frac{U_1}{\alpha_m}\right)$$

Verstärkung und Vergleich:
$$u_{ab} = -\frac{R_0}{R} \cdot \left(r + w\right) \quad \Rightarrow \quad u_{ab} = \left(\frac{R_0}{R}\right) \cdot \left[\left(\frac{U_1}{\alpha_m}\right) \cdot \alpha - \left(\frac{U_1}{\alpha_m}\right) \cdot \varphi\right] \quad \Rightarrow$$
$$u_{ab} = \left(\frac{R_0 \cdot U_1}{R \cdot \alpha_m}\right) \cdot \left(\alpha - \varphi\right)$$

Leistungsverstärker:

a) einfachstes (= ungenauestes) Modell: $u_{LV} = V \cdot u_{ab}$

b) erste Modellverfeinerung durch Berücksichtigung der endlichen Anstiegszeit ($\hat{=}$ nicht unendliche Bandbreite des Verstärkers): Aus der VL Meßtechnik ist eine Faustformel bekannt, welche einen Zusammenhang zwischen der bekannten „rise-time t_r“ (= Anstiegszeit = $t_{90\%} - t_{10\%}$) und der Bandbreite „B“ herstellt: $B \cdot t_r \approx 0{,}35$. Gleichberechtigt damit ist die Faustformel die einen Zusammenhang zwischen der Zeitkonstanten „τ“ (vgl. VL „Grundlagen der ET“, „Meßtechnik“) und der Bandbreitenkreisfrequenz $\omega_B = 2\pi \cdot B$ beschreibt: $\tau = \frac{1}{\omega_B}$. Ist also (wie üblich) die Verstärkerbandbreite bekannt, dann kann man modellieren:

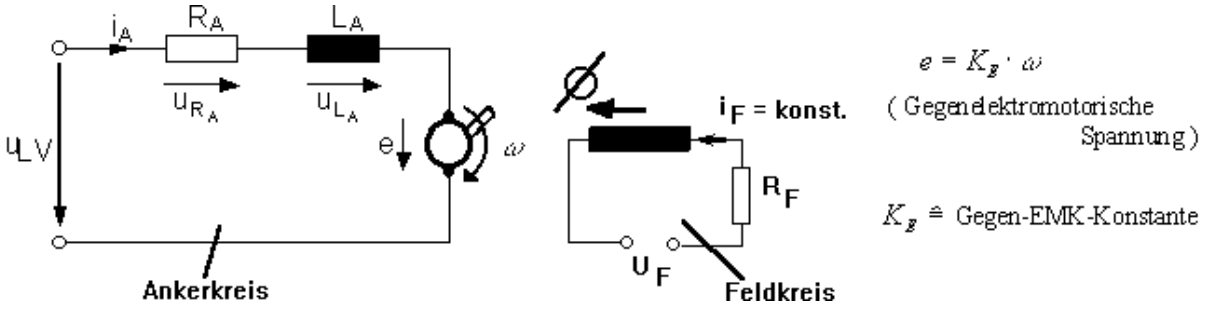
$$\tau \cdot \dot{u}_{LV} + u_{LV} = V \cdot u_{ab}.$$

Der Verstärker hat jetzt ein sogenanntes „PT1-Verhalten“ (vgl. Kap. 6 und Kap7).

c) Weitere Verfeinerungen betreffen die endlichen Ein-und Ausgangswiderstände des Verstärkers. Bisher ist die Modellierung noch so, daß man annehmen darf:
der Verstärker belastet mit seinem Eingangswiderstand den vorgeschalteten OP nicht (Es wird also bisher stark vereinfachend $R_{Eingang} \to \infty\,[\Omega]$ angenommen) und
der Verstärker wird durch den nachgeschalteten Motor nicht belastet. d.h.: die Verstärkerausgangsspannung ist unabhängig von Ausgangsstrom.
(Es wird also weiterhin stark vereinfachend $R_{Ausgang} \to 0\,[\Omega]$ angenommen). Es wäre nunmehr zu überlegen, wie man diese endlichen Ein-und ausgangswiderstände des LV im mathematischen Modell zu berückichtigen sind.

Motor: Fremderregter Gleichstrommotor

elektrisches Teilsystem des Motors; Ankerkreis und Feldkreis



$$u_{LV} = u_{R_A} + u_{L_A} + e\;; \quad u_{LV} = R_A \cdot i_A + L_A \cdot \frac{di_A}{dt} + K_E \cdot \omega\;; \quad i_A(0) = i_{A_0}\;;$$

$$\Rightarrow \quad i_A(t) = i_{A_0} + \frac{1}{L_A} \cdot \int_0^t \left[-R_A \cdot i_A(\tau) - K_E \cdot \omega(\tau) + u_{LV}(\tau) \right] \cdot d\tau$$

Man beachte: Wenn der Motor im Leerlauf arbeitet und mit der (am Typenschild angelegten) Nennspannung U_0 versorgt wird, dann ist $i_A \approx 0A$ und $\omega = \omega_0$ (die Leerlaufwinkelgeschwindigkeit) und folglich $U_0 \approx K_E \cdot \omega_0$ *also* $K_E \approx \frac{U_0}{\omega_0}$. Ke kann also näherungsweise im Leerlauf bestimmt werden. Durch Umskalierung kann man K_E auch in $\left[\frac{U/\min}{V} = \frac{Leerlaufdrehzahl}{An\,\ker\,nennspannung} \right]$ angeben.

mechanisches Teilsystem des Motors:

Antriebsmoment: $m_{an}(t) = K_T \cdot i_A(t)$

$K_T \mathrel{\hat{=}}$ Torquer-Konstante (torque = Drehmoment)

Es ist klar, daß die hier vorgelegten Gleichungen für den Ankerkreis bzw. für das mechanische Teilsystem wiederum nur die einfachste Modellierung darstellen. Der Feldkreis wird hier nur durch die zwei Konstanten K_E und K_T berücksichtigt. Damit beschreibt man einigermaßen genau Elektromotoren mit Permanentmagnet als Stator (z.B. die sogenannten „Scheibenläufermotoren"). Wird das Feld aber, wie in der obigen Skizze angedeutet, durch eine Feldwicklung erzeugt und ist die spannung U_F variabel, dann werden aus den Konstanten K_E und K_T Multiplikationsstellen von zwei zeitvariablen Größen.

Auf den nächsten beiden Seiten finden sich Tabellen die aus Liefererkatalogen von elektrischen Kleinmotoren zusammengestellt wurden. Diese verwenden u.a. die oben gebrauchten Abkürzungen (K_E, K_T usw.). Weitere dort auftretende Abkürzungen wie τ_M und τ_E werden später besprochen. Eine gut lesbare Einführung in die Modellierung von solchen Kleinmotoren und deren Einsatz bei regelungstechnischen Aufgabenstellungen bietet das Buch von

Kenjo, Nagamori: **„Permanent - Magnet and Brushless DC Motors";**
Clarendon Press Oxford, 1995, ISBN 0 -19-856217-9

Schließlich sei auf folgendes hingewiesen: Bei verlustfreien Maschinen und bei Verwendung des MKSA-Systems müssen die beiden Konstanten K_E und K_T gleich sein und es muß gelten $K_E = K_T = 1$. (Der Beweis hierfür ist recht einfach und bleibt deshalb Ihnen überlassen!). $K_E = K_T = 1$ gilt sehr gut bei „großen" Maschinen, weil diese normalerweise auch einen großen Wirkungsgrad (d.h. geringe Verluste) haben. Bei Kleinmaschinen gilt dies nicht mehr. Immerhin zeigen uns die Tabellen, daß noch $K_E \approx K_T$ gilt.

Verschiedene Herstellerdaten von Kleinmotoren

Item	Manufacturers	Yasukawa Electric Mfg. Co., Ltd.			Olympus Opto Electronics Co., Ltd.			
		UGMMEM -06AA1	UGMMEM -13AA-	UGMMEM -25AA1	OMS-312	OMS-512	OMS-1024	OMS-2024
Inertia J	$10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^2}$	56.7	141	283	0.13	0.22	0.58	1.73
Electrical time constant τ_E	ms	1.1	1.5	1.3	0.09	0.11	0.2	0.28
Mechanical time constant τ_M	ms	4.7	4.6	3.6	10	10	9.5	9.5
Torque constant K_T	$10^{-2}\,\mathrm{N\,m\,A^{-1}}$	10	17.8	19.3	0.85	0.89	2.3	2.1
Back-e.m.f. constant K_E	$10^{-2}\,\mathrm{V\,s\,rad^{-1}}$	10	17.8	19.3	0.85	0.89	2.3	2.3
Armature resistance R_a	Ω	0.84	1.03	0.47	5.3	3.6	6.3	2.6
Power rate	$\mathrm{kW\,s^{-1}}$	6.1	11.5	21.5	0.069	0.11	0.29	0.36
Rated continuous torque T	$10^{-1}\,\mathrm{N\,m}$	5.9	13	25	0.03	0.05	0.13	0.25
Rated rotational speed Ω	r.p.m.	3000	3000	3000	10500	10500	9200	9200
Rated output P_0	W	185	401	771	3	5	10	20
Rated voltage	V	40.5	68.5	70.9	12	12	24	24

Notes. Original data is converted to SI units.

Rotor. The coil is evenly fixed using epoxy resin and glass tape (see Fig. 2.14). Alnico magnets are used for field system.

Power rate $= \dfrac{\text{Rated torque}}{J^2}$.

See Section 7.6.1 for power rate.

Tabelle von Moterkenngrößen wie sie auch bei der Modellbildung zum Einführungsbeispiel Verwendung finden.

Weitere Herstellerdaten von Kleinmotoren

Manufacturers and models	Cylindrical rotor, outside field				Cylindrical rotor, inside field				Printed rotor	
	Tamagawa Seiki Co., Ltd.				Namiki Precision Jewel Co., Ltd.				Yasukawa Electric Mfg. Co., Ltd.	
	M-1600 -A	M-1020 -A	TS3516 -E17	TS3513 -E5	12-2006	12-3006	16-2004	16-2501	UGPMEN -90DAB	UGPMEE -09B12
Inertia J (10^{-6} kg m^2)	2.2	3.3	28	2.75	0.0039	0.016	0.022	0.043	43	34
Electrical time constant τ_E (ms)	0.1	0.12	0.4	0.12	0.008	0.005	0.007	0.012	0.043	0.06
Mechanical time constant τ_M (ms)	0.5	3.8	1.3	3.2	3.5	5.8	13.9	6.6	8.0	37
Torque constant K_T (10^{-2} N m A^{-1})	6.7	2.54	16.4	5.41	0.69	1.12	0.29	2.02	5.0	3.2
Back-e.m.f. constant K_E (10^{-2} V s rad^{-1})	6.7	2.54	16.4	5.41	0.69	1.12	0.29	2.02	5.0	3.2
Armature resistance R_a (Ω)	0.8	0.7	1.23	3.2	39	46	6	63	0.46	1.02
Power rate (kw s^{-1})	280	12.3	40.8	5.9	—	—	—	—	1.3	0.15
Rated continuous torque T (10^{-1} N m)	8.5	3.3	10.8	1.27	S0.0012	S0.028	S0.020	S0.038	2.38	0.72
Rated rotational speed Ω (r.p.m.)	4500	4000	2100	3850	N10000	N10000	N12600	N5600	4000	4000
Rated output P_0 (W)	375	130	200	50	0.23	0.53	0.48	0.4	100	30
					S: Starting torque N: No-load torque Rotor: Faulhaber winding				Alnico magent	Ferrite magnet

This table is re-edited from manufacturers' catalogues.

Tabelle von Moterkenngrößen wie sie auch bei der Modellbildung zum Einführungsbeispiel Verwendung finden.

Getriebe: $i = \frac{\omega_{Last}}{\omega_{Motor}} = \text{bei uns vorlä ufig } 1$

(3) Strukturbild zu den einfachsten Systemgleichungen:

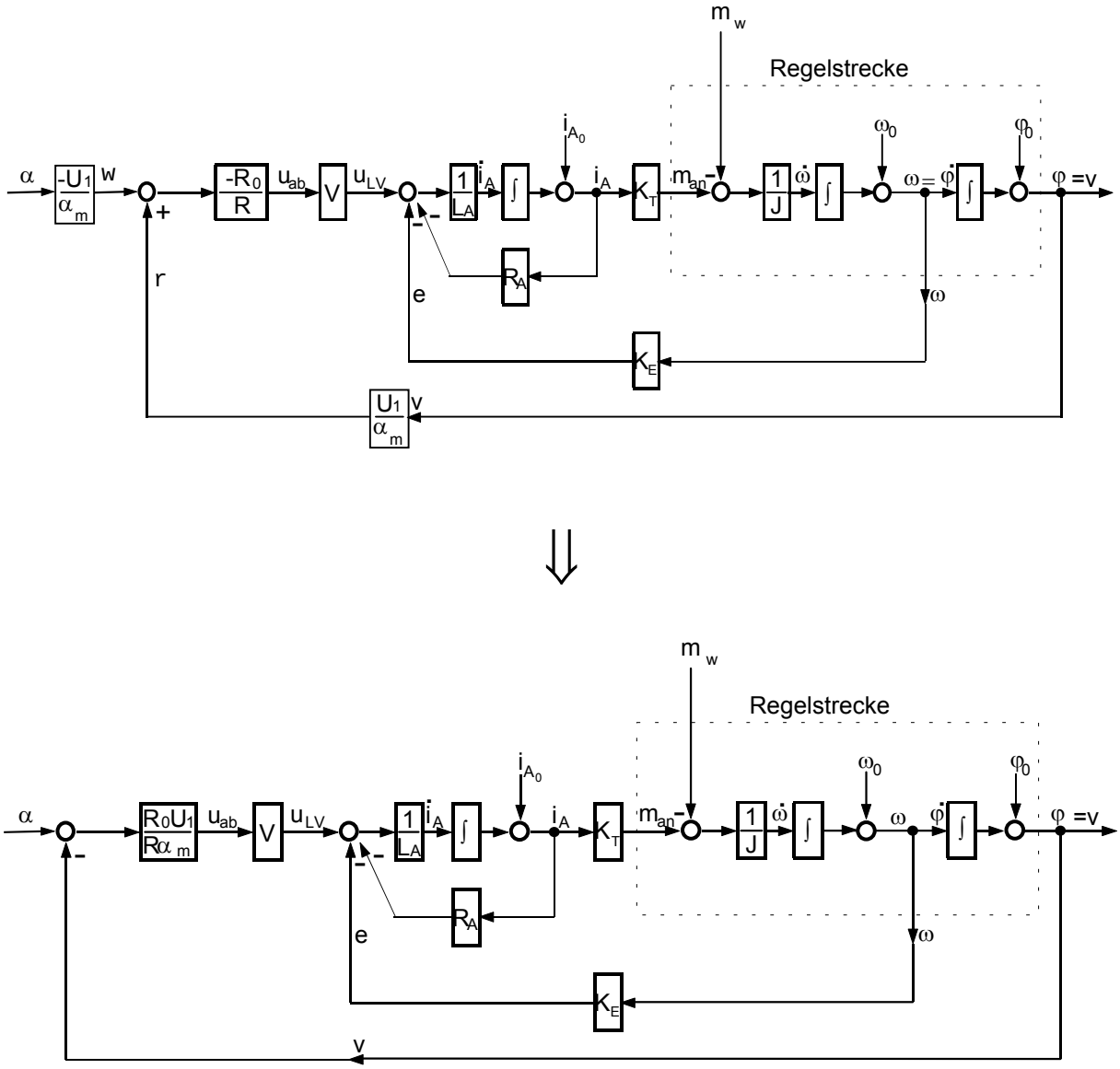


Bild 2.1: *Strukturbild zum Einführungsbeispiel. Oben: direkte Modellierung entsprechend der gerätetechnischen Darstellung. Unten: Modellierung nach Ausklammern von $-U_1/\alpha_m$*

(4) Zustandsmodell des Regelsystems ablesen

$$\dot{\varphi} = \omega \; ; \qquad \varphi(0) = \varphi_0 \; ;$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J} \cdot \left(K_T \cdot i_A - m_w \right) \; ; \qquad \omega(0) = \omega_0 \; ;$$

$$\dot{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}} = \frac{1}{\mathrm{L_A}} \cdot \left[-\mathrm{R_A} \cdot \mathrm{i_A} - \mathrm{K_E} \cdot \omega + \mathrm{V} \cdot \left(\frac{\mathrm{R_0} \cdot \mathrm{U_1}}{\mathrm{R} \cdot \alpha_{\mathrm{m}}} \right) \cdot (\alpha - \varphi) \right] \; ; \qquad i_A(0) = i_{A_0} \; ;$$

$$\mathrm{v} = \varphi \; ;$$

Darstellung in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \omega \\ i_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K_T/J \\ -V/L_A \cdot \left(\frac{R_0 \cdot U_l}{R \cdot \alpha_m}\right) & -K_E/L_A & -R_A/L_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \\ i_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/J \\ V/L_A \cdot \left(\frac{R_0 \cdot U_l}{R \cdot \alpha_m}\right) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ m_w \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \omega(0) \\ i_A(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \omega_0 \\ i_{A_0} \end{pmatrix};$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \\ i_A \end{pmatrix};$$

Abkürzende Notation: $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u} \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$

$$v = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + \underline{d}^T \cdot \underline{u}$$ („$\underline{d}$“ im obigenBeispiel $\underline{0}$)

Nachtrag Es wurde schon bei der Aufstellung der Systemgleichungen klar, daß dieses mathematische Modell immer noch unzulässige Vereinfachungen enthält. Eine dieser Vereinfachungen soll sogleich aufgehoben werden: Betrachtet man sich das Strukturbild (dargestellt in Bild 2.1), so erkennt man, daß bei abgeklemmter Motorspannung (dann gilt auch $i_A = 0$) und verschwindendem Windmoment der mechanische Antrieb sich ungedämpft weiterdreht wenn er vorher in Bewegung gesetzt war. Tatsächlich läuft das mechanische Teilsystem („Regelstrecke“) aus.

In der Tat berücksichtigt man diesen Effekt bei elektrischen Antrieben durch einen sogenannten Dämpfungsfaktor. (Dieser modelliert die stets vorhandene geschwindigkeitsproportionale, mechanische Dämpfung und wird häufig experimentell ermittelt. „Auslaufversuch“). Dann verfeinert sich die Blockstruktur wie folgt:

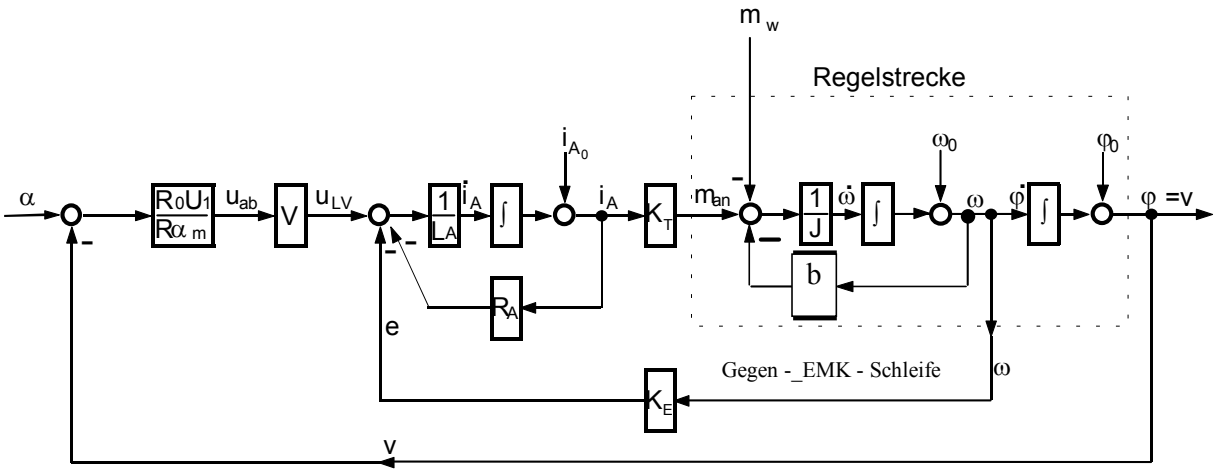


Bild 2.1.1: *Strukturbild zu einer ersten Modellverfeinerung. Hier: Berücksichtigung der geschwindigkeitsproportionalen mechanischen Dämpfung.*
Die (immer vorhandene) Gegen-EMK-Schleife ist hier gekennzeichnet

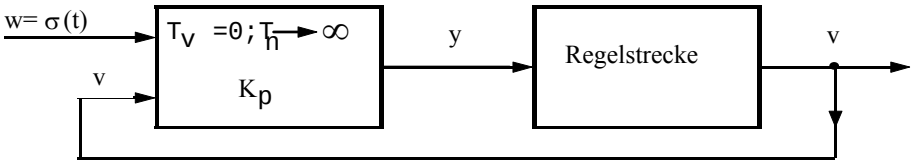
Erstellen Sie anhand des erstmalig verfeinerten Strukturbildes ein Zustandsmodell des Regelsystems in Matrizenschreibweise.

„Ein jeder stutzt, der Unbegreifliches hört.“ Goethe, Faust II

2.8 Reglereinstellung (- parametrierung) nach ZIEGLER und NICHOLS

Ziegler und Nichols ermittelten empirisch Einstellregeln für P, PI und PID - Regler. Die mit dieser Methode erzielbaren Richtwerte sind grob (und manchmal unbrauchbar), jedoch in der Praxis manchmal schnell und zuverlässig zu ermitteln.
Es handelt sich hierbei um den vielgerühmten ´Schuß aus der Hüfte´. Das zugrundeliegende Vorgehen nennt man den Schwingversuch.

Beim Schwingversuch stellt man die Vorhaltezeit T_V auf Null, die Nachstellzeit $T_n \Rightarrow \infty$ ein. Da praktisch $T_n = \infty$ nicht gesetzt werden kann, stellt man T_n deshalb auf den maximalen Wert. Man erhält damit (mehr oder weniger) einen reinen P-Regler. Seinen Proportionalbeiwert Kp drehe man auf den Minimalwert zurück.



Als Führungsgröße schalte man wiederholt Sprungfunktionen (im obigen Bild mit σ(t) bezeichnet) auf und erhöhe mit jedem Mal langsam die Reglerverstärkung K_p. Dabei beobachte man die Reaktion der Regelgröße v(t). Nach mehreren Versuchen wird die Stabilitätsgrenze des Systems erreicht. D.h. derjenige Einstellwert, bei dem v(t) und alle anderen Systemgrößen ungedämpft schwingen. Praktisch ist es nicht immer ratsam, die Verstärkung bis zum Erreichen der Stabilitätsgrenze aufzudrehen. Es genügt bei praktischen Anwendungen vollauf, wenn die gemessene Ausgangsgröße 6 - 8 feststellbare Schwingungsperioden durchläuft. Im Falle einer Simulation kann man den Schwingungsversuch natürlich bis zur Stabilitätsgrenze durchführen, was im Fall des Einführungsbeispiels getan wurde.
An der Stabilitätsgrenze stellt man den Wert der kritischen Reglerverstärkung und die kritische Periodendauer der sich einstellenden Schwingung fest. Dies sei anhand des Einführungsbeispiels durchgeführt:

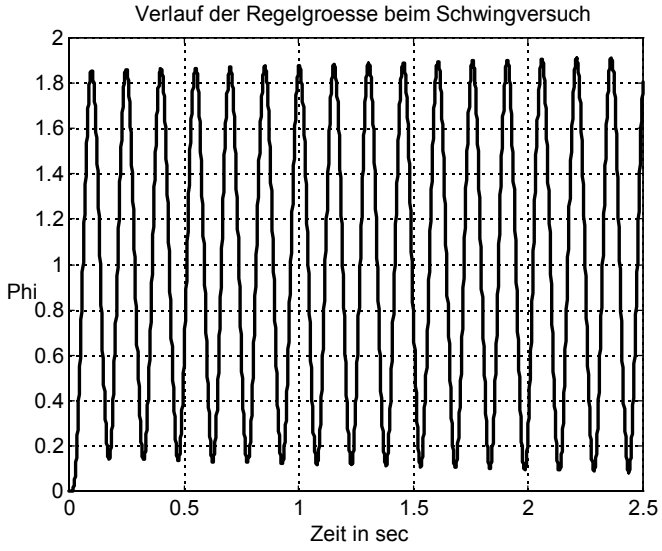


Bild 2.11: *Durch Simulation erzeugter Schwingfall. $K_{P,krit} = 4,15$; $T_{krit} = 0,151$ sec (aus diesem Bild herausgemessen).*

Nun geben ZIEGLER und NICHOLS folgende Einstellregeln an:

Reglertyp	Reglerparameter		
	K_P	T_n	T_V
P-Regler	$0{,}5 \cdot K_{p,krit}$	--	--
PI-Regler	$0{,}45 \cdot K_{p,krit}$	$0{,}85 \cdot T_{krit}$	--
PID-Regler	$0{,}6 \cdot K_{p,krit}$	$0{,}5 \cdot T_{krit}$	$0{,}125 \cdot T_{krit}$

Diese Einstellregeln wurden auf das schon bisher betrachtete Einführungsbeispiel angewendet. Es ergeben sich die folgenden Simulationsergebnisse:

Reine P-Regelung:

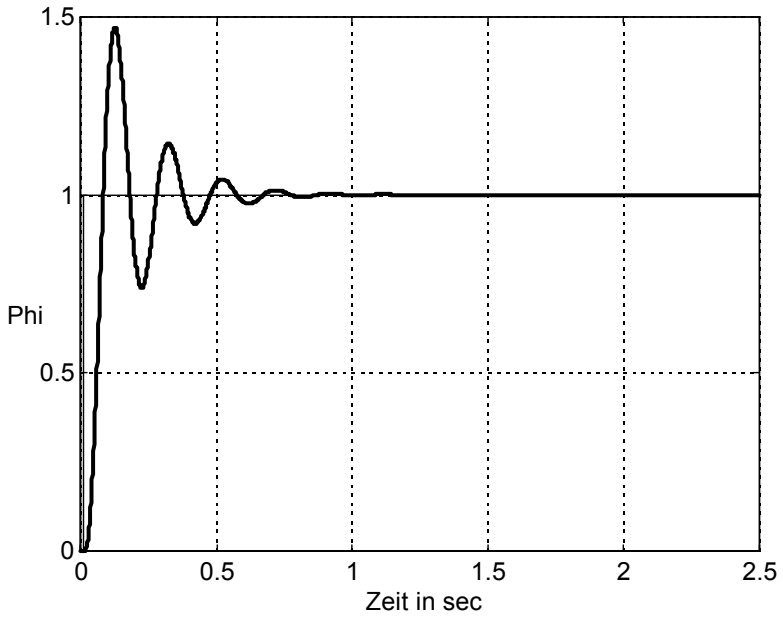


Bild 2.11: *P-Reglereinstellung nach ZIEGLER und NICHOLS (Schwingversuch)*
Die eingestellten Werte liegen bei $K_p = 0{,}5 \cdot K_{P,krit} = 2{,}075$

Für das vorgelegte Beispiel gilt zumindest: Die Regelgröße weist bei Sprüngen der Führungsgröße ein starkes Überschwingen auf.

PI-Regelung:

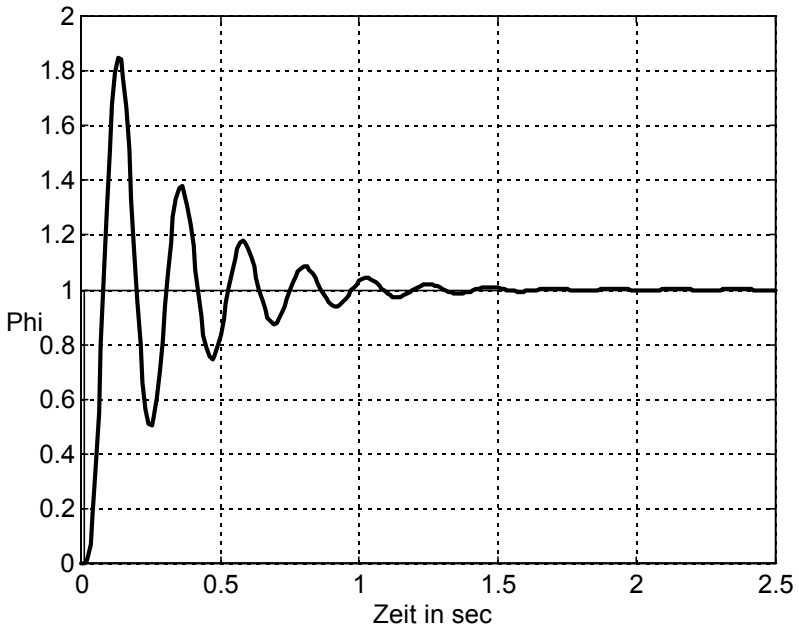


Bild 2.12: *PI-Reglereinstellung nach ZIEGLER und NICHOLS (Schwingversuch)*
Die eingestellten Werte liegen bei $K_p = 0{,}45 \cdot K_{p,krit}$; $T_n = 0{,}85 \cdot T_{krit}$

Die Regelgröße weist ein noch größeres Überschwingen auf als bei P-Regelung. Wenig brauchbare Realisierung.

PID-Regelung

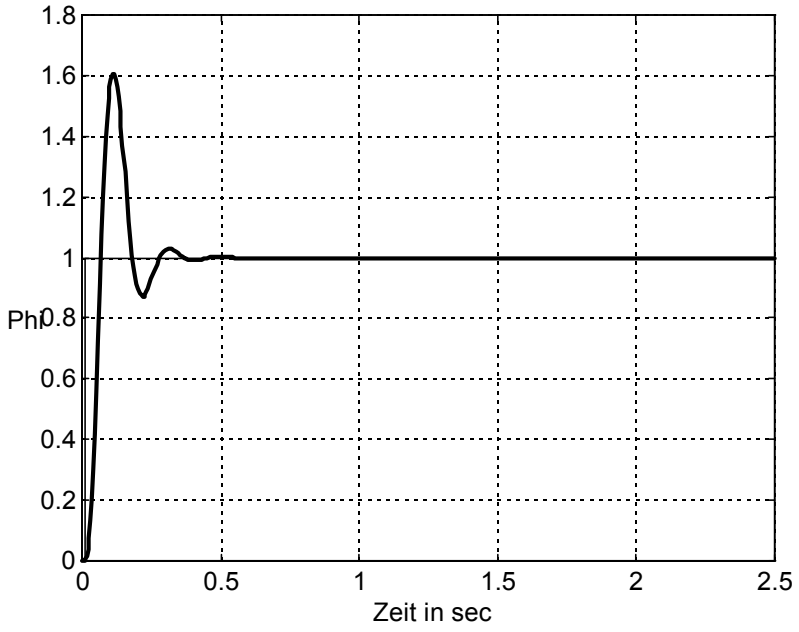


Bild 2.13: *PID-Reglereinstellung nach ZIEGLER und NICHOLS (Schwingversuch)*
Die eingestellten Werte liegen bei $K_p = 0{,}6 \cdot K_{p,krit}$; $T_n = 0{,}5 \cdot T_{krit}$;
$T_v = 0{,}125 \cdot T_{krit}$

Verbessertes Folgeverhalten gegenüber der P-Regelung und PI-Regelung. Das Überschwingen der Regelgröße auf Sollwertsprünge ist immer noch unbefriedigend hoch. Allerdings wird nun der Endwert nach einer wesentlich kürzeren Zeit angenommen.

Zum Schluß soll noch das Störverhalten bei diesen Reglereinstellungen betrachtet werden. Hierzu wird ein Störsprung von 5 Nm simuliert der nach 2,5 sec aufgeschaltet wird:

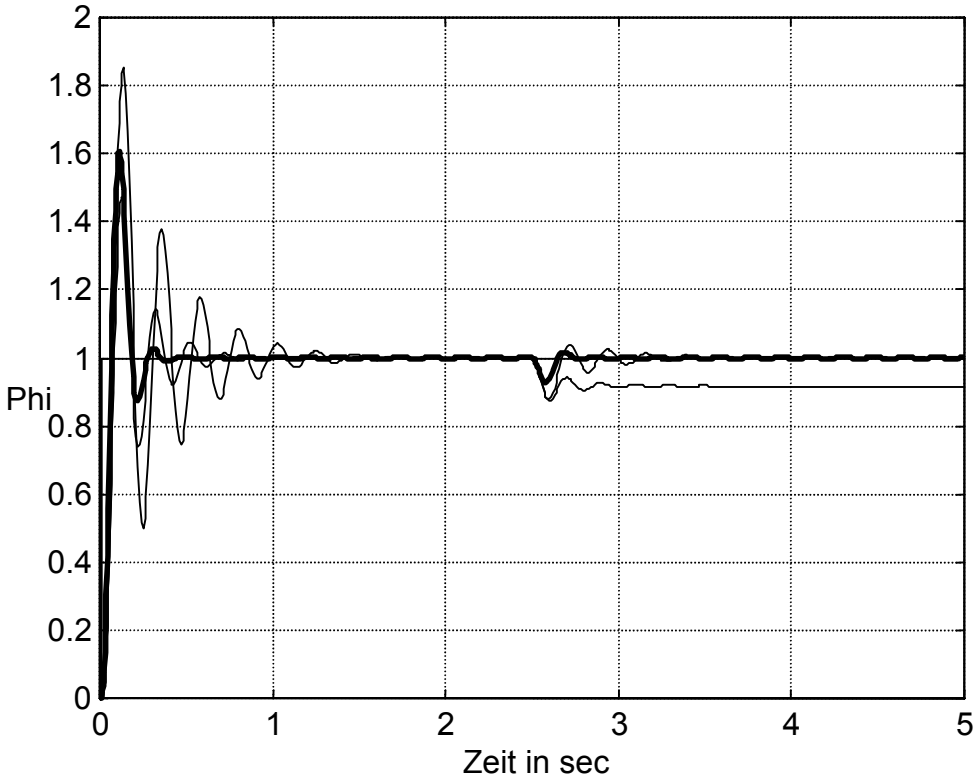


Bild 2.14: *Reglereinstellungen nach ZIEGLER und NICHOLS (Schwingversuch) Die eingestellten Werte liegen bei* $K_p = 0{,}6 \cdot K_{p,krit}$ *;* $T_n = 0{,}5 \cdot T_{krit}$ *;* $T_v = 0{,}125 \cdot T_{krit}$ *. Stark ausgezogen: Regelgröße bei PID-Regelung. Bleibende Regelabweichung bei P-Regelung*

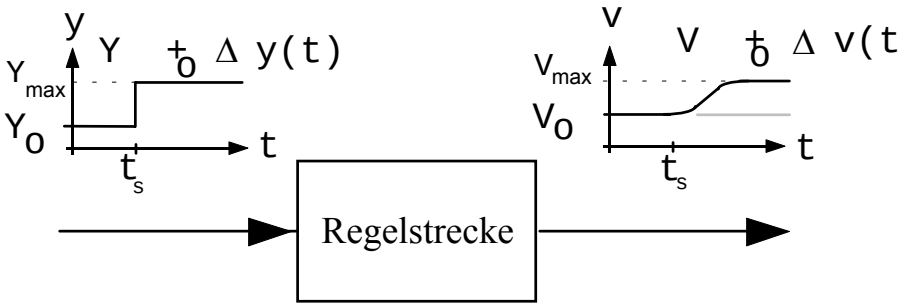
2.9 Reglereinstellung nach CHIEN-HRONES und RESWICK

Auch bei diesem Einstellverfahren wird mit einem beschränkten experimentellen Aufwand versucht, eine gewisse Information über die Regelstrecke zu ermitteln. Man schaltet einen Stellgrößensprung auf die Regelstrecke allein und mißt deren typische ´Sprungantwort´ (ihr 'Übergangsverhalten'). Diese kann prinzipiell verschiedenste Formen annehmen. Für zwei wichtige Typen der Sprungantwort entwickelten nun CHIEN-HRONES und RESWICK Formeln, mit denen man geeignete Reglerparameter einstellen kann.

2.9.1 Nichtschwingungsfähiges Übergangsverhalten der Regelstrecke, wobei die Sprungantwort in einem festen Endwert mündet

Bei „Einmünden in einen festen Endwert" spricht man manchmal von einer „Stecke mit Ausgleich "

Es liege folgende Situation vor ...



... wobei die Ein-Ausgangssignale detailliert so aussehen können:

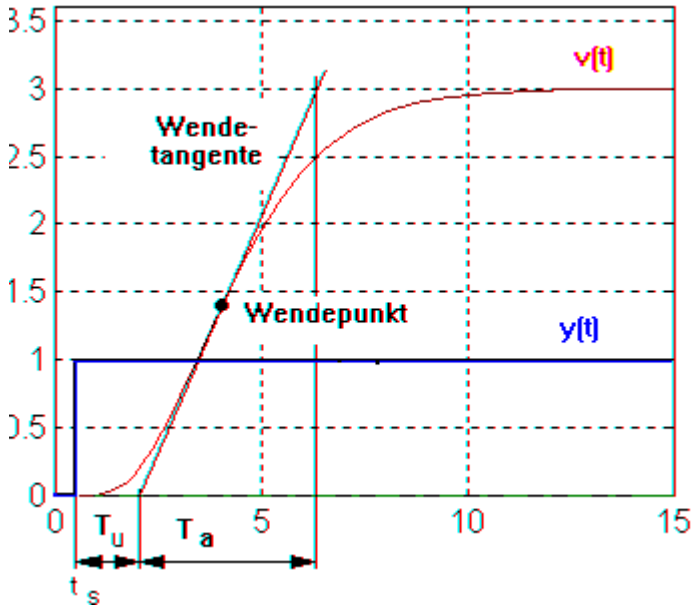


Bild 2.15: *Übergangsverhalten der Regelstrecke (hier ist willkürlich $V_0 = 0$ und $Y_0 = 0$)*
T_U = Ersatztotzeit (=Verzugszeit) in sec; T_a = Ausgleichszeit in sec.

Es ist weiterhin $K_s = \dfrac{V_{max} - V_o}{Y_{max} - Y_o}$ die Streckenverstärkung („Übertragungsbeiwert der Regelstrecke im Beharrungszustand").

Die Einstellung nach CHIEN-HRONES und RESWICK erfolgt nun folgendermaßen:

Reglertyp	Reglerparameter für aperiodischen Regelvorgang	Reglerparameter für 20% Überschwingen der Regelgröße
P-Regler	$K_P = \frac{0{,}3 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$	$K_P = \frac{0{,}7 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$
PI-Regler	$K_P = \frac{0{,}35 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$ $T_n = 1{,}2 \cdot T_a$	$K_P = \frac{0{,}6 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$ $T_n = T_a$
PID-Regler	$K_P = \frac{0{,}6 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$ $T_n = T_a$ $T_V = 0{,}5 \cdot T_u$	$K_P = \frac{0{,}95 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$ $T_n = 1{,}35 \cdot T_a$ $T_V = 0{,}47 \cdot T_u$
PD-Regler	$K_P = \frac{1{,}8 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$ $T_V = 0{,}5 \cdot T_u$	

Alternativ für den Fall, daß folgendes eintritt:

2.9.2 Übergangsverhalten der Regelstrecke, das sich bei Stellgrößensprüngen einem rampenähnlichen Verlauf angleicht („Strecke ohne Ausgleich“)

Angenommen, die bisherige Stellgröße einer Regelstrecke besitzt den Wert $Y_0=0$. Wenn nun ´zusätzlich´ ein Sprung an ihrem Eingang aufgeschaltet wird, so soll die Regelgröße eine „Sprungantwort“ wie im Bild 2.16 haben.

Am Eingang liege also:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le t_S \\ \Delta y = const. & \text{für } t > t_S \end{cases}$$

Am Ausgang entsteht:

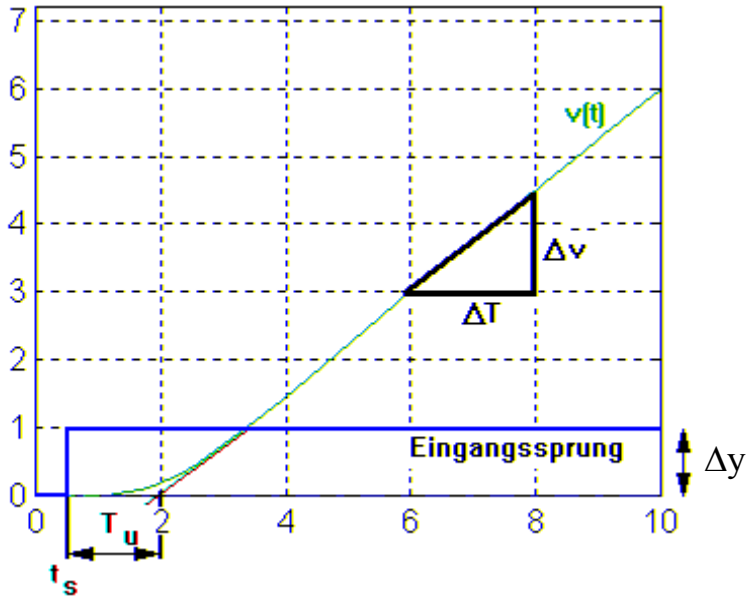


Bild 2.16: *Sprungantwort der Regelstrecke ohne Ausgleich.*
T_U = Ersatztotzeit (=Verzugszeit); T_i = Integrationszeitkonstante; üblicherweise ist $V_o = 0$

Es ist weiterhin $$T_i = \frac{\Delta y \cdot \Delta T}{\Delta v} .$$

Die Einstellung nach CHIEN-HRONES und RESWICK erfolgt nun folgendermaßen:

Reglertyp	Reglerparameter		
	K_P	T_n	T_V
P-Regler	$0{,}5 \cdot \frac{T_i}{T_u}$	--	--
PD-Regler	$0{,}5 \cdot \frac{T_i}{T_u}$	--	$0{,}5 \cdot T_u$
PI-Regler	$0{,}4 \cdot \frac{T_i}{T_u}$	$5 \cdot T_u$	--
PID-Regler	$0{,}4 \cdot \frac{T_i}{T_u}$	$3{,}2 \cdot T_u$	$0{,}8 \cdot T_u$

Eine Streckensprungantwort wie in Bild 2.16 weist auch die Regelstrecke des Einführungsbeispiels auf.

Die nachfolgenden Bilder zeigen die per Simulation aufgenommene Streckensprungantwort wie sie sich beim Einführungsbeispiel ergibt. Diese Regelstrecke ist ohne Ausgleich. Basierend darauf - die Simulationen mit den entsprechenden Reglern (eingestellt nach Chien-Hrones und Reswick)

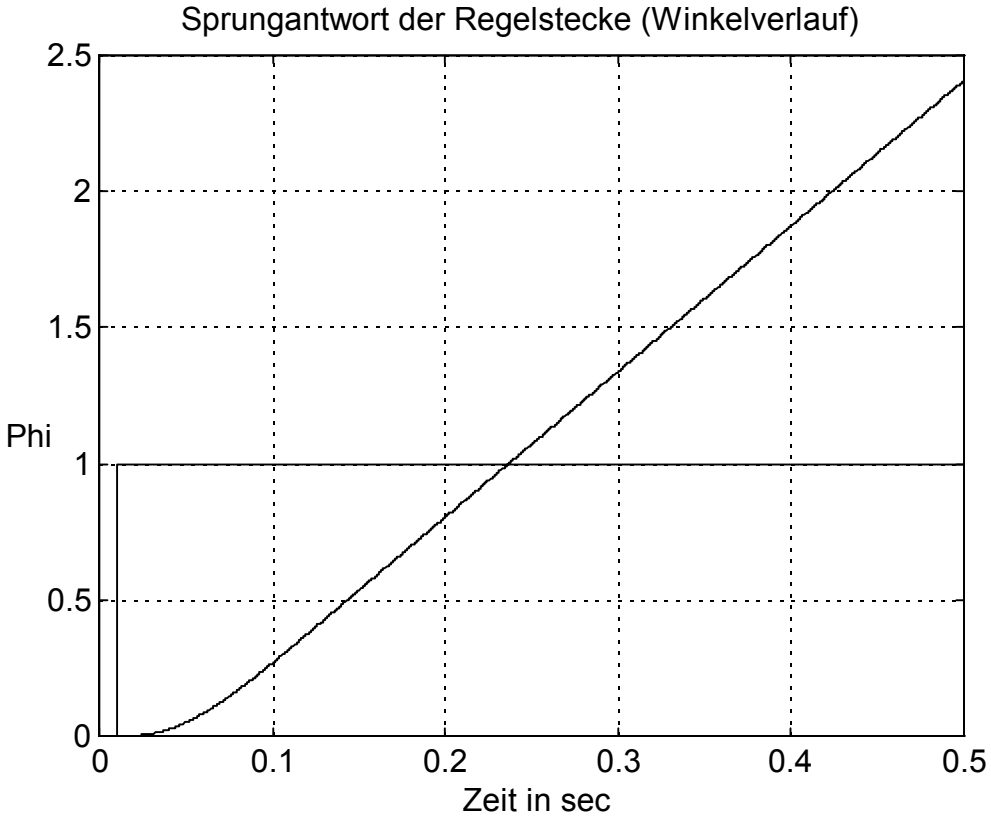


Bild 2.17: *Simulierte Sprungantwort der Strecke. Folgende Kenngrößen werden abgelesen: T_U = 0.041 sec; Δy = 1 rad, ΔT = 0,163 sec und Δv = 0,86 rad.*

P-Regelung: Aus den (per Simulation) aufgenommenen Werten errechnet sich:Ti = 0,189 sec. Nach den Einstellformeln ist $Kp = 0{,}5 \cdot \frac{T_i}{T_U} = 2{,}3$ zu setzen. Simulation ergibt:

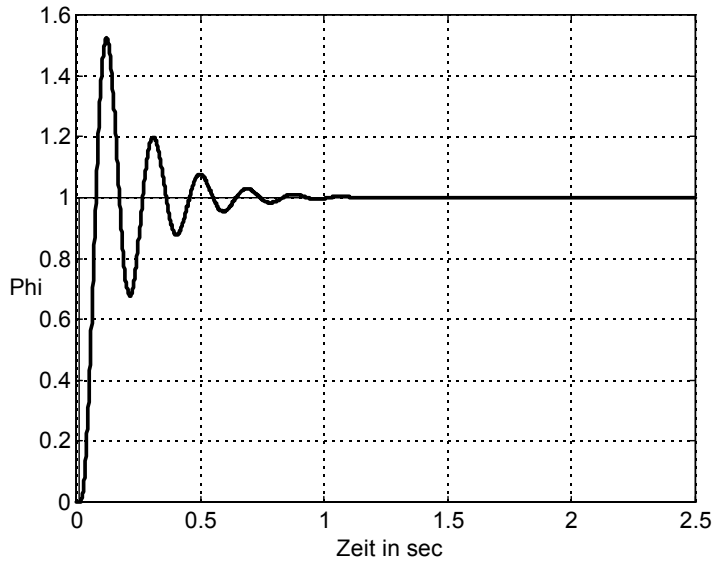


Bild 2.18: *Simulierte Sprungantwort des Regelsystems bei P-Regelung. Vgl. Bild 2.11*

PD-Regelung: Aus den (per Simulation) aufgenommenen Werten errechnet sich:

Ti = 0,189 sec. Nach den Einstellformeln ist $Kp = 0{,}5 \cdot \frac{T_i}{T_U} = 2{,}3$

und Tv = 0,02 sec zu setzen. Die Simulation ergibt:

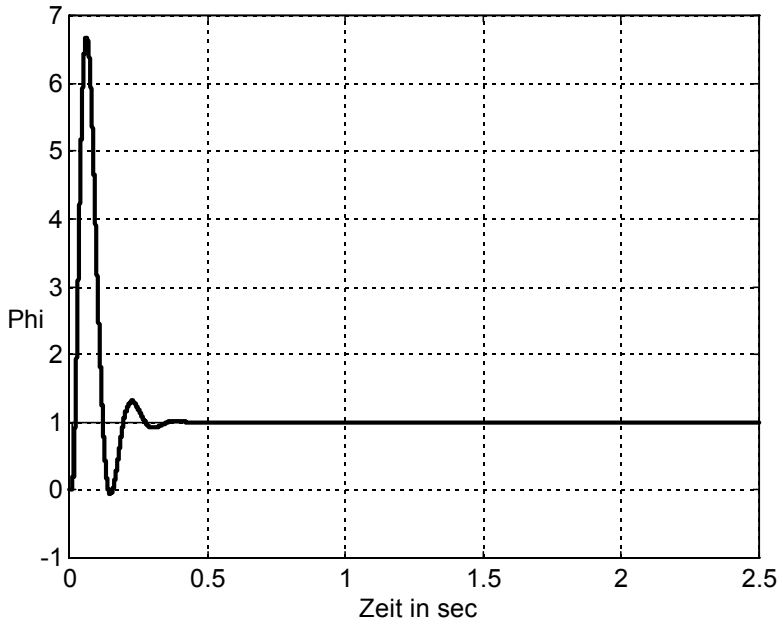


Bild 2.19: *Simulierte Sprungantwort des Regelsystems bei PD-Regelung. Unbrauchbar.*

PI-Reglung: Aus den (per Simulation) aufgenommenen Werten errechnet sich:Ti = 0,189 sec.

Nach den Einstellformeln ist $Kp = 0{,}4 \cdot (T_I / Tu) = 1{,}83$ und $T_N = 0{,}205$ sec zu setzen. Die Simulation ergibt:

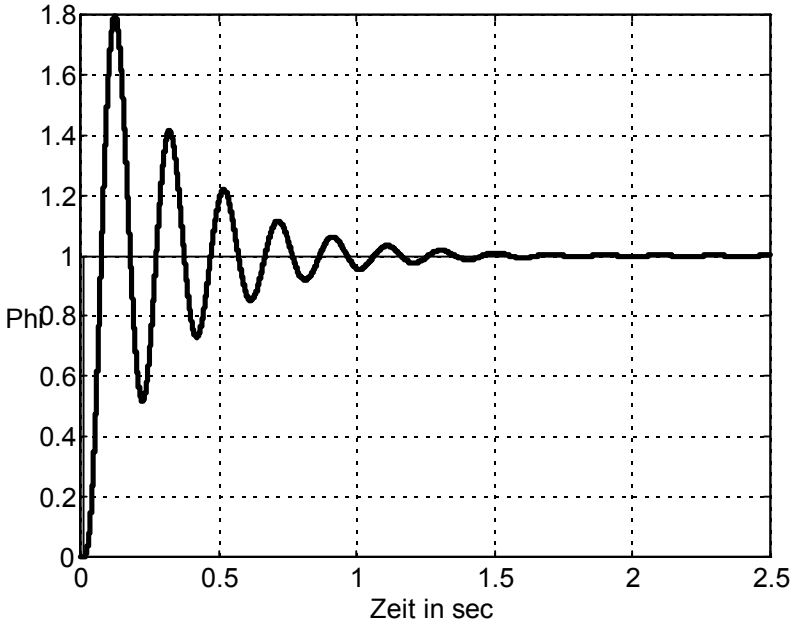


Bild 2.20: *Simulierte Sprungantwort des Regelsystems bei PI-Regelung. Vgl. mit Bild 2.12.*

PID-Regelung: Aus den (per Simulation) aufgenommenen Werten errechnet sich:Ti=0,189 sec. Nach den Einstellformeln ist
$Kp = 0{,}4 \cdot (T_I / Tu) = 1{,}83$ sowie $T_N = 0{,}1312$ sec und Tv = 0.0328 sec zu setzen. Die Simulation ergibt:

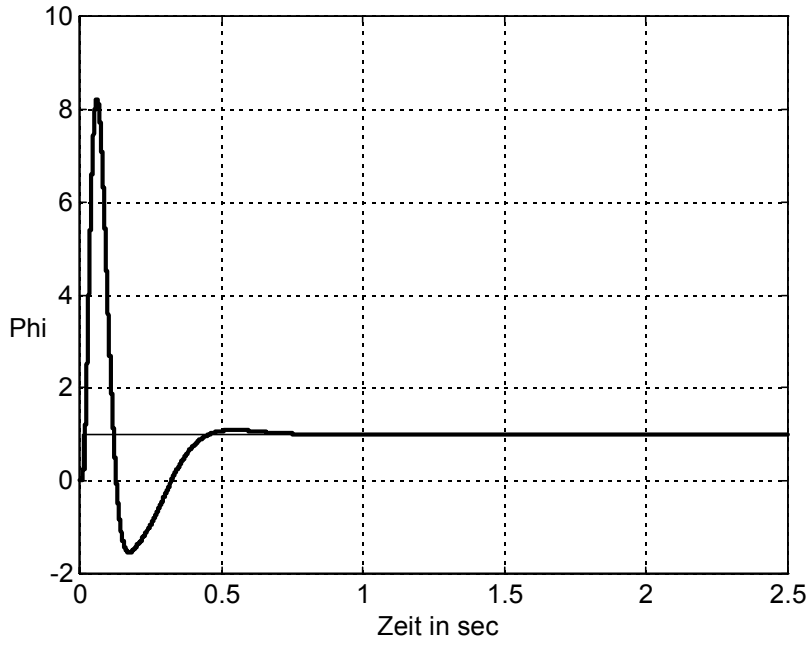


Bild 2.21: *Simulierte Sprungantwort des Regelsystems bei PID-Regelung. Unbrauchbar*

Wegen des unbefriedigenden Folgeverhaltens dieses Regelsystems bei Reglerparametrierung nach Chien-Hrones und Reswick wurde auf die Untersuchung des Störverhaltens verzichtet.

2.10 Parametrierung von PID-Algorithmen nach Takahashi

Ein PID-Regler realisiert folgende Operation:

Aus **e = w - v** - der Eingangsgröße für den Regler (vgl. Bild 2.9) wird gebildet:

$$y(t) = K_P \cdot \left[e(t) + \frac{1}{T_n} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + T_V \cdot \frac{d\,e(t)}{dt} \right]$$

Mit $t \to k \cdot T_{ab}$, $k \in \aleph_0$ folgt:

$$\frac{d\,e(t)}{dt} \approx \frac{e(k \cdot T_{ab}) - e((k-1) \cdot T_{ab})}{T_{ab}} = \frac{e_k - e_{k-1}}{T_{ab}} \quad - \quad \textit{Bildung der "Rückwärtsdifferenz"}$$

Und mit

$$\int_0^t e(\tau) d\tau \approx T_{ab} \sum_{i=0}^{k-1} e(i \cdot T_{ab}) = T_{ab} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} e_i$$

gilt endlich

$$y_k = K_p e_k + \frac{K_p T_{ab}}{T_n} \sum_{i=0}^{k-1} e_i + \frac{K_p T_V}{T_{ab}} (e_k - e_{k-1})$$

sowie folglich auch:

$$y_{k-1} = K_p e_{k-1} + \frac{K_p T_{ab}}{T_n} \sum_{i=0}^{k-2} e_i + \frac{K_p T_V}{T_{ab}} (e_{k-1} - e_{k-2})$$

Die Subtraktion der letzten beiden Zeilen liefert

$$y_k - y_{k-1} = K_p \cdot (e_k - e_{k-1}) + \frac{K_p T_{ab}}{T_n} \cdot (e_0 + ... + e_{k-1} - e_0 - .... - e_{k-2}) + \frac{K_p T_V}{T_{ab}} \cdot (e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2})$$

uns den PID-Algorithmus:

$$y_k = y_{k-1} + K_p \cdot (e_k - e_{k-1}) + \frac{K_p T_{ab}}{T_n} \cdot e_{k-1} + \frac{K_p T_V}{T_{ab}} \cdot (e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2})$$

(algorithmische Abarbeitung wie beim EULER´schen Polygonzugverfahren - vgl. 2.4.1)

Oft wird bei PID-Algorithmen der Tatsache Rechnung getragen, daß auch im Analogen gar nicht exakt differenziert wird. D.h.: Am Ausgang des in Bild 2.9 mit „D“ gekennzeichneten Kanals mißt man normalerweise nur eine „geglättete“ Ableitung.

Also verwende man statt $\dot{e}(t)$ *eine Ersatzgröße* $e_D(t)$.

Diese ist Lösung der Differentialgleichung $T_1 \cdot \frac{de_D}{dt} + e_D(t) = T_V \cdot \frac{de(t)}{dt}$

bzw. der zugehörigen Integralbeziehung: $T_V \cdot e(t) = T_1 \cdot e_D(t) + \int_0^t e_D(\tau) d\tau$

der PID-Algorithmus nimmt dann die Form

$$y_K = y_{K-1} + K_P \cdot (e_K - e_{K-1}) + \frac{K_P \cdot T_{ab}}{T_n} \cdot e_{K-1} + K_P \cdot e_{D,K} - K_P \cdot e_{D,K-1}$$

und

$$e_{D,K} = \left(1 - \frac{T_{ab}}{T_1}\right) \cdot e_{D,K-1} + \frac{T_V}{T_1} \cdot e_K - \frac{T_V}{T_1} \cdot e_{D,K-1}$$

an.

Wenn eine Regelstrecke mit Ausgleich vorliegt und das Übergangsverhalten auf einen Stellgrößensprung nichtschwingungsfähig ist (vgl. 2.8.1), dann stelle man die Reglerparameter für den PID-Algorithmus nach Takahashi wie folgt ein:

Reglertypen	Reglerparameter		
	K_P	T_N	T_V
P-Regler	$\frac{1}{K_s} \cdot \frac{T_a}{T_u}$	--	--
PI-Regler	$\frac{0{,}9}{K_s} \cdot \frac{T_a}{T_u + 0{,}5 \cdot T_{ab}}$	$3{,}33 \cdot (T_u + 0{,}5 \cdot T_{ab})$	--
PID-Regler	$\frac{1{,}2}{K_s} \cdot \frac{T_a}{T_u + T_{ab}}$	$2 \cdot \frac{(T_u + 0{,}5 \cdot T_{ab})^2}{T_u + T_{ab}}$	$0{,}5 \cdot (T_u + T_{ab})$

Die Formeln werden für $\frac{T_{ab}}{T_a} \le 0{,}1$ empfohlen.

Versuchen Sie, von den ausgeteilten Übungsaufgaben die Nummern 3-6 zu bearbeiten

„Ach es gäbe noch soviel zu sagen, aber ich glaube Sie haben nichts versäumt.“ Fontane

3. Systemtheoretische Aspekte

„Laßt die ihr hier eingeht alle Hoffnung fahren“. ... „Herr ihr Sinn beängstigt mich.“ ... „Hier sei jedweder Argwohn weggebannt und alle Zagnis sterb an diesem Orte.“ (Dante. Göttliche Kommödie; Höllenabstieg)

3.1. Regeln für die Laplace-Transformation

Sei L {f}= F(s) und L $^{-1}${F}= f(t).

Ausführlich: $F(s)=\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}dt$ und $f(t)=\frac{1}{2\pi j}\cdot\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s)\cdot e^{st}ds$;

Beachte L $^{-1}${F}= 0 für $t \le 0$

- *Linearitätssatz:* $L\left\{c_1\cdot f_1(t)+c_2\cdot f_2(t)\right\}=c_1\cdot F_1(s)+c_2\cdot F_2(s) \quad \forall c_1,c_2 \in \mathbf{C}, \mathbf{R}$

- *Ähnlichkeitssatz:* $L\left\{f(at)\right\}=\frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$

- *Verschiebungssatz:* $L\left\{f(t-a)\right\}=e^{-as}\cdot F(s)$

- *Dämpfungssatz:* $L\left\{e^{\alpha t}\cdot f(t)\right\}=F(s-\alpha)$

- *Differentiationssatz:* $L\left\{\dot{f}(t)\right\}=s\cdot F(s)-f(-0)$

  $$L\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^n\cdot F(s)-f(-0)\cdot s^{n-1}-\dot{f}(-0)\cdot s^{n-2}+\ldots+f^{(n-1)}(-0)$$

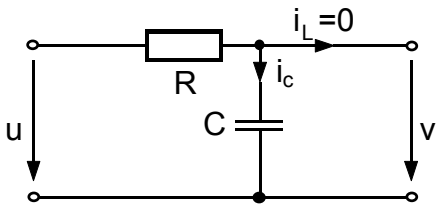
- *Integrationssatz:* $L\left\{\int_0^t f(\tau)\cdot d\tau\right\}=\frac{1}{s}\cdot F(s)$

- *Faltung:* $L^{-1}\left\{F_1(s)\cdot F_2(s)\right\}=\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\cdot d\tau=\int_0^t f_2(\tau)\cdot f_1(t-\tau)\cdot d\tau=f_1(t)*f_2(t)$

- *Grenzwertsätze:*
  $$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$
  $$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$
  Die Grenzwertsätze liefern nur dann richtige Ergebnisse, wenn die Grenzwerte im Zeitbereich existieren! Auf diese Tatsache werden wir später bei der Berechnung von stationären Regelfehlern achten müssen.

3.2. Übertragungsfunktionen, Gewichtsfunktionen, Übergangsfunktion

Beispiel:



$\tau = RC$

Zustandsmodell: $\tau \cdot \dot{v} + v = u; \quad v(0) = v_0;$

L -Transformation anwenden: $L\{\tau \cdot \dot{v} + v\} = L\{u\};$

Linearität ausnutzen: $\tau \cdot L\{\dot{v}\} + L\{v\} = L\{u\}$

Differentiationssatz: $\tau \cdot [s \cdot V(s) - v_0] + V(s) = U(s);$

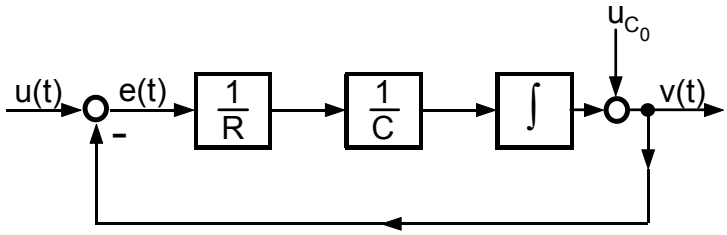
Ausdrücke in V(s) und U(s) zusammenfassen und ausklammern:

$$V(s) = \left(\frac{1}{1+s\tau}\right) \cdot U(s) + \left(\frac{\tau}{1+s\tau}\right) \cdot v_0$$

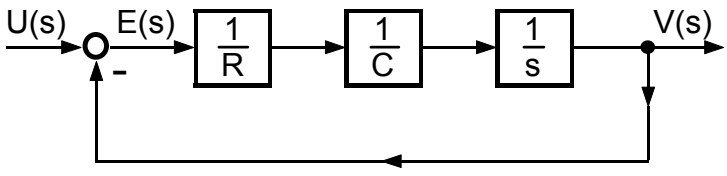
Anfangswert = 0: $\Rightarrow$ $\left.\frac{V(s)}{U(s)}\right|_{AW=0}$ = G(s) - Übertragungsfunktion (transferfunction)

Im vorliegenden Fall ist also $G(s) = \frac{1}{1+s\tau}$

Alternative Berechnung von G(s) mit Hilfe eines Strukturbildes:



Wenn man im Sinne des Integrationssatzes Blöcke mit „$\int$ “ durch $\frac{1}{s}$ ersetzt und die Anfangswerte = 0 setzt, dann erhält man das Strukturbild im Bildbereich der Laplace-Transformation:

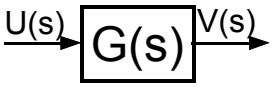


Aus dem Strukturbild im Bildbereich der Laplacetransformation liest man ab:

$$V(s) = \left(\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{C}\right)\cdot E(s)\,;\quad \text{E(s)= U(s)-V(s);}\quad \Rightarrow\quad V(s)\cdot\left(1+\frac{1}{sRC}\right) = U(s)\cdot\frac{1}{sRC}$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{sRC}}{1+\frac{1}{sRC}} = \frac{1}{1+sRC} = \frac{1}{1+s\tau} = G(s)$$

Abkürzende Darstellung:

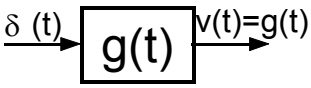


$$V(s) = G(s)\cdot U(s)$$

Sei speziell: U(s) = 1. Dann gilt $V(s) = G(s)\cdot 1 \qquad = G(s)$

Das Ausgangssignal ist die Übertragungsfunktion selbst.

Für den Zeitbereich gilt bekanntlich (vgl. VL Systemtheorie): $L^{-1}\{1\} = \delta(t)$.
Im Sinne der bereits verwendeten, abkürzenden Darstellung kann man dies so darstellen:



$v(t) = g(t) * \delta(t) \qquad = g(t)$

Es ist :

g(t)= $L^{-1}\{G(s)\}$ die ***Gewichtsfunktion;*** *(Impulsantwort, impulse response, Stoßantwort)*

Offenbar gilt bei linearen, zeitinvarianten Systemen
(d.h. Systemen mit konstanten Parametern) immer:

Systemreaktion v(t) = $\int_0^t g(t-\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau$

Berechnung des Ausgangssignals v(t), wenn u(t) - <u>*Einheitssprung*</u> $\sigma(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t \le 0 \\ 1 \text{ für } t > 0 \end{cases}$

$$V(s) = G(s)\cdot\frac{1}{s} \qquad \bullet\!\!-\!\!\circ \qquad v(t) = g(t) * \sigma(t) = \int_0^t g(\tau)\cdot d\tau = :h(t)$$

Man nennt.

h(t)= $L^{-1}\left\{G(s)\cdot\frac{1}{s}\right\} = \int_0^t g(\tau)\cdot d\tau$ ***Übergangsfunktion*** (Sprungantwort - step response)

Während man g(t) meßtechnisch nur schwer erfassen kann, ist h(t) normalerweise einfach zu messen!

Man beachte, daß bei uns die Einheitssprungfunktion definiert wurde als

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t \le 0 \\ 1 \text{ für } t > 0 \end{cases}$$

Es gibt auch bei anderen Autoren die Definition als

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0 \\ 1 \text{ für } t \ge 0 \end{cases}.$$ Das gibt manchmal Anlaß zu Mißverständnissen

Zusatzbemerkung: Ausgehend von $v(t) = \int_0^t g(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau$

bzw. von $V(s) = G(s)\cdot U(s)$

erhält man durch elementare Umformungen:

$$V(s) = G(s)\cdot U(s)$$

$$= \frac{1}{s}G(s)\cdot sU(s) \quad \text{mit "1" multipliziert}$$

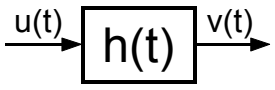
$$= \frac{1}{s}G(s)\cdot\big(sU(s) - u(0) + u(0)\big) \quad \text{"0" addiert}$$

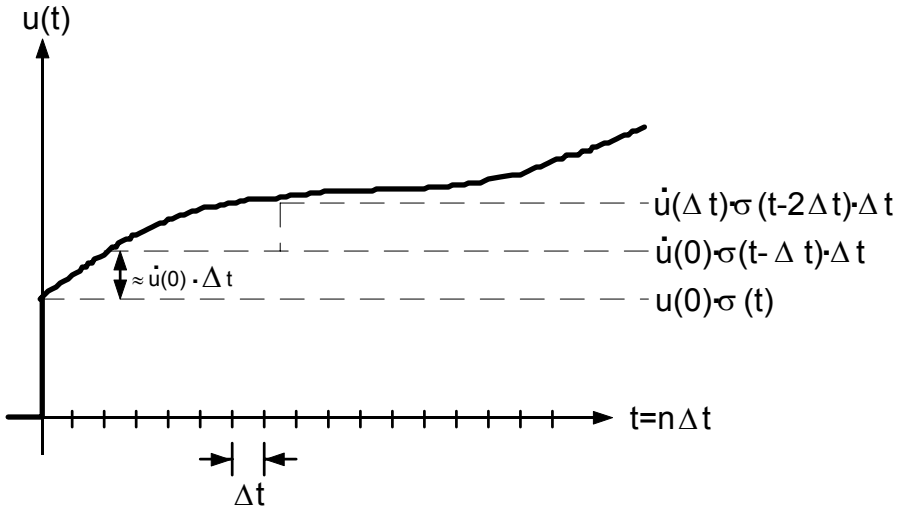
$$= \frac{1}{s}G(s)\cdot\big(sU(s) - u(0)\big) + \frac{1}{s}G(s)\cdot u(0)$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = h(t) * \dot{u}(t) + h(t)\cdot u(0)$$

$$v(t) = h(t)\cdot u(0) + \int_0^t h(t-\tau)\cdot\dot{u}(\tau)\cdot d\tau \quad \text{das Duhamel – Integral}$$

Anschauliche Interpretation:





$$u(t) \approx u(0)\cdot\sigma(t) + \sum_{i=1}^{n}\dot{u}(i-1)\cdot\Delta t\cdot\sigma(t-i\Delta t) = u(0)\cdot\sigma(t) + \sum_{i=1}^{n}\dot{u}(i-1)\cdot\sigma(t-i\Delta t)\cdot\Delta t$$

Am Ausgang gilt: $v(t) \approx h(t)\cdot u(0) + \sum_{i=1}^{n}\dot{u}(i-1)\cdot h(t-i\Delta t)\cdot\Delta t$

mit: $\Delta t \to dt \approx 0; \quad n \to \infty; \quad i\Delta t \to \tau$

$$\Rightarrow \quad v(t) = h(t)\cdot u(0) + \int_0^t \dot{u}(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau$$

Weiterhin nennt man bekanntlich (vgl. die Vorlesungen Meßtechnik; Systemtheorie; und Schaltungstechnik)

$G(s)\big|_{s=j\omega}$ - den Frequenzgang (frequency response)

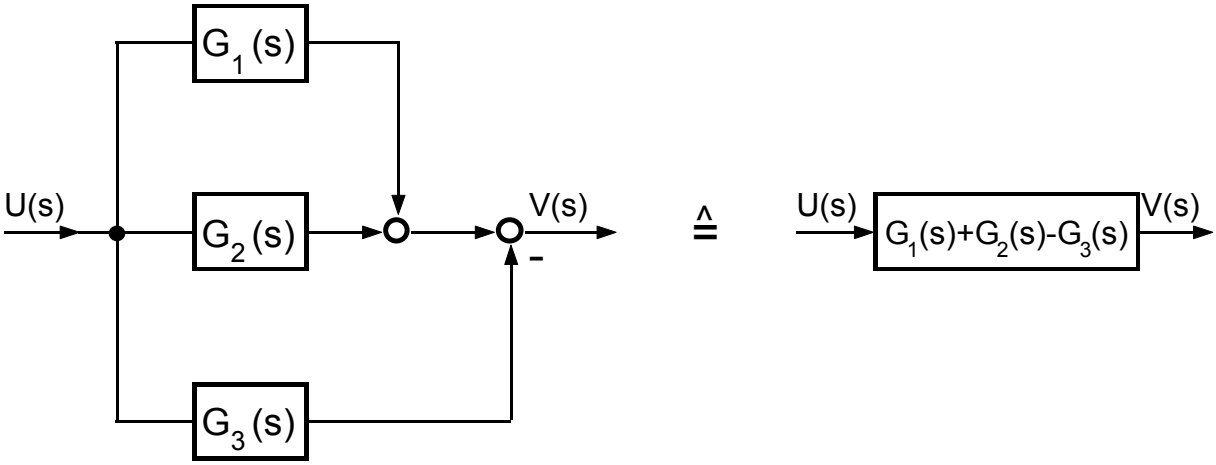
Vorsicht:

Der **Frequenzgang** wird in der Nachrichtentechnik auch die **Systemfunktion** genannt und mit $H(\omega)$ abgekürzt.

Es gilt aber: Regelungstechnik $G(j\omega) \equiv H(\omega)$ Nachrichtentechnik,
was hoffentlich nicht zu Mißverständnissen führt!

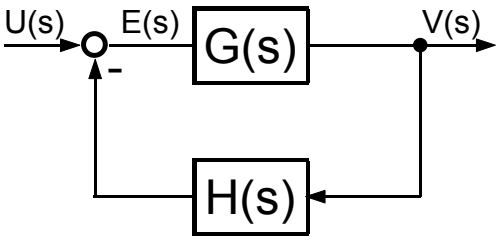
Der Frequenzgang nimmt wegen seiner meßtechnischen Bedeutung in der Regelungstechnik und in der Nachrichtentechnik (dort unter dem Namen Systemfunktion) eine zentrale Stellung ein.

d) Parallelschaltung:

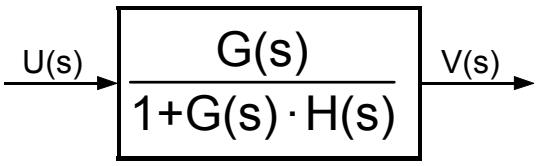


$$\frac{V(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) - G_3(s)$$

e) Gegenkopplung:



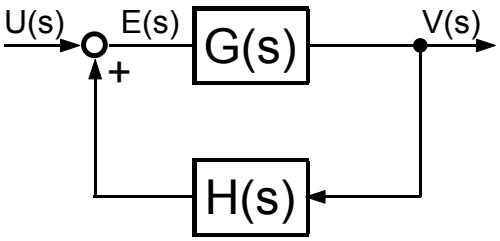
$$V(s) = G(s) \cdot \big(U(s) - H(s) \cdot V(s)\big)$$
$$\big(1 + G(s) \cdot H(s)\big) \cdot V(s) = G(s) \cdot U(s)$$
$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$



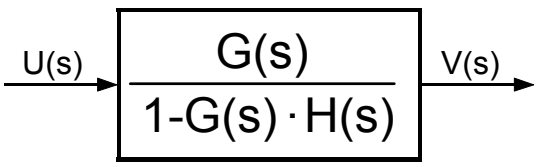
Merkregel für Gegenkopplung:

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{Vorwärts}{1 + Kreis}$$

f) Mitkopplung:



$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s) \cdot H(s)}$$



Merkregel für Mitkopplung:

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{Vorwärts}{1 - Kreis}$$

3.4.1 Anwendung auf das Einführungsbeispiel

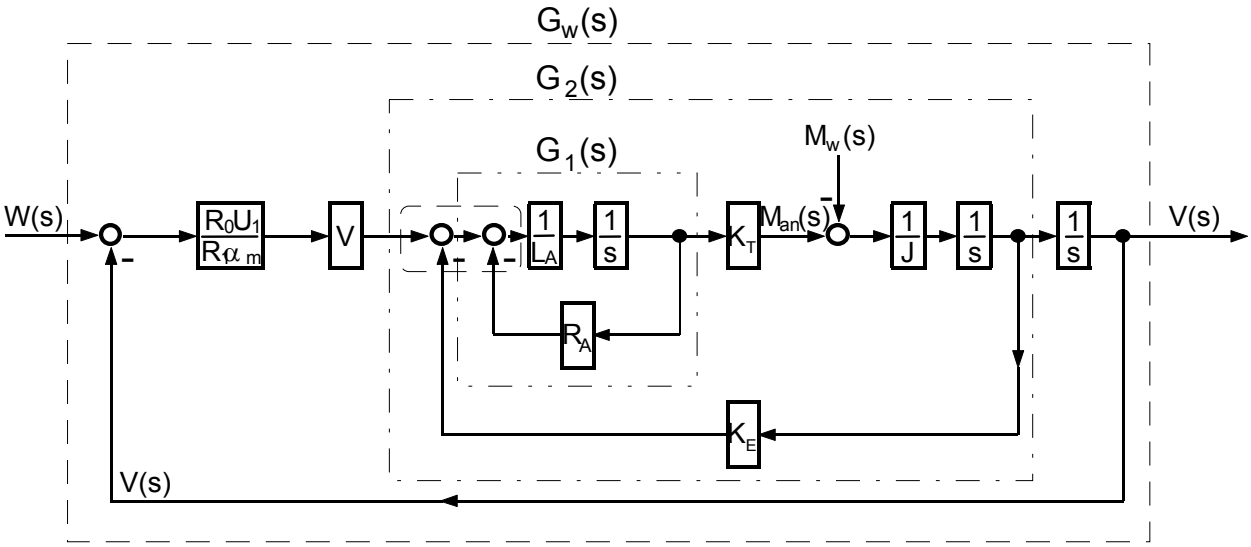


Bild 3.1: *Strukturbild des Einführungsbeispiels im Bildbereich der L -Transformation*

Die in Bild 3.1 gestrichelt eingerahmten zwei Summenpunkte sind durch Auflösung eines Summenpunktes entstanden. (vgl. Strukturbild unter Abschnitt 2.3.)

Das Strukturbild wird jetzt durch Auflösung der Gegenkopplungen $G_1(s), G_2(s)$ vereinfacht:

$$G_1(s) = \frac{\frac{1}{L_A} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{R_A}{L_A} \cdot \frac{1}{s}} = \frac{1}{R_A + sL_A}$$

$$G_2(s) = \frac{\frac{1}{R_A + sL_A} \cdot K_T \cdot \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{K_T \cdot K_E}{R_A + sL_A} \cdot \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{s}} = \frac{K_T}{s(R_A + sL_A) \cdot J + K_T \cdot K_E} = \frac{K_T}{s^2 JL_A + sJR_A + K_T K_E} = G_{Motor}(s)$$

Mit den praktisch wichtigen Abkürzungen: $\tau_{El} = \frac{L_A}{R_A}$ – *Elektrische Zeitkons* tan *te* (sec)

und: $\tau_M = \frac{J \cdot R_A}{K_E \cdot K_T}$ – *mechanischeZeitkons* tan *te* (sec)

wird daraus:

$$G_{Motor}(s) = \frac{\frac{1}{K_E}}{s^2 \tau_M \cdot \tau_{El} + s \cdot \tau_M + 1} = \frac{\frac{\omega_0}{U_0}}{s^2 \tau_M \cdot \tau_{El} + s \cdot \tau_M + 1}$$

Vgl. Kapitel 2 *Seite* 8

Wir wollen diese (für die Antriebstechnik wichtigen Abkürzungen) hier nicht weiter verwenden. Vergleichen Sie aber bitte mit 3.4.2 .

Führungsübertragungsfunktion *(die Abkürzungen für die mechanische und elektrische Zeitkonstante werden jetzt nicht weiter verwendet):*

$$G_w(s) = \left.\frac{V(s)}{W(s)}\right|_{\substack{Z=0\\(M_w=0)}} = \frac{\frac{R_0}{R_1}\cdot\frac{U_1}{\alpha_m}\cdot V\cdot\left(\frac{K_T}{s^2JL_A + sJR_A + K_TK_E}\right)\cdot\frac{1}{s}}{1+\frac{R_0}{R_1}\cdot\frac{U_1}{\alpha_m}\cdot V\cdot\left(\frac{K_T}{s^2JL_A + sJR_A + K_TK_E}\right)\cdot\frac{1}{s}} = \frac{R_0U_1VK_T}{s\left(s^2JL_A + sJR_A + K_EK_T\right)R_1\alpha_m + R_0U_1VK_T}$$

$$G_w(s) = \frac{R_0U_1VK_T}{s^3JL_AR_1\alpha_m + s^2JR_AR_1\alpha_m + sK_EK_TR_1\alpha_m + R_0U_1VK_T}$$

Störübertragungsfunktion:

$$G_z(s) = \left.\frac{V(s)}{M_w(s)}\right|_{W=0} = \cdots \quad (\textit{als Übungsaufgabe selber rechnen!})$$

Wegen $G_w(0) = 1$ gilt (bei Störung $m_W = 0$), daß aus $w(t) = \hat{\alpha}\cdot\sigma(t)$ folgt: $\lim_{t\to\infty} v(t) = \hat{\alpha}$

Nachweis:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot V(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot G_w(s)\cdot\frac{\hat{\alpha}}{s} = \hat{\alpha}\cdot\lim_{s\to 0} G_w(s) \overset{G_w(0)=1}{=} \hat{\alpha} \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to\infty} v(t) = \hat{\alpha}$$

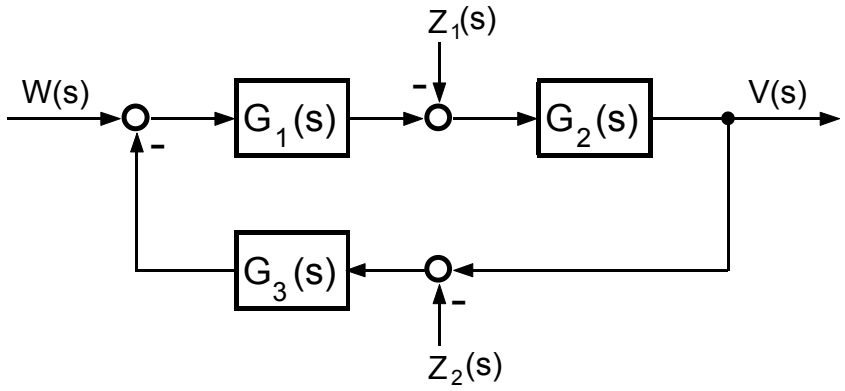
Die Grenzwertangabe gilt natürlich nicht, wenn das Regelsystem instabil sein sollte!

Da sich Führungs- und Störsignale ungestört überlagern (lineares System!) so gilt:

$$V(s) = G_w(s)\cdot W(s) + G_z(s)\cdot M_W(s)$$

Einschub:

Störsignale, Führungssignale die an verschiedenen Stellen des Regelkreises angreifen



$$G_w(s) = \left.\frac{V(s)}{W(s)}\right|_{\substack{Z_1=0\\Z_2=0}} = +\frac{G_1(s)\cdot G_2(s)}{1+G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)}$$

$$G_{z_1}(s) = \left.\frac{V(s)}{Z_1(s)}\right|_{\substack{Z_2=0\\W=0}} = -\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)}$$

beachte : gleicher Nenner !!!

$$G_{z_2}(s) = \left.\frac{V(s)}{Z_2(s)}\right|_{\substack{Z_1=0\\W=0}} = +\frac{G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)}{1+G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)}$$

3.4.2 Nochmalige Berechnung von Gw(s) unter Verwendung von praktisch gebräuchlichen Kenngrößen.

In die neuerliche Berechnung wird die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung mit einbezogen. Ausgangspunkt ist das folgende Strukturbild:

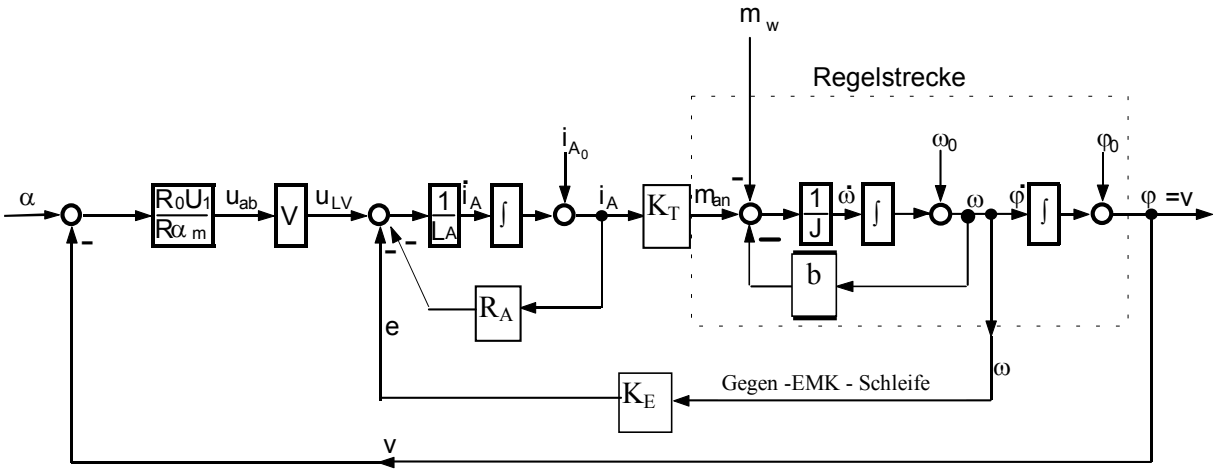


Bild 3.2: *Strukturbild zum Einführungsbeispiel. Jetzt mit Berücksichtigung einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung.*

Die Störgröße m_w sei jetzt wieder 0; ebenso die Anfangswerte. Die ersten Umformungen ergeben das folgende Strukturbild im Bildbereich der Laplacetransformation:

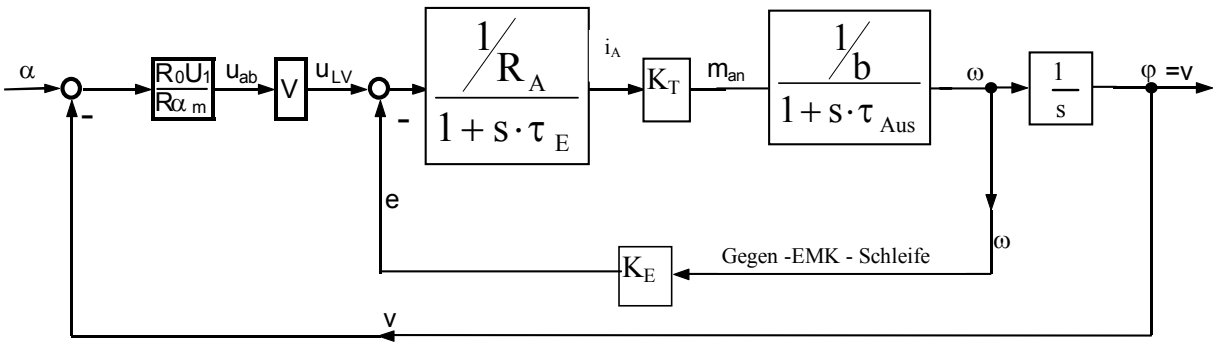


Bild 3.3: *Wie Bild 3.2 Allerdings im Bildbereich der Laplacetransformation. $m_W = 0$.*

Man nennt $\frac{L_A}{R_A} = \tau_E$ — die elektrische Zeitkonstante

(manchmal auch Ankerzeitkonstante τ_A) in sec.

$\frac{J}{b} = \tau_{Aus}$ — die Auslaufzeitkonstante in sec.

Die beiden Zeitkonstanten sind meßtechnisch sehr leicht erfaßbar:

- Die Auslaufzeitkonstante im Auslaufversuch. Man läßt den Motor auf seine Nenndrehzahl hochfahren und schaltet dann die Ankerspannung ab. Der Motor läuft ohne Ankerstrom (und folglich ohne Antriebsmoment) aus. Die Auslaufzeitkonstante wird dabei gemessen. Man vergleiche mit der nachstehenden Skizze.

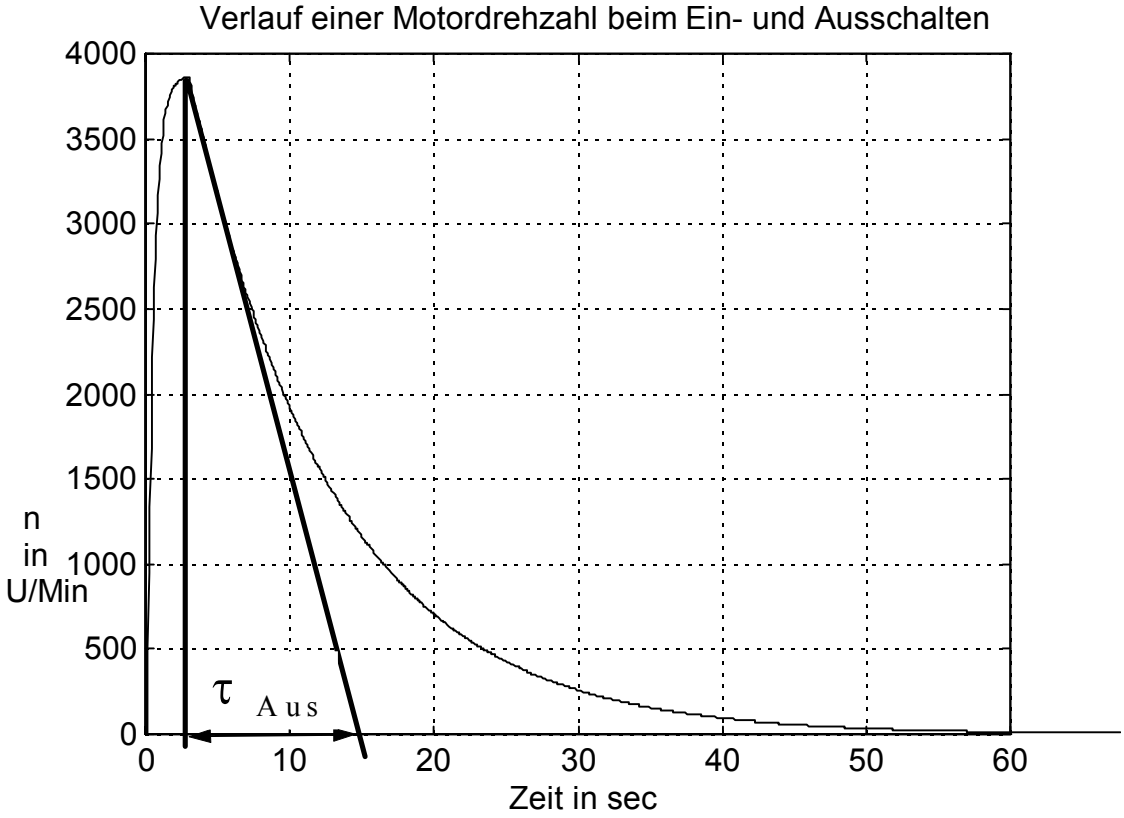


Bild 3.4: *Verlauf Motordrehzahl. Auslaufzeitkonstante des Motors + Last nach Abschalten der Motorspannung. Damit liegt $i_A = 0$ bzw. $m_{an} = 0$ am mechanischen Teilsystem an.*

Es sei hier in diesem Zusammenhang noch einmal auf die Motortabellen unter 2.3 verwiesen. Die elektrische Zeitkonstante ist dort jeweils angegeben - die Auslaufzeitkonstante allerdings nicht.

- Die elektrische Zeitkonstante im Kurzschlußversuch. Man bremst die Antriebswelle des Motors fest (blockiert also die Drehzahl) und gibt - bei abgeschalteter Regelung - einen „kleinen“ Spannungssprung auf die Klemmen des Ankerkreises. Am Ankerstromverlauf kann man die elektrische Zeitkonstante sofort herauslesen.

Man vergleiche mit der nachstehenden Skizze.

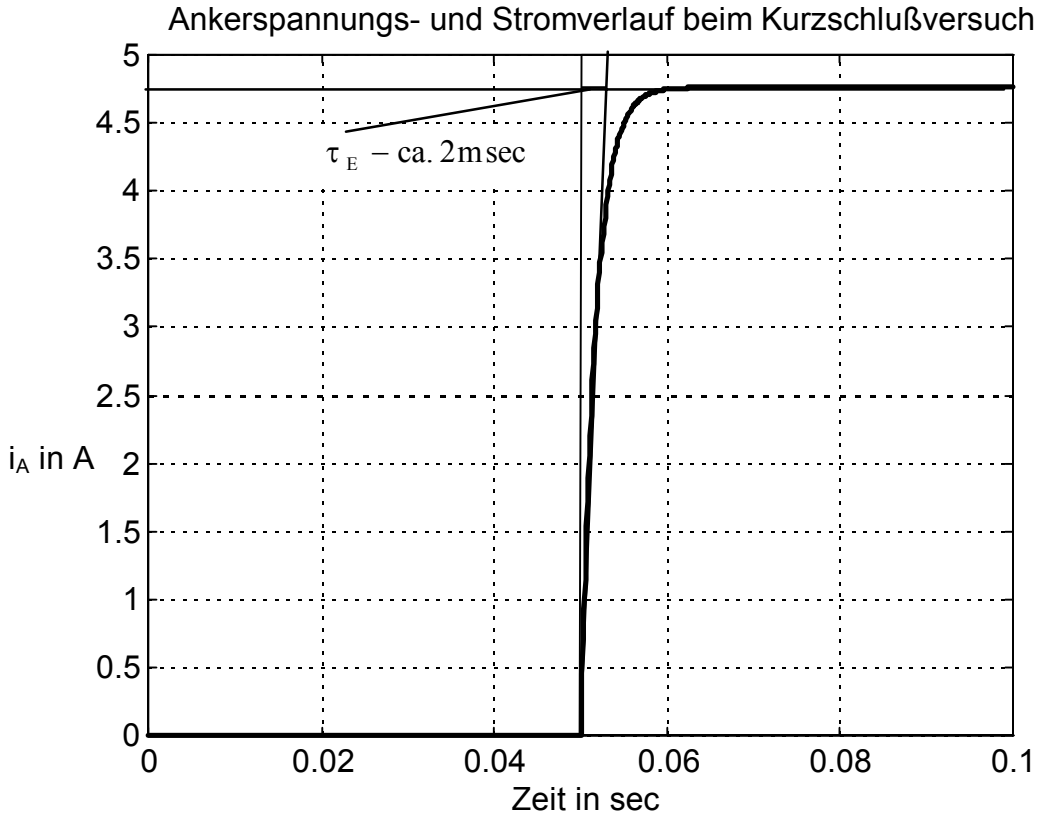


Bild 3.5: *Verlauf des Motorstroms (dick ausgezeichnet) beim Kurzschlußversuch.*

Die elektrische Zeitkonstante ist sehr viel kleiner als die Auslaufzeitkonstante. Nicht selten findet man deshalb eine alternative Darstellung zu 3.3:

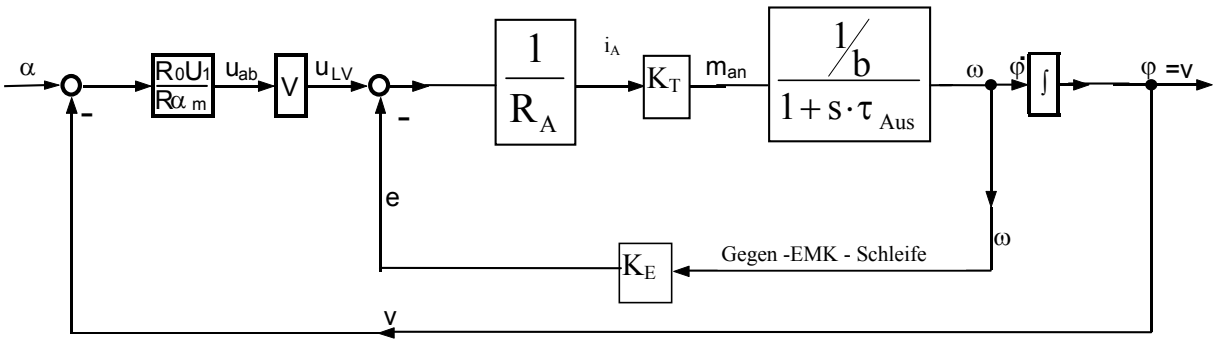


Bild 3.6: *Darstellung ähnlich wie in 3.3. Allerdings ist die (vergleichsweise) schnelle Dynamik des elektrischen Teilsystems gegenüber dem mechanischen Teilsystem vernachlässigt.*

Ausgehend von der Darstellung in 3.3 kann man weiter zusammenfassen:

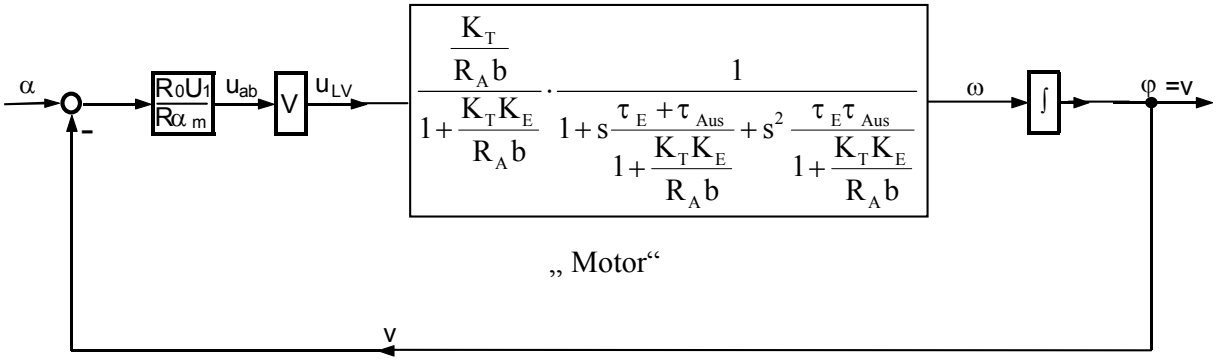


Bild 3.7: *Wie Bild 3.3. Allerdings zusammengefaßt.*

Es wurde schon bemerkt, daß $\tau_E << \tau_{Aus}$ gilt. Man kann deshalb mit guter Näherung für den Motor mit u_{LV} als Eingang und ω als Ausgang schreiben:

$$G_\omega(s) = \frac{\frac{K_T}{R_A b}}{1+\frac{K_T K_E}{R_A b}} \cdot \frac{1}{1+s\frac{\tau_{Aus}}{1+\frac{K_T K_E}{R_A b}}}$$

Den Term $\frac{\tau_{Aus}}{1+\frac{K_T K_E}{R_A b}} = \frac{J/b}{1+\frac{K_T K_E}{R_A b}}$ kürzt man ab als

τ_M - die mechanische Zeitkonstante (in sec).

τ_M - findet sich auch in den Motortabellen unter 2.3. Da normalerweise $\frac{K_T K_E}{R_A b} >> 1$ kann man in der Fachliteratur manchmal auch vereinfachend die Abkürzung

$$\tau_M = \frac{\tau_{Aus}}{\frac{K_T K_E}{R_A b}} = \frac{J R_A}{K_T K_E}$$ finden.

Man vergleiche z.B. mit Justus: “Dynamisches Verhalten el. Maschinen“ Vieweg Verlag,
oder Kenjo, Nagamori: „Permanent-Magnet and Brushless DC-Motors“, Clarendon Press Oxford, 1985.(In diesem Buch wird $K = K_E = K_T$ gesetzt.)
oder „Die Technik der el. Antriebe (Grundlagen“) - VEM-Handbuch, VEB - Verlag Technik Berlin. (In diesem Buch wird $K_E = K_T = K_M \Phi_M$ gesetzt.)
oder Kindler, Pohl: „Kleines regelungstechnischesPraktikum“, VEB - Verlag Technik Berlin. (Dort wird mit der von uns angegebenen Formel die „elektromechanische Zeitkonstante“ bezeichnet. Mit T_M wird in diesem Buch die Auslaufzeitkonstante bezeichnet.)

Nur für Interessierte: Der Verweis auf die mechanische Zeitkonstante fiel deshalb so umfangreich aus, weil es auch bekannte Fachbücher gibt, wo die mechanische Zeitkonstante etwas anders eingeführt wird. Dort wird sie durch normierte (also auf Nenngrößen bezogene) Größen gekennzeichnet.

Weiterhin handelt es sich bei $\frac{\frac{K_T}{R_A b}}{1+\frac{K_T K_E}{R_A b}} \approx \frac{1}{K_E}$ offenbar um die Winkelgeschwindigkeit im Leerlauf (vgl. Ausführungen in 2.3) „ω_0“ bezogen auf die Nennspannung „U_0“

Dimension $(\frac{\text{rad / sec}}{\text{Volt}})$ bzw $(\frac{\text{Umdr / sec}}{\text{Volt}})$.

Endlich gelangen wir zu der für den Praktiker nützlichen Enddarstellung:

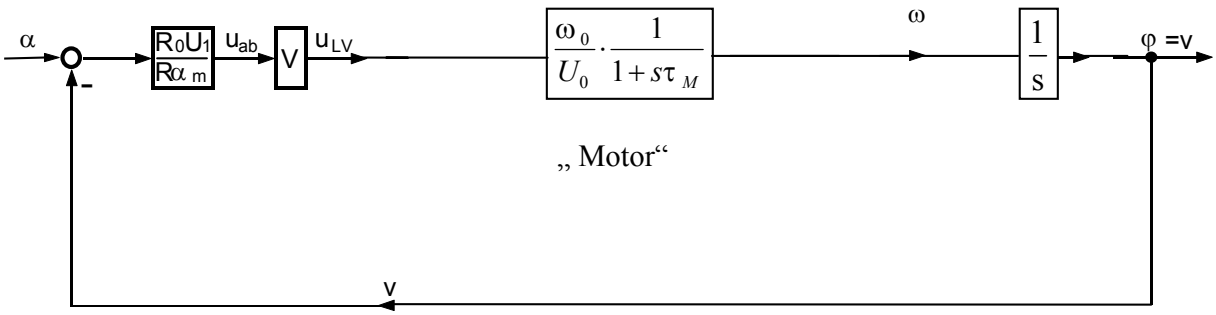


Bild 3.8: *Enddarstellung nach Vereinfachung bei Vorlage der Struktur von Bild 3.2 Der Einfluß des Windmoments (Lastmoments) fehlt noch.*

Die zusätzliche Berücksichtigung des Windmoments führt zu der folgenden vereinfachten Blockstruktur.

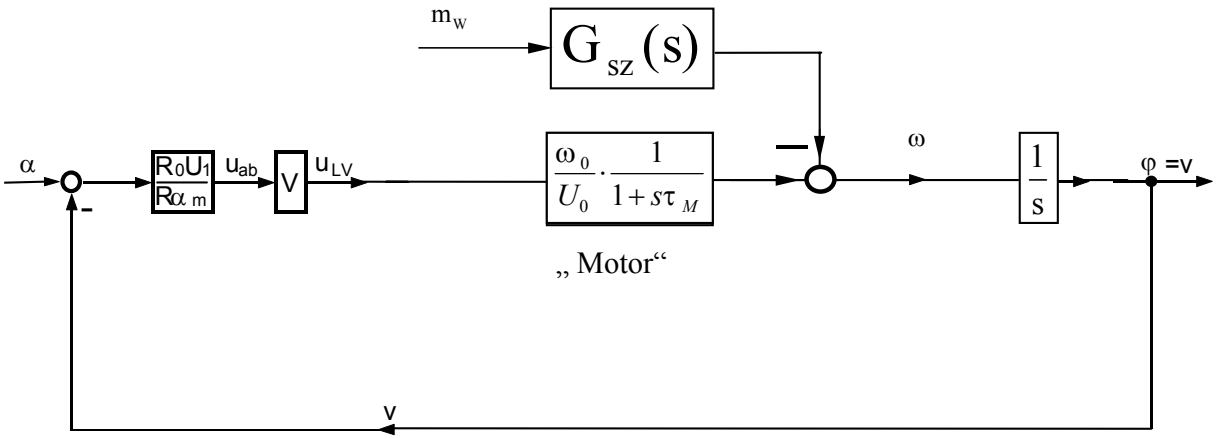


Bild 3.9: *Enddarstellung nach Vereinfachung bei Vorlage der Struktur von Bild 3.2 Der Einfluß des Windmoments wird durch $G_{sz}(s)$ beschrieben.*

Berechnen Sie $G_{sz}(s)$ selber und verwenden Sie ausgehend von Bild 3.2 die bisher gebrauchten Abkürzungen!

3.4.3 Schlußbemerkungen

Aus der VL Systemtheorie ist uns eine weitere Methode bekannt, wie man ausgehend vom Zustandsmodell die zugehörige Übertragungsfunktion G(s) berechnen kann.

Es gilt

$$G(s) = \underline{c}^T \left(s\underline{E} - \underline{A}\right)^{-1} \underline{b} + d \quad \text{bzw.} \quad \text{abgekürzt} \quad G(s) = \underline{c}^T \, \underline{\Phi}(s) \underline{b} + d \qquad (3.0)$$

Für die Handrechnung ist die Formel (3.0) umständlich, wenn die $\underline{A}$-Matrix von höherer Ordnung als 3 ist.

Es geht auch ohne Handrechnung!

Zunächst sei auf MATLAB verwiesen. Unter Verwendung der Control System Toolbox kann man auf den Befehl „ss2tf“ verwenden. Dieser Befehl führt (3.0) aus.

Beispiel: [Zaehler, Nenner] = ss2tf(A,b,c,d,iu)

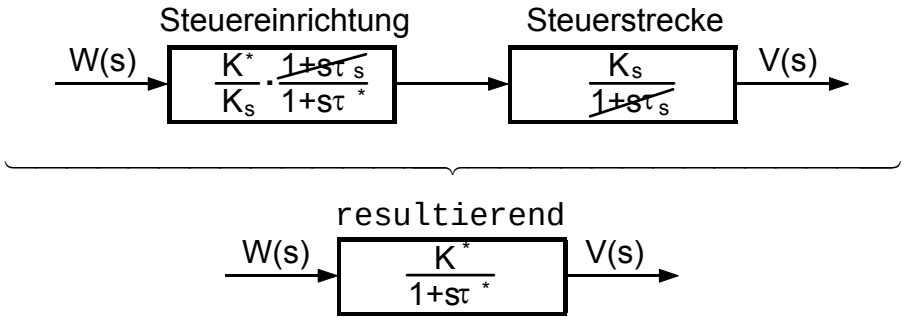
liefert das Zaehler- und Nennerpolynom der Übertragungsfunktion zum Zustansmodell. „iu“ bezeichnet den „iu-ten“ Eingang, falls es sich bei „b“ nicht (wie bei uns üblich und dann ist iu=1) um einen Vektor sondern um eine Matrix handelt.

Natürlich funktioniert die Berechnung von G(s) auf der Grundlage von Formel (3.0) auch dann wenn man symbolische Programmiersprachen wie MATCAD oder MATHEMATICA verwendet.

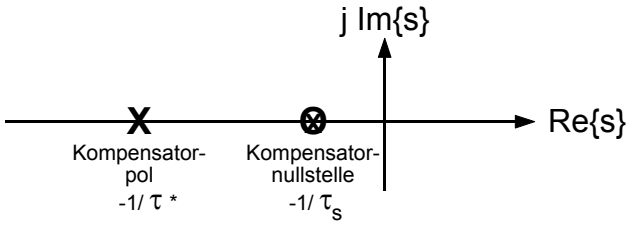
3.5 Anmerkungen zum Steuerungsproblem

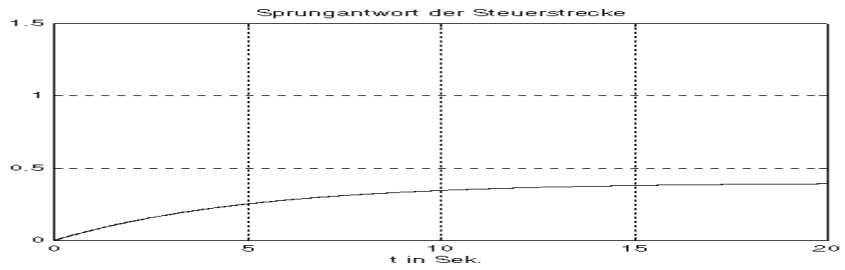
(Kürzen von langsamen Polstellen der Steuerstrecke)

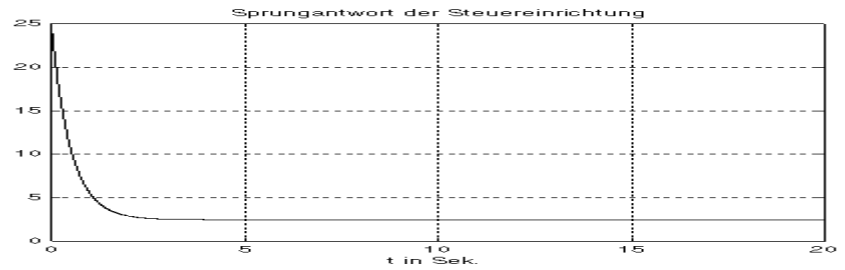
„Nun fängt mir an, fast selbst der Kopf zu schwanken“ Goethe, Faust I

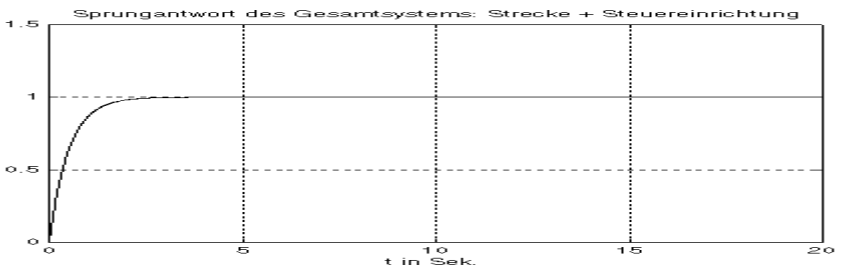


Interpretation der Kürzung im P/N-Plan:



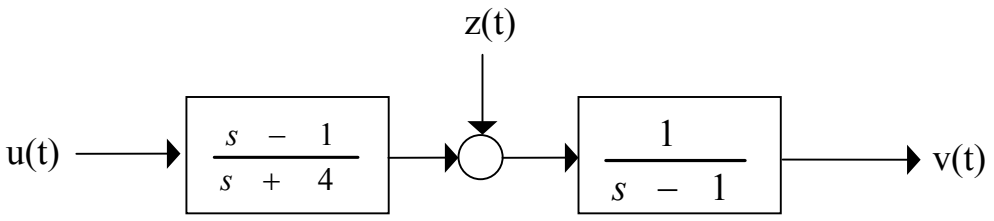




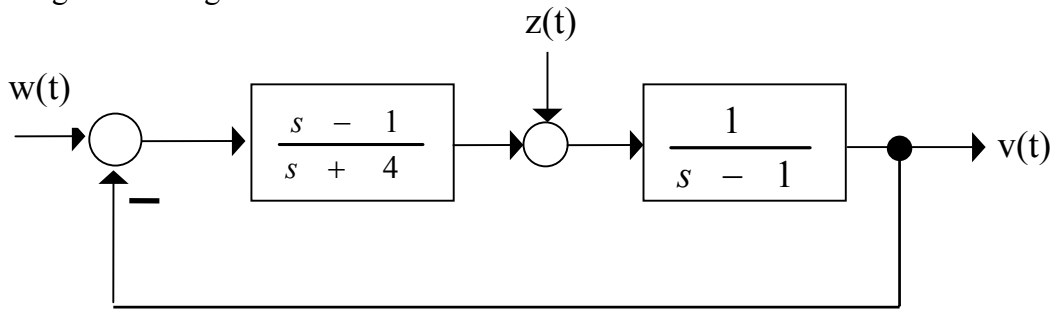


Das Kürzen von „instabilen“ Polen (Pole mit $Re\{s_{i\infty}>0\}$) ist sowohl beim Steuerungsproblem
als auch beim Regelungsproblem verboten !

Nachweis:
Bei Steuerung wird zwar im Vorwärtszweig (u → v) der instabile Pol herausgekürzt, die (stets vorhandenen) Störungen am Streckeneingang „z“ werden durch den instabilen Streckenpol auf dem Übertragungsweg (z → v) angefacht.



Bei Regelung gilt dasselbe. Dies zeigt auch die Betrachtung an der Blockdarstellung und die zugehörige Rechnung :



Hier gilt: $$G_w(s)=\frac{\frac{(s-1)\cdot 1}{(s+4)\cdot(s-1)}}{1+\frac{(s-1)}{(s+4)(s-1)}}=\frac{1}{s+5}$$ - stabiles Führungsverhalten

$$G_z(s)=\frac{\frac{1}{(s-1)}}{1+\frac{(s-1)}{(s+4)(s-1)}}=\frac{(s+4)}{(s+4)\cdot(s-1)+(s-1)}=\frac{(s+4)}{(s-1)\cdot(s+5)}$$ - instabiles Störverhalten

Hier taucht der „instabile Pol“ wieder auf !

3.6. Zur schaltungstechnischen Realisierung von Übertragungsfunktionen (bzw. von Frequenzgängen = Systemfunktionen)

Vorbemerkung:

G(s) gegeben $\Rightarrow$ welches mathematische Modell gehört dazu? Man kann zeigen, daß es zu einem gegebenen G(s) unendlich viele Zustandsmodelle gibt. Eines - es ist besonders einfach strukturiert - soll nunmehr abgeleitet werden:

$$\frac{V(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

$$\left(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0\right) \cdot V(s) = \left(b_m s^m + \ldots + b_0\right) \cdot U(s)$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{v}^{(n)}(t) + a_{n-1}v^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 v(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_0 u(t)$$

für schaltungstechnische Realisierungen *unbrauchbar*,
da ggf. Eingangsgröße mehrfach differenziert.

$$\frac{V(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}; \qquad V(s) = \left(b_m s^m + \ldots + b_0\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{U(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}\right)}_{=:Z(s)}$$

$$\Rightarrow s^n Z(s) + a_{n-1}s^{n-1}Z(s) + \ldots + a_0 Z(s) = U(s)$$

$$V(s) = b_m s^m Z(s) + \ldots + b_0 Z(s)$$

$$\downarrow$$

$$z^{(n)}(t) + a_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 \dot{z}(t) + a_0 z(t) = u(t)$$

$$\mathrm{v}(t) = b_m z^{(m)}(t) + \ldots + b_1 \dot{z}(t) + b_0 z(t)$$

Diese Differentialgleichung n-ter Ordnung kann in ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung überführt werden. (Einführung von Zwischengrößen)

$$\begin{aligned}
z_1(t) &:= z(t) \\
\dot{z}_1(t) &=: z_2(t) \\
\dot{z}_2(t) &=: z_3(t) \\
\dot{z}_3(t) &=: z_4(t) \\
&\vdots \\
\dot{z}_{n-1}(t) &=: z_n(t) \\
\dot{z}_n(t) &= -a_0 z_1(t) - a_1 z_2(t) - \ldots - a_{n-1} z_n(t) + u(t)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{v}(t) = b_0 z_1(t) + b_1 z_2(t) + \ldots + b_m z_{m+1}(t)$$

Darstellung in Matrizenschreibweise:

Steuerbarkeitsnormalform (I. Standardform)

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \dot{z}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t)$$

$$\mathrm{v}(t) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_{m+1}(t) \\ z_{m+2}(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} + d \cdot u(t)$$

$d \neq 0$, falls Zählergrad = Nennergrad und d vorher abdividiert wurde

Ein weiteres Modell, das G(s) realisiert, lautet (ohne Herleitung):

Beobachtbarkeitsnormalform (II. Standardform)

Diese entsteht formal durch Transposition der Steuerbarkeitsnormalform

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u(t)$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + d \cdot u(t)$$

$d \neq 0$, falls
Zählergrad = Nennergrad
und d vorher abdividiert wurde

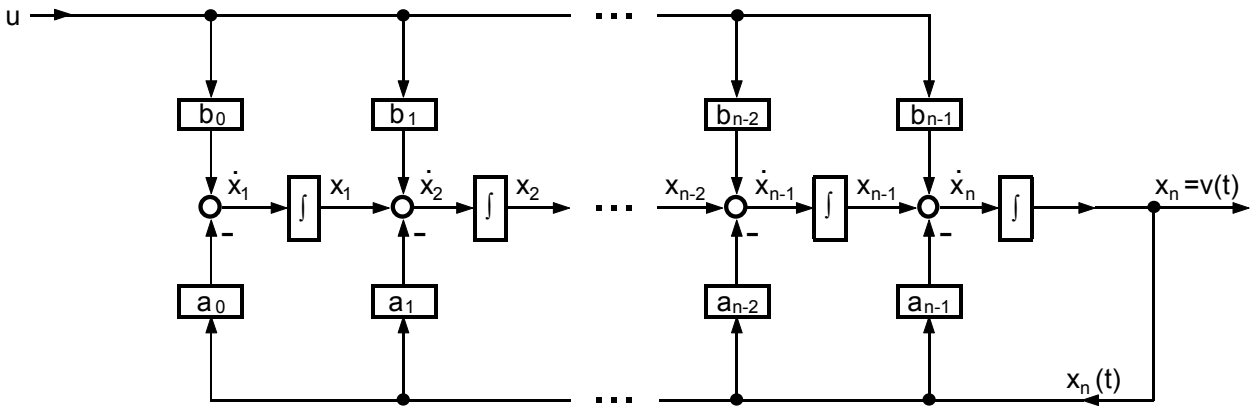


Bild 3.10: *Strukturbild zur Beobachtbarkeitsnormalform:*

Dieses Strukturbild kann sehr leicht schaltungstechnisch umgesetzt werden:

- Integrierer werden mittels Operationsverstärker realisiert.
  Die zwangsläufige Invertierung wird ebenfalls durch Operationsverstärker kompensiert.
- $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ werden durch Widerstandsverhältnisse realisiert.

vgl. hierzu:
U. Tietze, Ch. Schenk; Halbleiterschaltungstechnik; 10. Auflage; Abb 14.42, Seite 444
Dort: „Universalfilter zweiter Ordnung mit unabhängig einstellbaren Koeffizienten“

Beispiel 1:

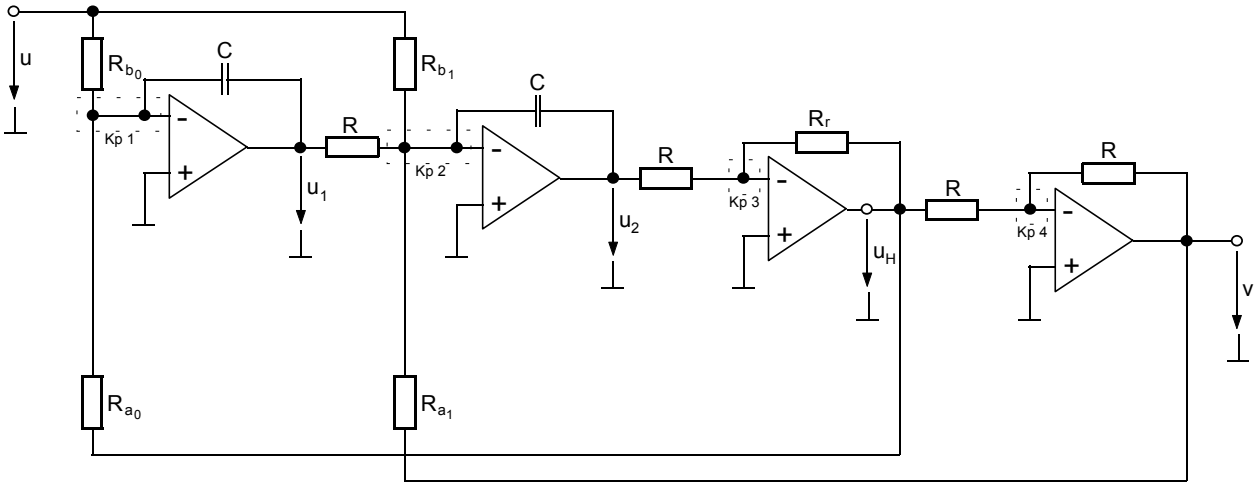


Bild 3.11: *Realsierung eines Strukturbildes in Beobachtbarkeitsnormalform durch OP's, Widerstände und Kondensatoren.*

Berechnung hierzu:

Knotenpunkt 1:

$$i_{R_{b_0}} + i_{R_{a_0}} + i_{C_0} = 0$$

$$\frac{u}{R_{b_0}} + \frac{u_H}{R_{a_0}} + C \cdot \frac{du_1}{dt} = 0$$

$$u_1(t) = -\frac{1}{C} \cdot \int_0^t \left(\frac{u(\tau)}{R_{b_0}} + \frac{u_H(\tau)}{R_{a_0}} \right) \cdot d\tau$$

$$U_1(s) = -\frac{1}{sC} \cdot \left(\frac{U(s)}{R_{b_0}} + \frac{U_H(s)}{R_{a_0}} \right)$$

Knotenpunkt 2:

$$i_R + i_{R_{b_1}} + i_{R_{a_1}} + i_{C_1} = 0$$

$$\frac{u_1}{R} + \frac{u}{R_{b_1}} + \frac{v}{R_{a_1}} + C \cdot \frac{du_2}{dt} = 0$$

$$u_2(t) = -\frac{1}{C} \cdot \int_0^t \left(\frac{u_1(\tau)}{R} + \frac{u(\tau)}{R_{b_1}} + \frac{v(\tau)}{R_{a_1}} \right) \cdot d\tau$$

$$U_2(s) = -\frac{1}{sC} \cdot \left(\frac{U_1(s)}{R} + \frac{U(s)}{R_{b_1}} + \frac{V(s)}{R_{a_1}} \right)$$

Knotenpunkt 3:

$$U_H(s) = -\frac{R_r}{R} \cdot U_2(s)$$

Knotenpunkt 4:

$$V(s) = -U_H(s) = \frac{R_r}{R} \cdot U_2(s)$$

$$\Rightarrow \quad V(s) = -\frac{R_r}{R} \cdot \frac{1}{sC} \cdot \left(\frac{U_1(s)}{R} + \frac{U(s)}{R_{b_1}} + \frac{V(s)}{R_{a_1}} \right)$$

$$\left(1+\frac{R_r}{R_{a_1}}\cdot\frac{1}{sRC}\right)\cdot V(s)=-\frac{R_r}{R_{b_1}}\cdot\frac{1}{sRC}\cdot U(s)-\frac{R_r}{R}\cdot\frac{1}{sRC}\cdot U_1(s)=-\frac{R_r}{R_{b_1}}\cdot\frac{1}{sRC}\cdot U(s)+\frac{R_r}{R}\cdot\frac{1}{sRC}\cdot\frac{1}{sC}\cdot\left(\frac{U(s)}{R_{b_0}}-\frac{V(s)}{R_{a_0}}\right)$$

$$\left(1+\frac{R_r}{R_{a_1}}\cdot\frac{1}{sRC}+\frac{R_r}{R_{a_0}}\cdot\left(\frac{1}{sRC}\right)^2\right)\cdot V(s)=\left(-\frac{R_r}{R_{b_1}}\cdot\frac{1}{sRC}+\frac{R_r}{R_{b_0}}\cdot\left(\frac{1}{sRC}\right)^2\right)\cdot U(s)$$

$$\frac{V(s)}{U(s)}=\frac{-\frac{R_r}{R_{b_1}}\cdot\left(\frac{1}{sRC}\right)+\frac{R_r}{R_{b_0}}\cdot\left(\frac{1}{sRC}\right)^2}{1+\frac{R_r}{R_{a_1}}\cdot\left(\frac{1}{sRC}\right)+\frac{R_r}{R_{a_0}}\cdot\left(\frac{1}{sRC}\right)^2}\overset{\cdot\frac{s^2}{s^2}}{=}\frac{-\frac{R_r}{R_{b_1}}\cdot\left(\frac{1}{RC}\right)\cdot s+\frac{R_r}{R_{b_0}}\cdot\left(\frac{1}{RC}\right)^2}{s^2+\frac{R_r}{R_{a_1}}\cdot\left(\frac{1}{RC}\right)\cdot s+\frac{R_r}{R_{a_0}}\cdot\left(\frac{1}{RC}\right)^2}$$

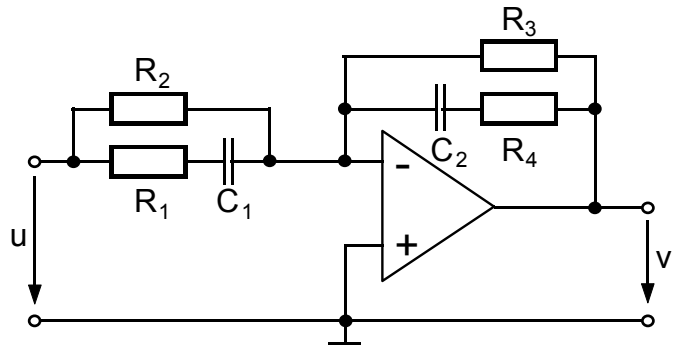
Typ: $G(s)=\dfrac{b_1 s+b_0}{s^2+a_1 s+a_0}$

$R_r, R, C \quad fest$

$R_{b_1}\to b_1 \qquad R_{b_0}\to b_0 \qquad R_{a_1}\to a_1 \qquad R_{a_0}\to a_0$

Beispiel 2: Alternative zu Beispiel 1

Auch die nachfolgende Schaltung realisiert eine Übertragungsfunktion mit Zählergrad = 2 und Nennergrad = 2.



$$\underline{Z}_v = R_2 \| R_1, C_1 \qquad \underline{Z}_r = R_3 \| R_4, C_2$$

Für invertierend geschaltete (ideale) Operationsverstärker gilt immer:

Frequenzgang: $G(j\omega) = -\dfrac{\underline{Z}_r}{\underline{Z}v}$

$$\underline{Z}_v = \frac{R_2\left(R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\right)}{R_2 + \left(R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\right)} = \frac{R_2\left(1 + j\omega C_1 R_1\right)}{1 + j\omega C_1\left(R_1 + R_2\right)}$$

$$\underline{Z}_r = \frac{R_3\left(1 + j\omega C_2 R_4\right)}{1 + j\omega C_2\left(R_3 + R_4\right)}$$

$$G(j\omega) = -\frac{R_3\left(1 + j\omega R_4 C_2\right)\left(1 + j\omega C_1\left(R_1 + R_2\right)\right)}{\left(1 + j\omega C_2\left(R_3 + R_4\right)\right)R_2\left(1 + j\omega R_1 C_1\right)}$$

$$G(s) = -\frac{R_3\left(1 + sR_4 C_2\right)\left(1 + sC_1\left(R_1 + R_2\right)\right)}{\left(1 + sC_2\left(R_3 + R_4\right)\right)R_2\left(1 + sR_1 C_1\right)}$$

$$G(s) = -\frac{R_3\left[s^2\left(C_1 C_2 R_4\left(R_1 + R_2\right)\right) + s\left(R_4 C_2 + \left(R_1 + R_2\right)C_1\right) + 1\right]}{R_2\left[s^2\left(C_1 C_2 R_1\left(R_3 + R_4\right)\right) + s\left(R_1 C_1 + \left(R_3 + R_4\right)C_2\right) + 1\right]}$$

Vergleich mit Schaltung aus Beispiel 1:

- ändert man in der Alternative einen Widerstand, dann ändert sich, im Gegensatz zum Beispiel 1, die komplette Übertragungsfunktion G(s) und damit das P/N-Diagramm
- bei der "aufwendigeren" Schaltung aus Beispiel 1 erhält man bei Änderung eines Widerstandes ggf. nur die gezielte Änderung *eines* Koeffizienten der Übertragungsfunktion

Schlußbemerkungen:

Das Strukturbild zur Beobachtbarkeitsnormalform werde etwas anders dargestellt:

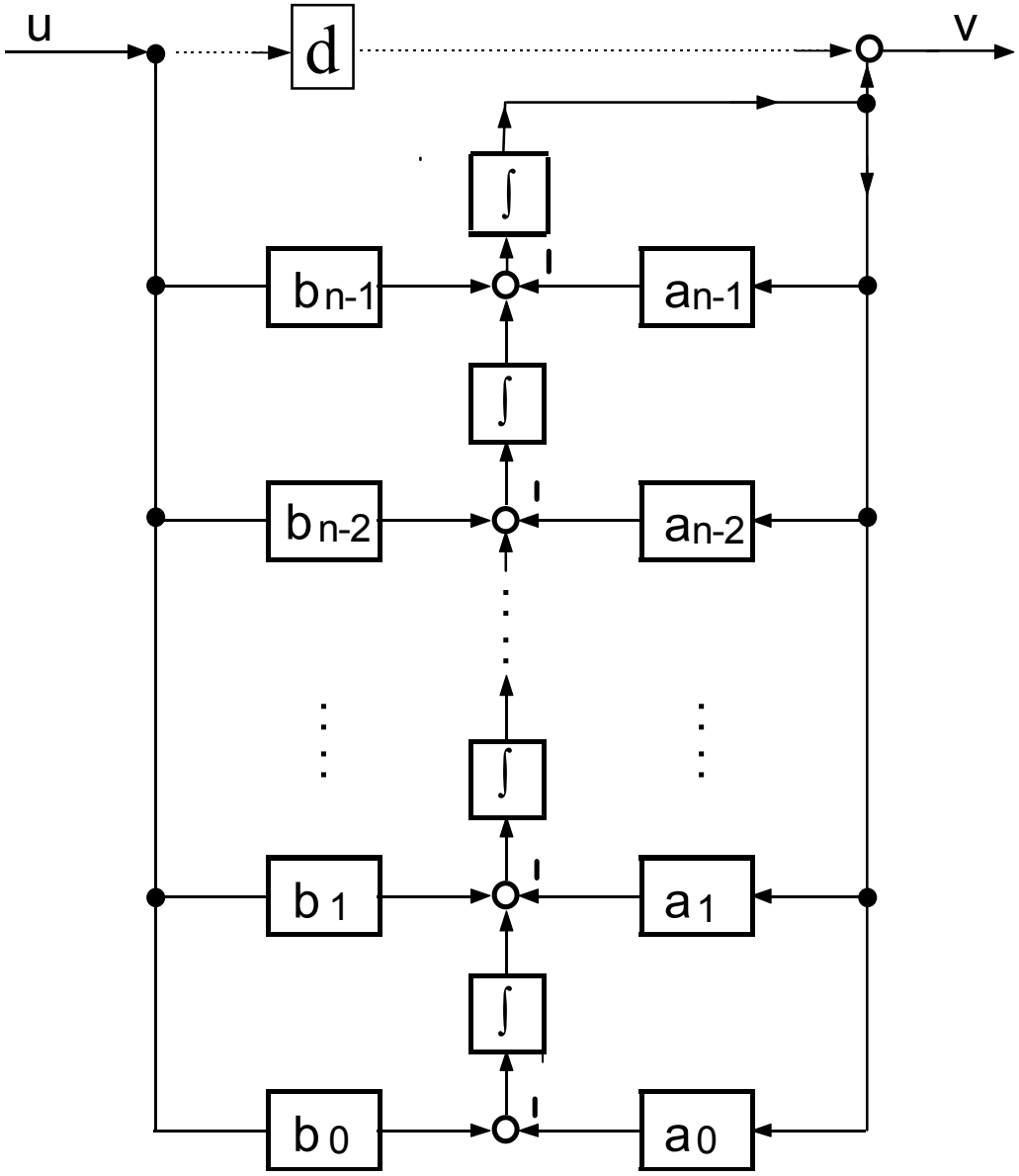


Bild 3.12: *Strukturbild zur Beobachtbarkeitsnormalform*

Diese umgezeichneten Darstellung der Beobachtbarkeitsnormalform z.B. erinnert an eine Darstellung die auch aus Filterhandbüchern unter dem Namen **„1. kanonische Direktform“** bekannt ist. Man betrachte hierzu Bild 3.13.

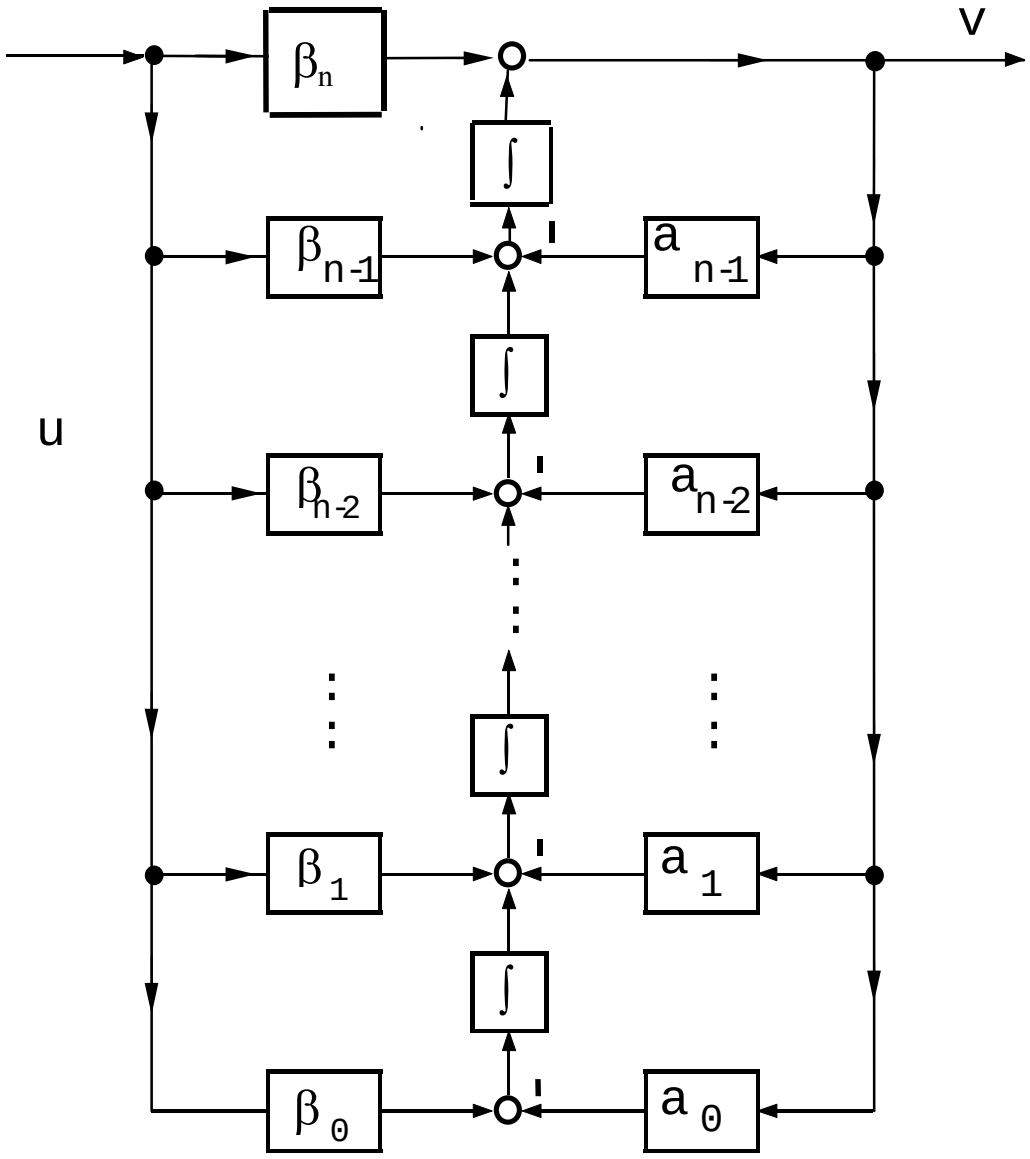


Bild 3.13: *„**1. kanonische Direktform“** einer Filter-Systemfunktion*

Für den Fall, daß **bn = 0** gilt sind die beiden Blockstrukturen natürlich äquivalent.

Im Fall, daß **bn ≠0** ist, kann man ein Zustandsmodell in I. oder II. Standardform nur gewinnen wenn man vorher den Zähler durch den Nenner dividiert. Dann kommt man immer auf Blockstrukturen wie in Bild 3.12 (mit **d ≠ 0**) . Dividiert man aber vorher nicht ab, so überzeugt man sich (durch Nachrechnen), daß die **1. kanonische Direktform** ebenfalls die vorgelegte Übertragungsfunktion realisiert.

In gleicher Weise kann man die Steuerbarkeitsnormalform (I. Standardform) als Strukturbild darstellen. Geschickt umgezeichnet erkennt man dann (wenn gilt: bn = 0) sofort auch die in Filterhandbüchern sogenannte **„2.kanonische Direktform“**.

3.8.5 Vorgabe von Dominanzgebieten

Bisher hatten wir uns mit der Vorgabe einer Polverteilung für Regelsysteme begnügt, bei denen die Führungsübertragungsfunktion stets ein dominierendes Polpaar aufwies. Für dieses sollte gelten „Realteil" = „Imaginärteil". Dazu gehört eine Sprungantwort mit einem Überschwingfaktor von ca. 4%.

Diese Vorgehensweise soll etwas erweitert werden. Im Vorgriff auf das 6. Kapitel betrachten wir ein schwingungsfähigen PT2-Glied. Damit ist ein Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\omega_n^{\,2}}{s^2 + 2 \cdot D \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^{\,2}}; \quad 0 \le |D| < 1 \qquad (*)$$

gemeint.

Bezeichnung : „D" - Dämpfungsfaktor, „ω_n"- Kreisfrequenz des ungedämpften Systems.

Die Pole von obigem G(s) liegen (vgl. Skizze) bei $s_{\infty 1,2} = -D \cdot \omega_n \pm j \cdot \omega_n \sqrt{1 - D^2}$

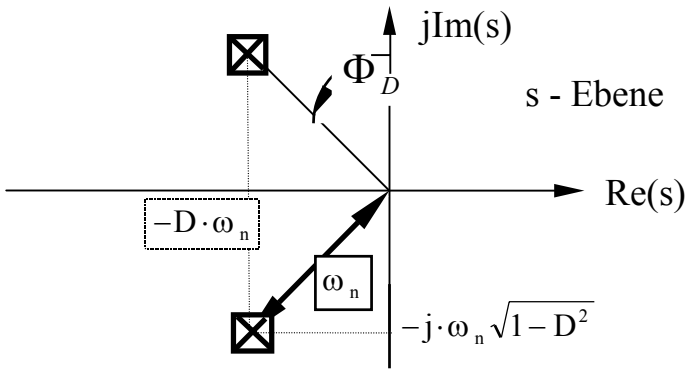
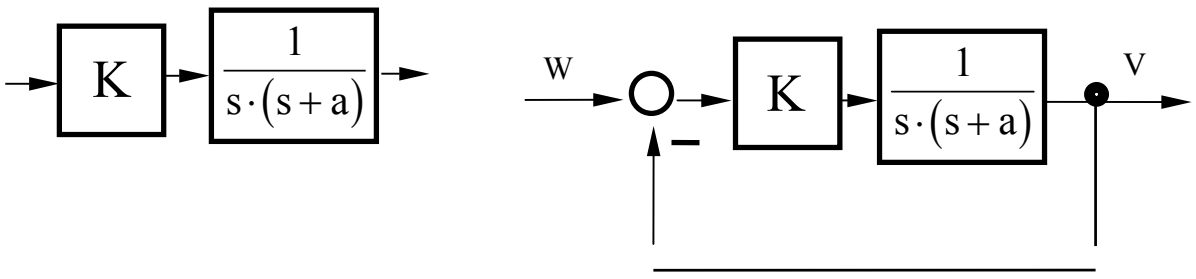


Bild 3.25: *Skizze zur Polstellenverteilung eines schwingungsfähigen PT2-Gliedes.*

Man liest sofort ab: $\sin(\Phi_D) = D$. Man nennt „Φ_D" - den Dämpfungswinkel.

ω_n ist - geometrisch interpretiert- der radiale Abstand eines Poles vom Ursprung.

Auch offene Regelschleifen (obwohl selber keine schwingungsfähigen PT2-Glieder) verhalten sich manchmal nach Rückkopplung, als Regelsystem, wie schwingungsfähige PT2-Glieder. Betrachten wir die nachfolgenden Anordnungen:



offenen Schleife ... ... nach Rückkopplung

Nach Rückkopplung haben wir: $G_W(s) = \dfrac{K}{s^2 + as + K} = \dfrac{K}{s^2 + 2 \cdot \left(\dfrac{a}{2 \cdot \sqrt{K}}\right) \cdot \sqrt{K} \cdot s + K}$

und mit den Abkürzungen $\sqrt{K} \to \omega_n$; $\left(\dfrac{a}{2\sqrt{K}}\right) \to D$ erhält man die obige Form $(*)$ der Führungsübertragungsfunktion.

Die zugehörige Sprungantwort lautet sodann:

$$h(t) = \left[1 - \frac{e^{-D \cdot \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \cos\left(\omega_n \sqrt{1 - D^2} \cdot t - \arcsin(D)\right)\right] \cdot \sigma(t) \qquad (3.3)$$

Man nennt

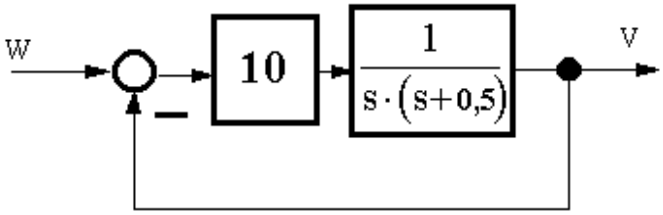
$\dfrac{1}{D \cdot \omega_n} =: \tau_{ab}$ die Abklingzeitkonstante und

$\dfrac{h_p - h(\infty)}{h(\infty)} =: ü$; ($h_p$ – Spitzenwert bzw. "Peakwert") - den Überschwingfaktor

Die Kenngrößen „ü“ und „τ_{ab}“ lassen sich sowohl im Zeitverlauf der Sprungantwort als auch im PN-Plan von $G_w(s)$ identifizieren und werden dadurch zu sinnvollen Kenngrößen bei der Reglersynthese nach dem WOK-Verfahren.

Wir werden später zeigen (Kap.6), daß gilt: $D = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\pi}{\ln(ü)}\right)^2}}$ (3.4)

Betrachten wir nun ein Beispiel 1:



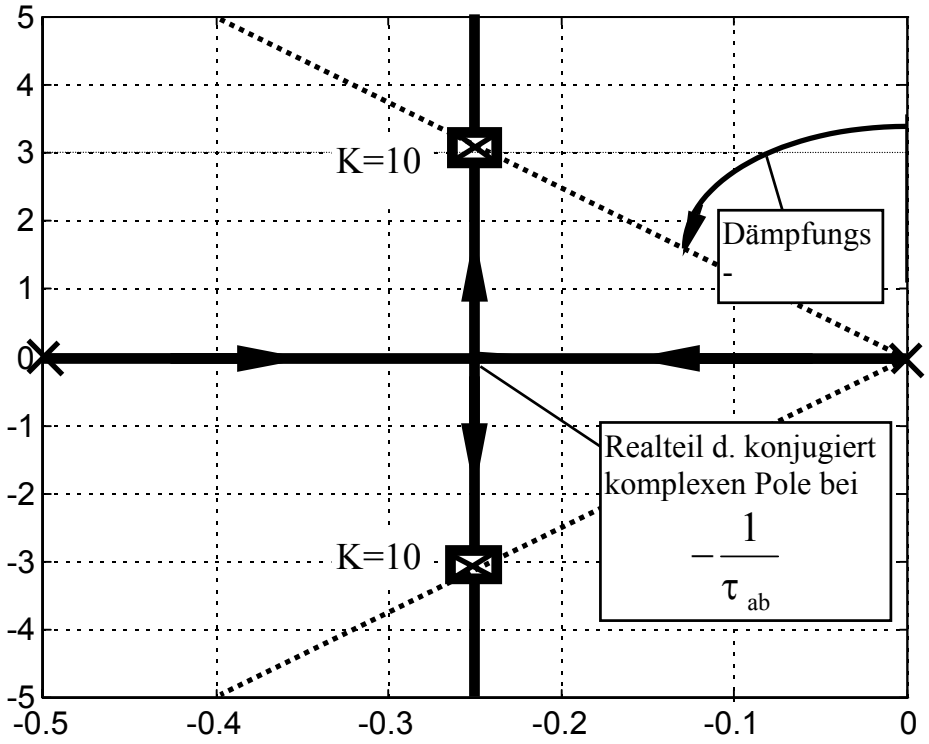
Die Führungsübertragungsfunktion
lautet in diesem Fall:

$$G_w(s) = \frac{10}{s^2 + 0{,}5 \cdot s + 10} = \frac{\left(\sqrt{10}\right)^2}{s^2 + 2. \cdot \left(\frac{0{,}5}{2\sqrt{10}}\right) \cdot \sqrt{10} \cdot s + \left(\sqrt{10}\right)^2} \quad ; \qquad \rightarrow \omega_n = \sqrt{10}$$

$$\rightarrow \mathrm{D} = \frac{0{,}5}{2\sqrt{10}} = 0{,}079 \; ;$$

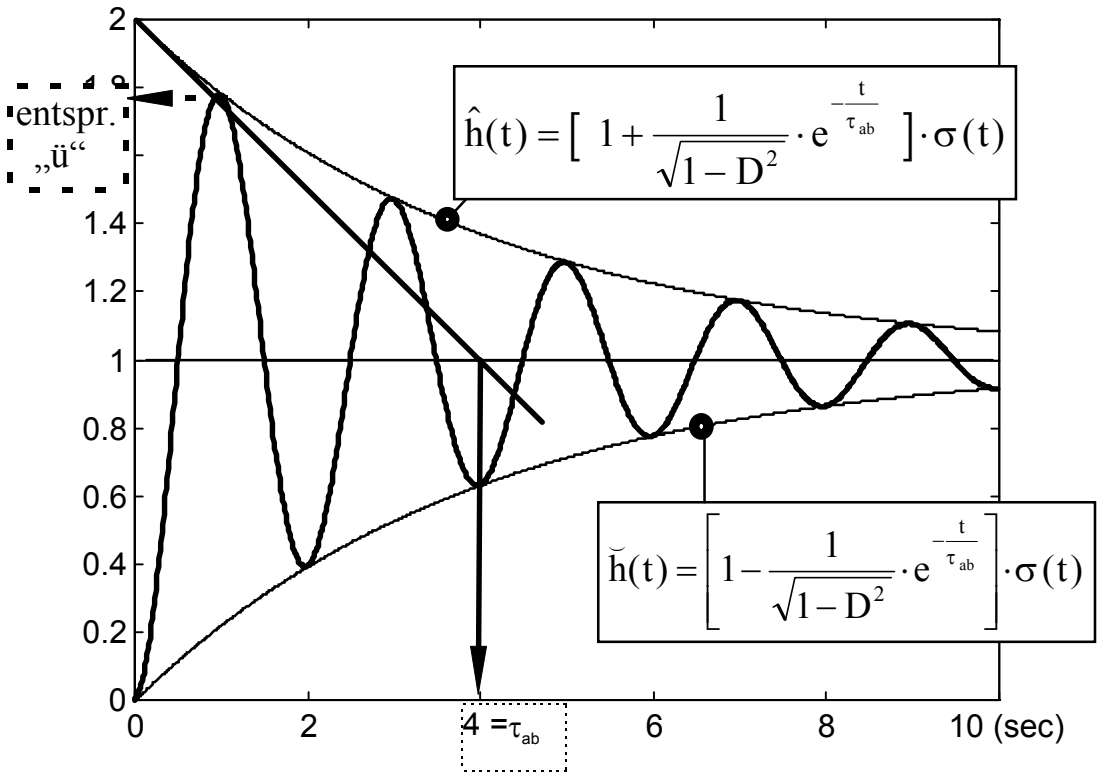
$$\rightarrow \tau_{ab} = \frac{1}{\mathrm{D} \cdot \omega_n} = 4.(\mathrm{sec})$$

Darstellung der WOK:



Während man den Realteil der konjugiert komplexen Pole von Gw sofort mit $-\frac{1}{\tau_{ab}}$ identifiziert, rechnet man nach, daß wie behauptet gilt: sin Φ = D.

Darstellung der Sprungantwort zu Gw(s):



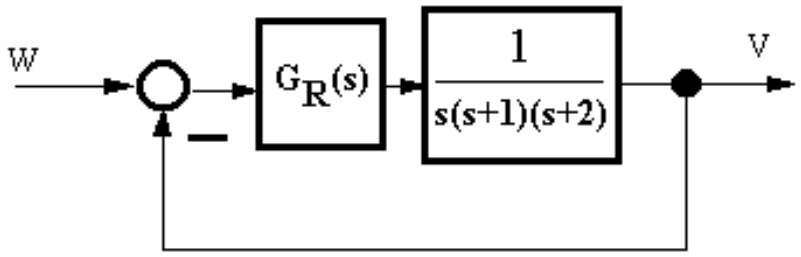
Die Abklingzeitkonstante (bzw. der Realteil) des konjugiert komplexen Polpaares ist also ein Maß dafür, wie schnell sich die Einhüllende der Sprungantwort gegen den Endwert „einschnürt“.

Aus dem Winkel Φ eines Strahles vom Koordinatenursprung gegen das Polpaar haben wir D und daraus die Überschwingweite abgeleitet. Φ_D ist also ein Maß dafür, wie stark die Sprungantwort überschwingt.

Beide Kenngrößen kann man sowohl im Zeitbereich (für h(t)) als auch in der WOK feststellen.

Das nachfolgende Rechenbeispiel soll uns zeigen, daß wir nun schon ganz professionell einen Regler systhetisieren können.

Beispiel 2: Vorgelegt ist eine Regelstrecke entsprechend nachstehender Skizze.



Geben Sie den Regler so an, daß für die Führungssprungantwort des Regelsystems gilt:

- ü = 0,20
- τ_{ab} = 1,8 sec

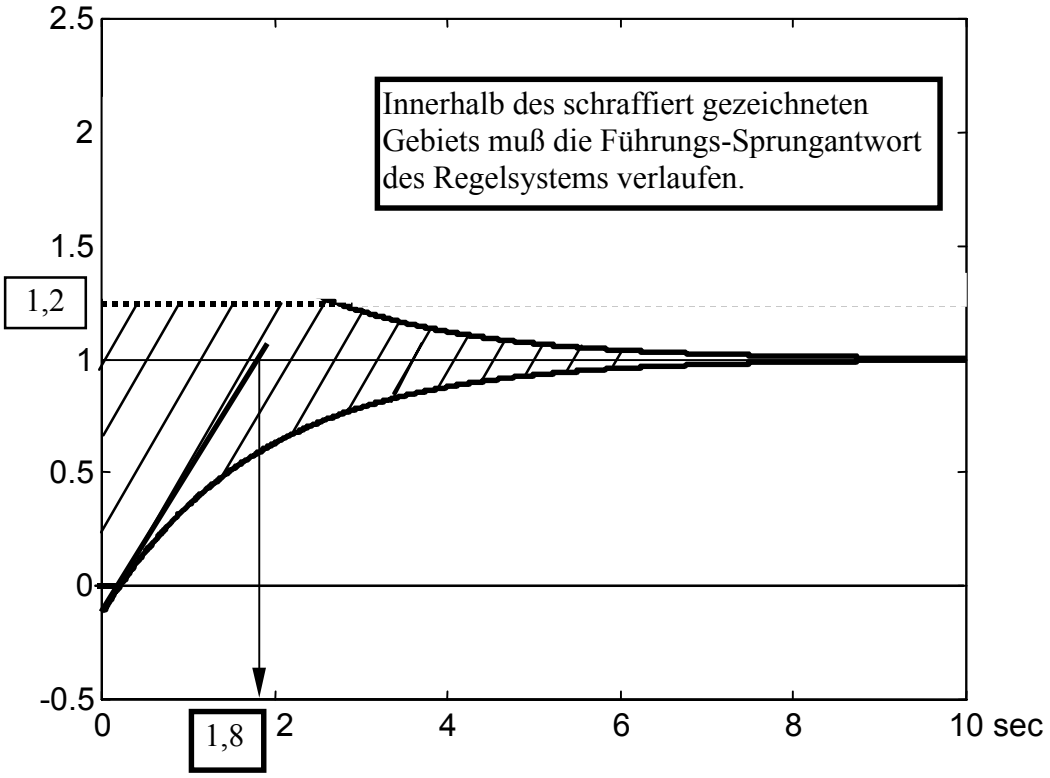
Lösung: Die beiden Vorgaben im Zeitbereich an h(t) der Führungsübertragungsfunktion

τ_{ab} = 1,8 sec und ü = 0,2 definieren zusammen mit D (aus ü abgeleitet

nach der Formel (3.4) $D = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{\ln(ü)}\right)^2}} = 0.456$)

für h(t) ein Gebiet innerhalb dessen die Sprungantwort des Regelsystems verlaufen muß.

Es sieht folgendermaßen aus:

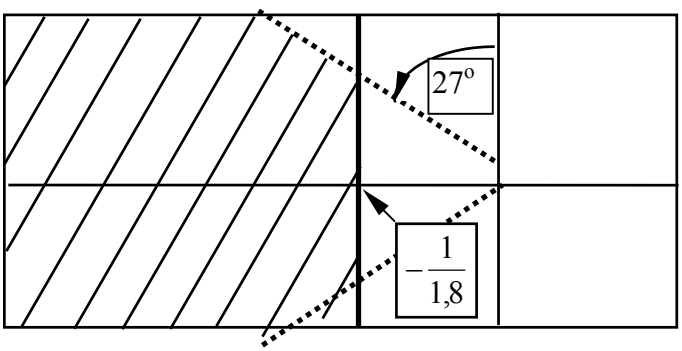


Diese beiden Vorgaben ü und τ_{ab} lassen sich auch in den Bildbereich der Laplacetransformation übertragen und bilden so die Vorgaben für einen Regelerentwurf mit Hilfe von WOK's.

τ_{ab} = 1,8 sec und $D = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{\ln(\ddot{u})}\right)^2}} = 0.456 \rightarrow \Phi_D = \arcsin(0{,}456) = 27^o$

definieren uns im PN-Plan ein Dominanzgebiet

(vgl.Skizze):



Innerhalb des schraffiert gezeichneten Gebietes der s-Ebene muß ein dominierendes Polpaar von $G_w(s)$ liegen.
Hier sollte man verschiedene WOK's durchprobieren. Klar ist, daß ein P-Regler nicht in Frage kommt. Wir brauchen Nullstellen, um die WOK nach „links" zu ziehen. Schauen wir uns das MATLAB-Programmlisting und die davon gezeichneten WOK's an.

```
% Wurzelortskurvenberechnung für das Beispiel 2
% von Kapitel 3.8.5 "Vorgabe von Dominanzgebieten"
% Path  C:\kap3\K3_51-60\ BSP2.M


% Regelstrecke:

Zs=[1];
Ns=[1 3 2 0];

% Regler:

% Regler 1:
Zr1 = [1 0.5];
Nr1 = [1 6];

% Regler 2:
Zr2 = [1 0.13];
Nr2 = [1 0.026];

% Offene Schleife:
Zo1 = conv(Zs,Zr1);
Zo  = conv(Zo1,Zr2);

No1 = conv(Ns,Nr1);
No  = conv(No1,Nr2);

% WOK - zeichnen:

% Zuerst im Großen...
```

3.8.6 Schlußbemerkungen

Häufig wird von einem Regelsystem nicht eine bestimmte Abklingzeitkonstante gefordert (so wichtig diese ja für die Hantierung mit WOK's wäre), sondern man verlangt, daß eine bestimmte Anstiegszeit tr (rise-time) nicht überschritten wird.

Bild 3.25 zeigt noch einmal die Übergangsfunktion eines schwingungsfähigen Systems. Eingezeichnet ist die Anstiegszeit t_r. Bei der Anstiegszeit handelt es sich um den (aus der VL „Meßtechnik" bereits bekannten) Wert

$$t_r = t_{90\%} - t_{10\%} \qquad \textbf{(3.5)}$$

Weiterhin gilt bekanntlich (VL-Meßtechnik)

$$B \cdot t_r \approx 0{,}35 \quad bzw. \quad \omega_B \cdot t_r \approx 2{,}2 \qquad \textbf{(3.6)}$$

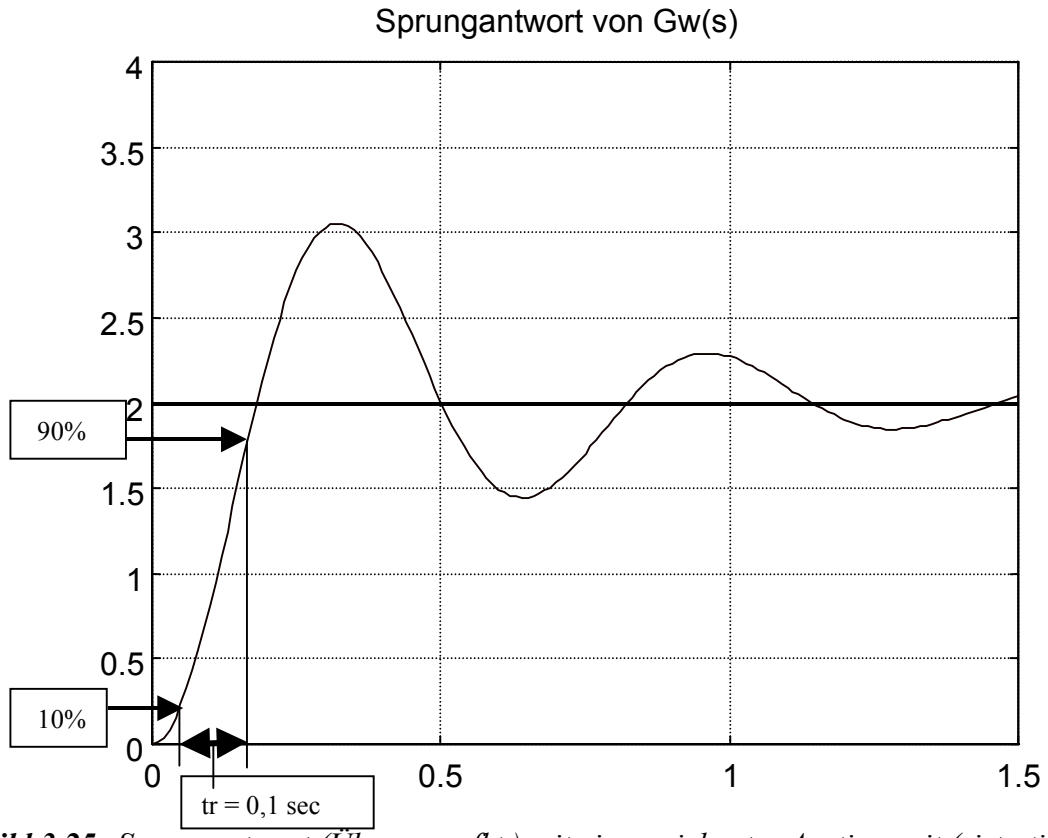


Bild 3.25: *Sprungantwort (Übergangsfkt.) mit eingezeichneter Anstiegszeit (riste-time)*

Bei einem Reglerentwurf mit Hilfe des WOK-Verfahrens erweist es sich als günstig, wenn folgende Anforderungen gestellt werden:

Stationärer Regelfehler	$e_{i\infty}$
Überschwingfaktor	ü
Abklingzeitkonstante	τ_{ab}

(3.7)

Es gibt weitere Reglerentwürfe (z.B. mit Hilfe des noch zu besprechenden Frequenzkennlinienverfahrens), da lauten die Anforderungen hingegen:

Stationärer Regelfehler	$e_{i\infty}$
Überschwingfaktor	ü
Anstiegszeit (rise-time)	tr

(3.8)

Der „Kunde“ fragt ja nicht, welches Verfahren der Ingenieur anwendet. Sowohl die Spezifikationen (3.7) als auch (3.8) können gestellt werden. Wie rechnet sich also τ_{ab} in t_r um und umgekehrt ?

Für den Fall, daß das (rückgekoppelte) Regelsystem durch

$$G_W(s) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2D \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

beschrieben wird, kann dieser Zusammenhang mit brauchbarer Näherung und vertretbarem Aufwand hergestellt werden.

Für die Bestimmung des Zusammenhangs $\tau_{ab} \Leftrightarrow t_r$ beginnen wir mit dem Zusammenhang zwischen ω_n und ω_b – der Bandbreitenkreisfrequenz von G_w: Aus $\left|\frac{G_W(j\omega_b)}{G_W(j0)}\right|^2 = \frac{1}{2}$ **(3.9)**

folgt durch formales Nachrechnen: $\left|\frac{\omega_B}{\omega_n}\right|^2 = 1 - 2D^2 + \sqrt{(1-2D^2)^2 + 1}$ **(3.10)**

Nunmehr kann man wie folgt vorgehen:

- Entweder aus „ü“ $\Rightarrow$ D - berechnen
  aus „tr“ $\Rightarrow$ ω_b -berechnen
  } mit (3.10) ω_n berechnen.
- Oder aus „ü“ $\Rightarrow$ D - berechnen
  aus „τab“ und D $\Rightarrow$ ωn – berechnen
  } mit (3.10) ω_B und dann t_r berechnen

Die soeben beschriebene Vorgehensweise kann auch dann noch angewendet werden, wenn das (rückgekoppelte) Regelsystem zwar „komplizierter“ als ein schwingungsfähiges PT2-Glied ist ($G_W(s)$ “komplizierter“ als $G_W(s) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2D \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$) sich aber näherungsweise wie ein solches PT2-Glied verhält.

Zu diesen Vorgehenweisen zwei kurze Rechenbeispiele:

a) Gefordert sind: Stationärer Regelfehler $e_{1\infty} \leq 0{,}02$
Überschwingfaktor ü = 0,08
Abklingzeitkonstante $\tau_{ab} = 0{,}1$ sec
Gesucht ist t_r.

Lösung: Mittels Formel (3.4) berechnet sich aus ü = 0,08 ein D = 0,626. Wegen

$D\omega_n = 1/\tau_{ab}$ ergibt sich ein ω_n = 15,97. Aus ω_n berechnet sich mittels Formel (3.10)

ein ω_B = 17,78. Aus der Fausformel $\omega_B \cdot t_r \approx 2{,}2$ folgt schließlich $t_r \approx 0{,}123$ sec.

b) Gefordert sind: Stationärer Regelfehler $e_{1\infty} \leq 0{,}02$
Überschwingfaktor ü = 0,08
Abklingzeitkonstante $t_r = 0{,}01$ sec
Gesucht ist t_r.

Lösung: Mittels Formel (3.4) berechnet sich aus ü = 0,08 ein D = 0,626. Wegen

ω_B tr ≈ 2,2 ergibt sich ein ω_B = 220 . Aus ω_B und D berechnet sich mittels Formel (3.10)

ein ω_n = 197,6 Hz. Aus der Fausformel $\omega_n \cdot D = \frac{1}{\tau_{ab}}$ folgt schließlich $\tau_{ab} = 0{,}008$ sec.

4. Zeitdiskrete Regelungen (Digitalregelungen)

„Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen“ (I.Kant)

4.1. Aufgabenstellung

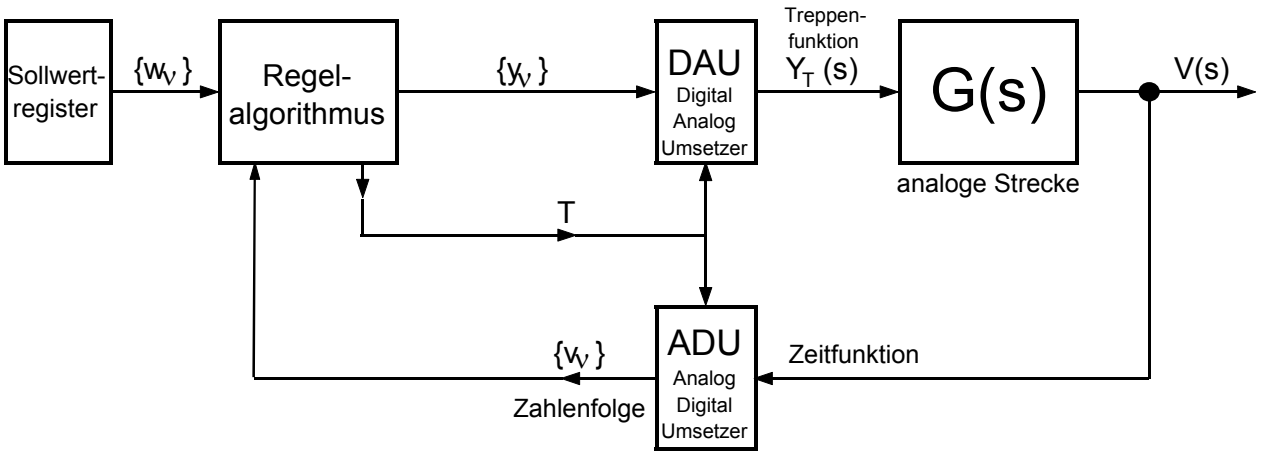


Bild 4.1: *Gundstruktur eines digitalen Regelsystems*

Während bisher bei analogen Regelsystemen - insbesondere bei analogen Regelstrecken - die Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen Zeitfunktionen waren, treten nunmehr Eingangs- und Ausgangsfolgen auf. Ausgehend von Bild 4.1 erkennt man dies, wenn man etwas vereinfacht, die einzelnen Systemgrenzen anders zieht und die Taktleitung wegläßt:

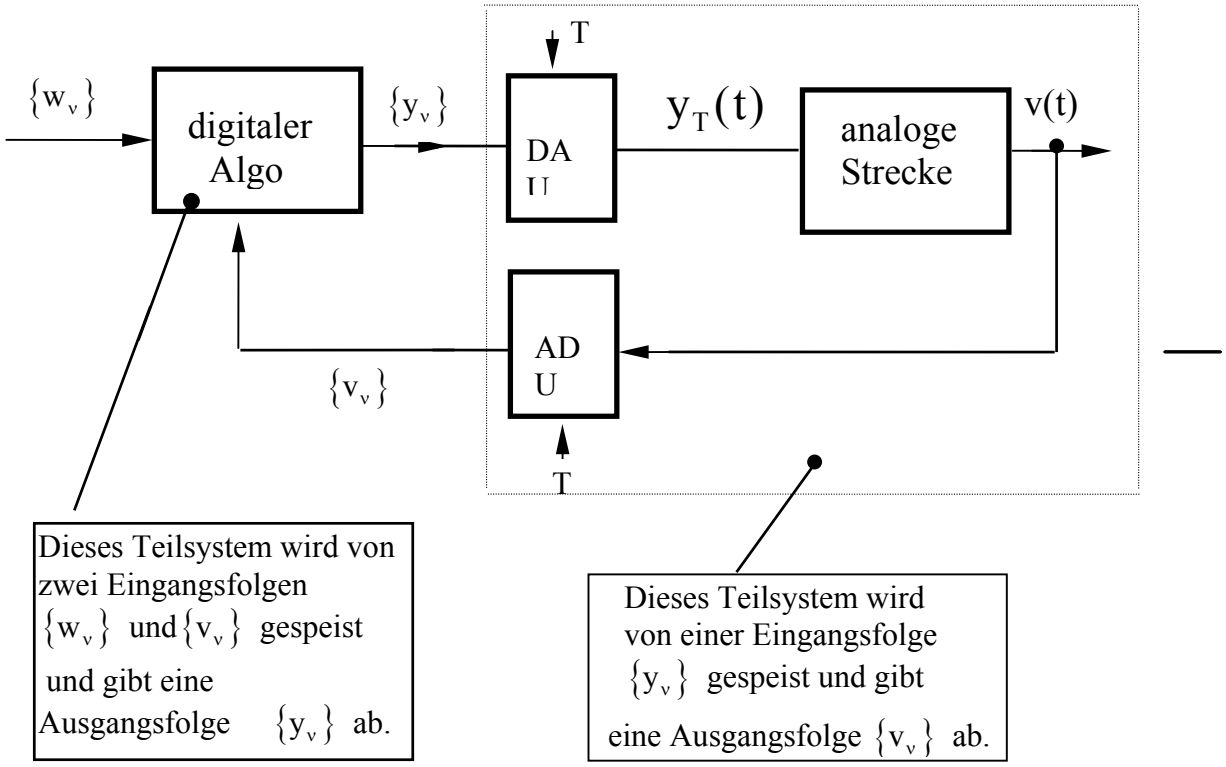
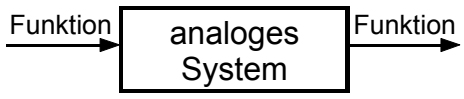


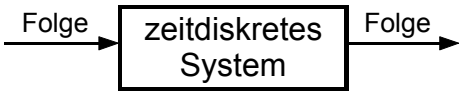
Bild 4.2: *Digitales Regelsystem mit Hervorhebung von Ein und Ausgangsfolgen.*

Hier sei noch einmal an mathematische Grundlagen erinnert:



Mathematische Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Ein- und Ausgangsfunktionen durch:

- Differentialgleichungen;
- L - Transformation;
- Faltungsintegrale



Mathematische Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Ein- und Ausgangsfolgen durch:

- Differenzengleichungen;
- z - Transformation;
- Faltungssummen

Eine ergänzende Anmerkung zu Differenzengleichungen und Differentialgleichungen :
Während man bei Differentialgleichungen die Lösungsfunktion bestimmen will, sucht man bei Differenzengleichungen nach Lösungsfolgen. Die Vorgehensweisen bei der Bestimmung der Lösungen sind einander sehr ähnlich. (z.B. Ansatzfunktionen $e^{\lambda t} \leftrightarrow$ Ansatzfolgen λ^k)
Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen, besteht kein Unterschied zwischen Folgen und Funktionen:

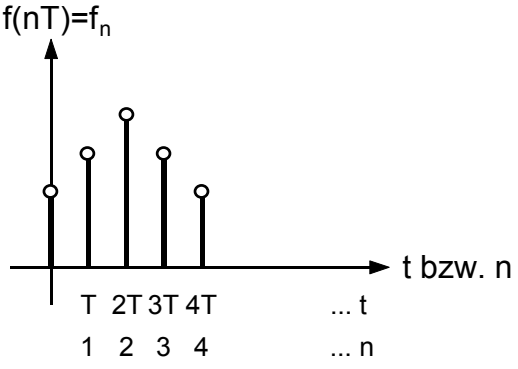
$$\text{Funktionen:} \quad \begin{cases} D \to W & (\text{z.B.: } \Re \to \Re_+) \\ x \mapsto y = f(x) & \left(\text{z.B.: } x \mapsto y = x^2\right) \end{cases}$$

$$\text{Folgen:} \quad \begin{cases} D = \aleph_0 \to W & \\ n \mapsto y_n = f(n) & \left(\text{z.B.: } n \mapsto y_n = n^2\right) \end{cases}$$

Folgen sind also Funktionen deren Definitionsbereich die natürlichen Zahlen (einschließlich der Null; Abk.: $\aleph_0$) sind.

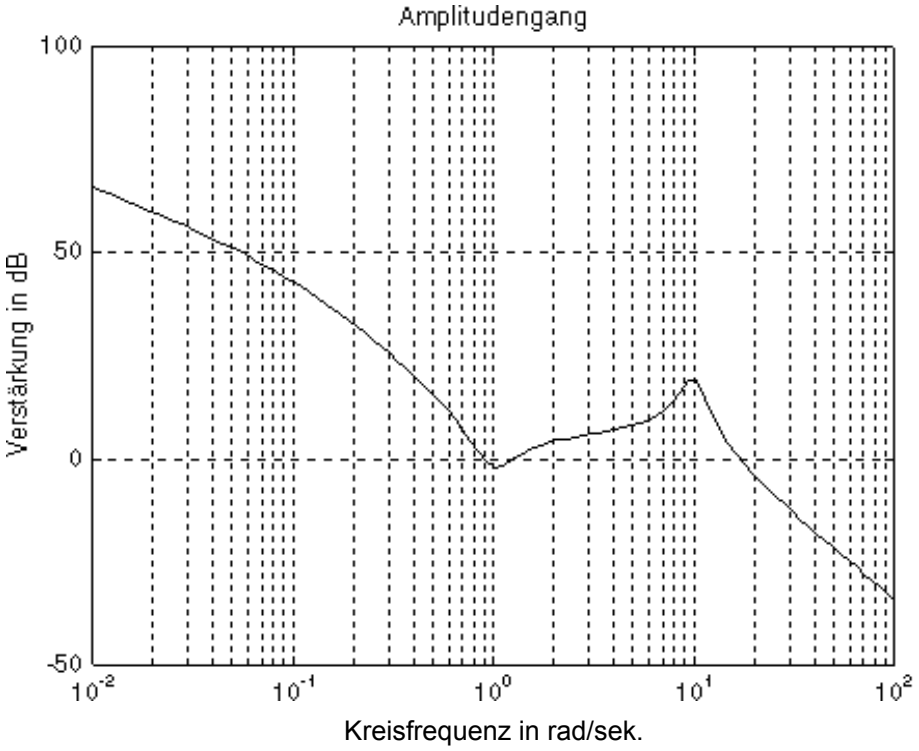
Man bezeichnet mit $\{f_n\}$ - eine Zahlenfolge und mit $f_n = f(nT)$ - einen (einzelnen) Folgenwert.

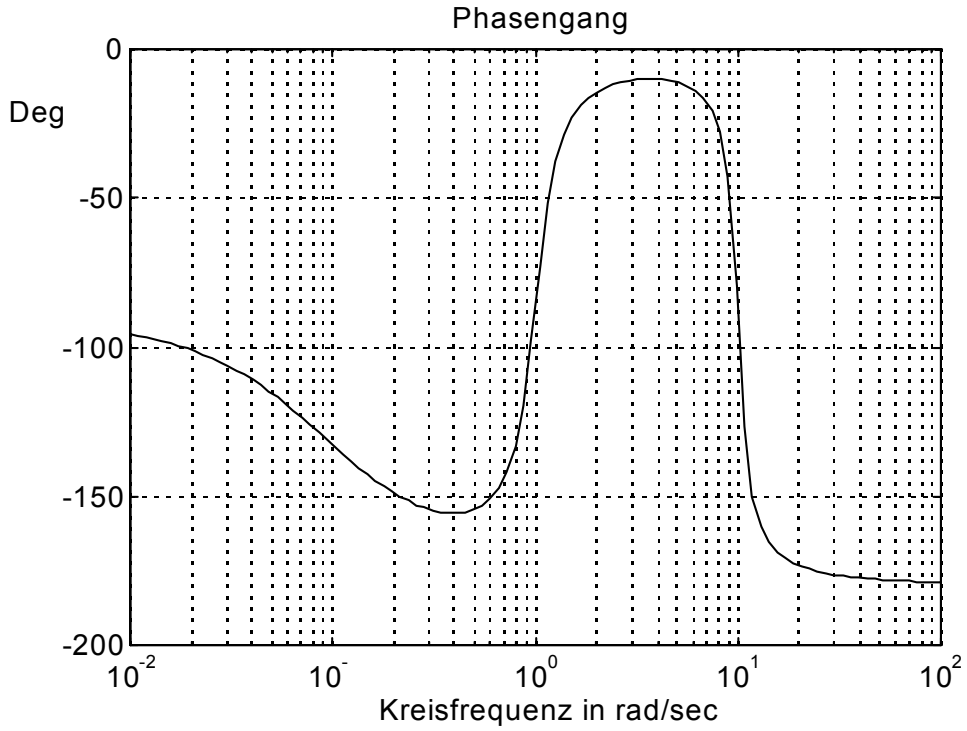
Bei zeitdiskreten Systemen ergeben sich die abhängigen Variablen häufig durch Abtastung der ursprünglich kontinuierlichen Signale. Das gibt zu der folgenden Darstellung Anlaß:



5. Frequenzgangdarstellung; BODE-Diagramm

„ Das menschliche Hirn ist eine großartige Sache. Es funktioniert vom Augenblick der Geburt an bis zu dem Moment wo du aufstehst um eine Vorlesung zu halten.“ Nach M. Twain.





5.1. Herleitung von Darstellungen im BODE-Diagramm anhand eines Beispiels

Beispiel: $$G(s)=\left.\frac{200s^2+80s+200}{s^4+2{,}1s^3+100{,}2s^2+10s}\right|_{s=j\omega}$$

Allgemeine Vorgehensweise, dargestellt am vorgelegten Beispiel:

(1) V-Normalform erstellen

G(s) hat Nullstellen bei $s_{0,1}=-0.2\pm j0.98=-\tilde{D}_1\tilde{\omega}_{n1}\pm j\tilde{\omega}_{n1}\sqrt{1-\tilde{D}_1^{\,2}}$

$s_{\infty,0}=0$

und Pole bei $s_{\infty,1}=-0.1\mathrel{\hat{=}}-\frac{1}{\tau_1}=-\omega_1$

$s_{\infty,2,3}=-1\pm j9.94=-D_1\omega_{n1}\pm j\omega_{n1}\sqrt{1-D_1^{\,2}}$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{200}{s}\cdot\frac{(s+0.2+j0.98)(s+0.2-j0.98)}{(s+0.1)(s+1+j9.94)(s+1-j9.94)}=\frac{200}{s}\cdot\frac{s^2+0.4s+1}{(s+0.1)(s^2+2s+100)}$$

$$\Rightarrow Mit\ Abkürzungen: G(s)=\frac{200}{s}\cdot\frac{s^2+2\tilde{D}_1\tilde{\omega}_{n1}s+\tilde{\omega}_{n1}^{\,2}}{(s+\omega_1)(s^2+2D_1\omega_{n1}s+\omega_{n1}^{\,2})}$$

$$\omega_{n1}=10;\tilde{\omega}_{n1}=1;\omega_1=0.1;D_1=0.1;\tilde{D}_1=0.2$$

$$G(s)=\frac{200}{s}\cdot\frac{1+2\left(\frac{0.2}{1}\right)s+\left(\frac{s}{1}\right)^2}{0.1\left(1+\frac{s}{0.1}\right)100\left(1+2\left(\frac{0.1}{10}\right)s+\left(\frac{s}{10}\right)^2\right)}=\frac{20}{s}\cdot\frac{1+2\left(\frac{0.2}{1}\right)s+\left(\frac{s}{1}\right)^2}{\left(1+\frac{s}{0.1}\right)\left(1+2\left(\frac{0.1}{10}\right)s+\left(\frac{s}{10}\right)^2\right)}$$

$$Typ: \frac{V}{s^\rho}\cdot\frac{\left(1+\frac{s}{\tilde{\omega}_1}\right)\bullet\bullet\bullet\left(1+2\left(\frac{\tilde{D}_1}{\tilde{\omega}_{n1}}\right)s+\left(\frac{s}{\tilde{\omega}_{n1}}\right)^2\right)\bullet\bullet\bullet}{\left(1+\frac{s}{\omega_1}\right)\bullet\bullet\bullet\left(1+2\left(\frac{D_1}{\omega_{n1}}\right)s+\left(\frac{s}{\omega_{n1}}\right)^2\right)\bullet\bullet\bullet}\qquad \left(Beachte: Stets\ gilt\ |D_i|<1\ und\ |\tilde{D}_i|<1\right)$$

"V - Normalform"

(2) Bode-Papier einteilen

$\omega_1, \omega_{n1}, \tilde{\omega}_{n1}$ müssen dargestellt werden.

Man verwendet häufig Bode-Papier mit 4 Dekaden (vgl. Anhang A1).

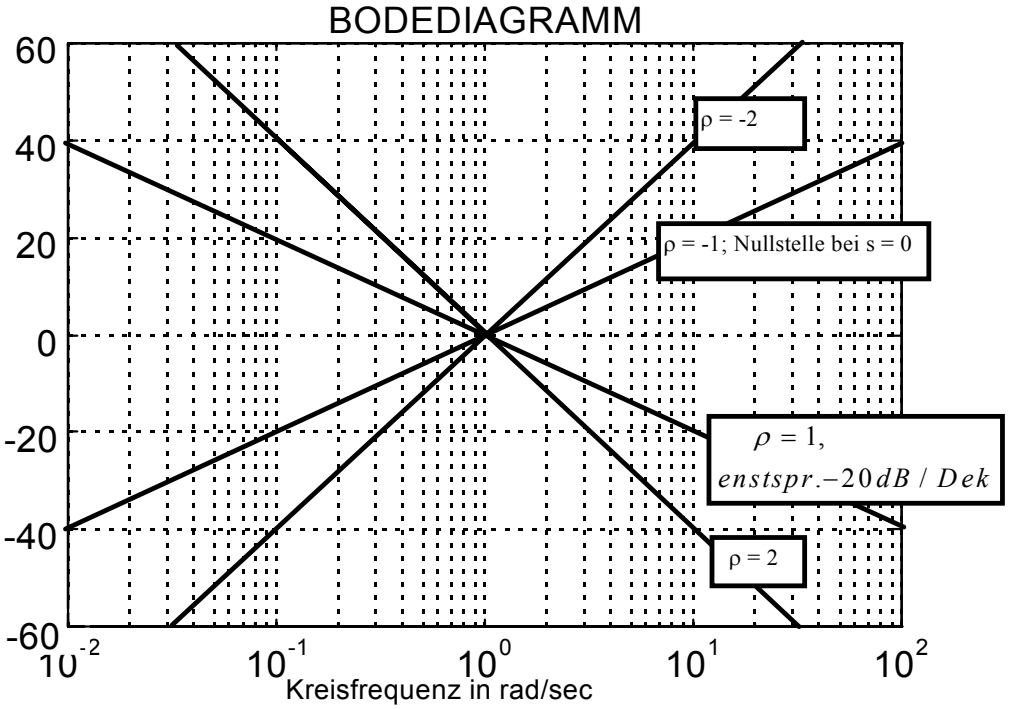
(3) dB-Maßstab für y-Achse eintragen

$|V|_{dB} = 20 \cdot \lg|V|$

tabellarischer Überblick über die wichtigsten Werte:

$\lvert V\rvert$		$\lvert V\rvert_{dB}$	$\lvert V\rvert$		$\lvert V\rvert_{dB}$
100	$\rightarrow$	40	1/2	$\rightarrow$	-6
10	$\rightarrow$	20	1/10	$\rightarrow$	-20
2	$\rightarrow$	6	1/100	$\rightarrow$	-40
1	$\rightarrow$	0	$\sqrt{2}$	$\rightarrow$	3
			$1/\sqrt{2}$	$\rightarrow$	-3

(4) $\left|\frac{1}{(j\omega)^{\rho}}\right|_{dB}$ **eintragen** $\left|\frac{1}{(j\omega)^{\rho}}\right|_{dB} = 20 \cdot \lg\left(\frac{1}{\omega^{\rho}}\right) = -20 \cdot \rho \cdot \lg(\omega) = \begin{cases} -20\rho \text{ in dB für } \omega = 10 \\ 0 dB \text{ für } \omega = 1 \\ +20\rho \text{ in dB für } \omega = 1/10 \end{cases}$



Im betrachteten Beispiel: $\rho = 1$

(5) Amplitudengang um $|V|_{dB}$ korrigieren

$V = 20 \Rightarrow V_{dB} = 26dB \Rightarrow$ Verschiebung der 0dB-Achse um -26dB

$$\left|\frac{V}{j\omega}\right|_{dB} = |V|_{dB} - |j\omega|_{dB} = -|j\omega|_{dB} + |V|_{dB}$$

(6) Amplitudengang von $\left|\frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_i}}\right|_{dB}$ und von $\left|1+\frac{j\omega}{\tilde{\omega}_i}\right|_{dB}$ zeichnen

einfache Nullstelle:

$$\left|1+\frac{j\omega}{\tilde{\omega}_i}\right|_{dB} = 20\cdot\lg\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_i}\right)^2}\right) = \begin{cases} 0dB \text{ für } \omega << \tilde{\omega}_i \\ 3dB \text{ für } \omega = \tilde{\omega}_i \\ 20dB\cdot\lg\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_i}\right) \text{ für } \omega >> \tilde{\omega}_i \end{cases}$$

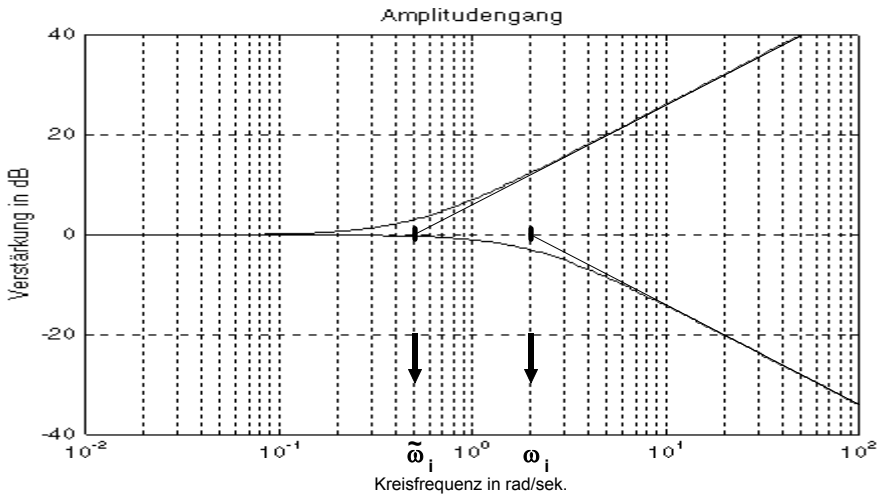
$\Rightarrow$ $^{20dB}/_{Dekade}$ – *Steigung für* $\omega >> \omega_i$

einfache Polstelle:

$$\left|\frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_i}}\right|_{dB} = -20\cdot\lg\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2}\right) = \begin{cases} 0dB \text{ für } \omega << \omega_i \\ -3dB \text{ für } \omega = \omega_i \\ 20dB\cdot\lg\left(\frac{\omega_i}{\omega}\right) \text{ für } \omega >> \omega_i \end{cases}$$

$$= 20dB\cdot\lg(\omega_i) - 20dB\cdot\lg(\omega)$$

$\Rightarrow$ $^{20dB}/_{Dekade}$ – *Gefälle für* $\omega >> \omega_i$



(7) Amplitudengänge von $\left(1+2\left(\frac{\tilde{D}_i}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right)j\omega+\left(\frac{j\omega}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right)^2\right)$ **und** $\frac{1}{1+2\left(\frac{D_i}{\omega_{n_i}}\right)j\omega+\left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}}\right)^2}$ **zeichnen**

Beachte: $|D_i|,|\tilde{D}_i|<1$

konjugiert komplexes Nullstellenpaar:

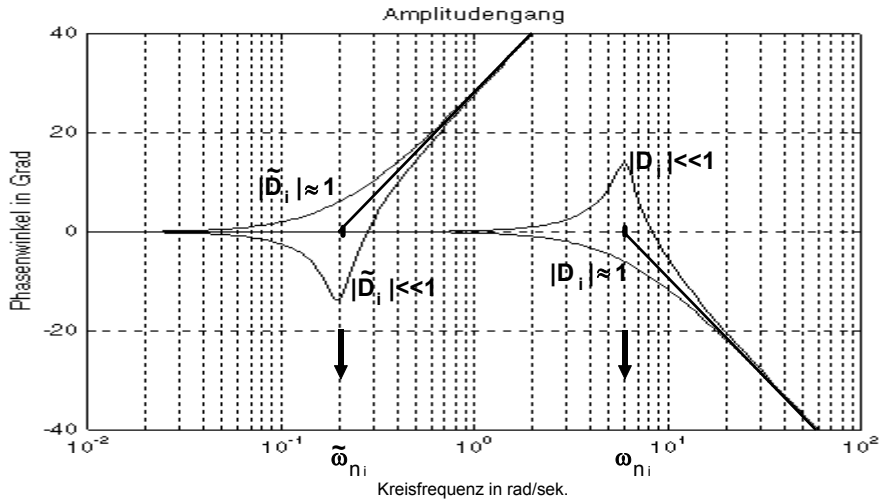
$$\left|1+2\left(\frac{\tilde{D}_i}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right)j\omega+\left(\frac{j\omega}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right)^2\right|_{dB}=20dB\cdot\lg\left(\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right)^2\right)^2+4\left(\frac{\tilde{D}_i\omega}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right)^2}\right)=\begin{cases}0dB\ \textit{für}\ \omega<<\tilde{\omega}_{n_i}\\ 20dB\cdot\lg\left(2\tilde{D}_i\right)\ \textit{für}\ \omega=\tilde{\omega}_{n_i}\\ 40dB\cdot\lg\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_{n_i}}\right)\ \textit{für}\ \omega>>\tilde{\omega}_{n_i}\end{cases}$$

$\Rightarrow\ {}^{40dB}/_{Dekade}-Steigung$

konjugiert komplexes Polstellenpaar:

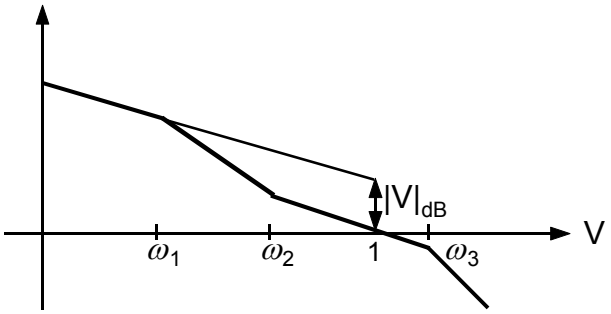
$$\left|\frac{1}{1+2\left(\frac{D_i}{\omega_{n_i}}\right)j\omega+\left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}}\right)^2}\right|_{dB}=\begin{cases}0dB\ \textit{für}\ \omega<<\omega_{n_i}\\ -20dB\cdot\lg\left(2D_i\right)\ \textit{für}\ \omega=\omega_{n_i}\\ 40dB\cdot\lg\left(\frac{\omega_{n_i}}{\omega}\right)\ \textit{für}\ \omega>>\omega_{n_i}\end{cases}$$

$\Rightarrow\ {}^{40dB}/_{Dekade}-Gefälle$



Korrekturkennlinien für den einzelnen Amplitudengang verwenden!

(8) Einzelne Amplitudengänge aufaddieren



$$\frac{V}{j\omega}\cdot\frac{\left(1+\frac{j\omega}{\omega_2}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{j\omega}{\omega_3}\right)}$$

zunehmendes Gefälle: es handelt sich um eine weitere Polstelle

abnehmendes Gefälle: es handelt sich um eine weitere Nullstelle

(9) Phasengang zeichnen

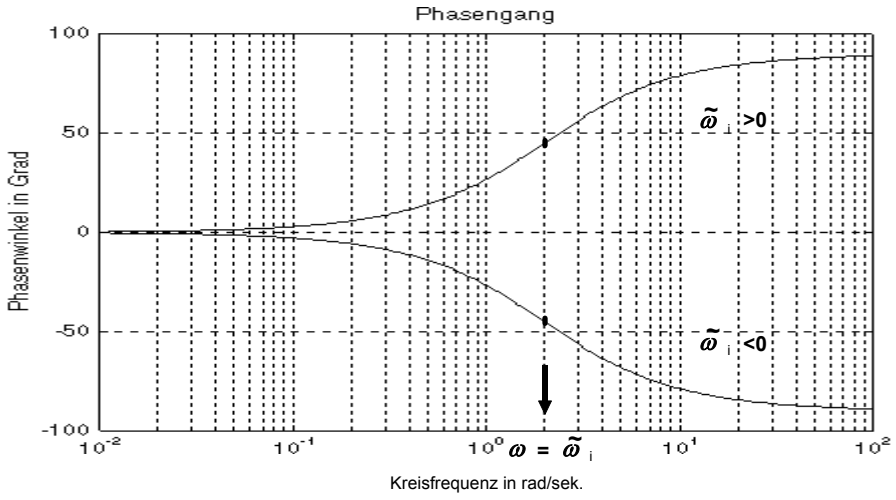
$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j \arg\{G(j\omega)\}}$$

$$\arg\{G(j\omega)\} = \arg\left\{1 + 2\left(\frac{0.2}{1}\right)(j\omega) + \left(\frac{j\omega}{1}\right)^2\right\} - \arg\{j\omega\} - \arg\left\{1 + \frac{j\omega}{0.1}\right\} - \arg\left\{1 + 2\left(\frac{0.1}{10}\right)(j\omega) + \left(\frac{j\omega}{10}\right)^2\right\}$$

Im *vorliegenden Fall ist*: $\arg\{j\omega\} = -90°$

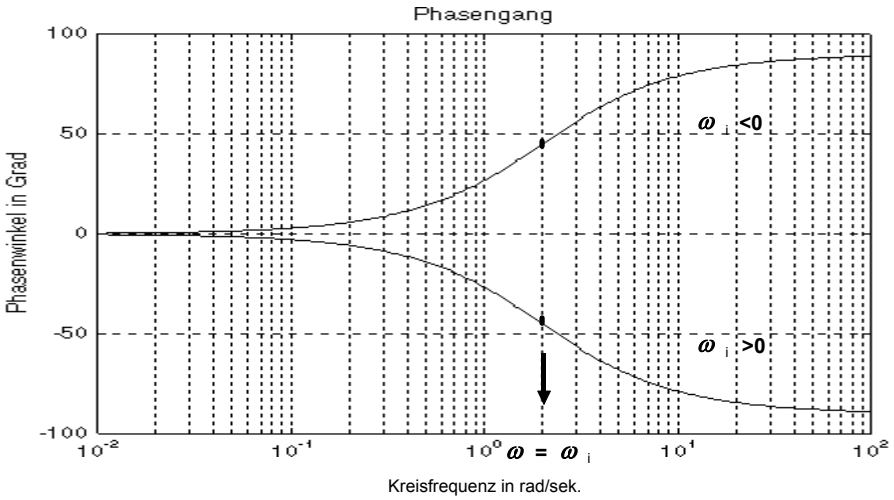
einfache Nullstelle:

$$\arg\left\{1 + \frac{j\omega}{\tilde{\omega}_i}\right\} = \arctan\left(\frac{\omega/\tilde{\omega}_i}{1}\right) = \begin{cases} \underbrace{\begin{matrix} 0° \\ +45° \\ +90° \end{matrix}}_{\substack{\text{falls } \tilde{\omega}_i > 0 \\ \text{Nullstelle links}}} & \underbrace{\begin{matrix} 0° \\ -45° \\ -90° \end{matrix}}_{\substack{\text{falls } \tilde{\omega}_i < 0 \\ \text{Nullstelle rechts}}} & \begin{matrix} |\omega| << |\tilde{\omega}_i| \\ |\omega| = |\tilde{\omega}_i| \\ |\omega| >> |\tilde{\omega}_i| \end{matrix} \end{cases}$$



einfache Polstelle:

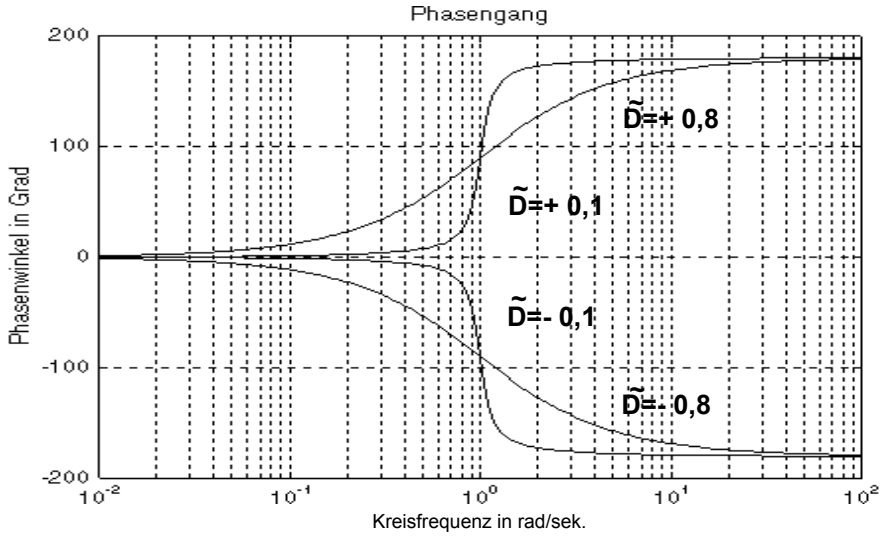
$$\arg\left\{\frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_i}}\right\} = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right) = \begin{cases} \underbrace{\begin{matrix}0°\\-45°\\-90°\end{matrix}}_{\substack{\text{falls } \omega_i>0\\ \text{Polstelle links}}} & \underbrace{\begin{matrix}0°\\+45°\\+90°\end{matrix}}_{\substack{\text{falls } \omega_i<0\\ \text{Polstelle rechts}}} & \begin{matrix}|\omega| << |\omega_i|\\ |\omega| = |\omega_i|\\ |\omega| >> |\omega_i|\end{matrix} \end{cases}$$



Zum Zeichnen der Phasengänge einfacher (reeller) Pol- bzw. Nullstellen verwendet man das *Phasenlineal* (siehe Anhang A4).

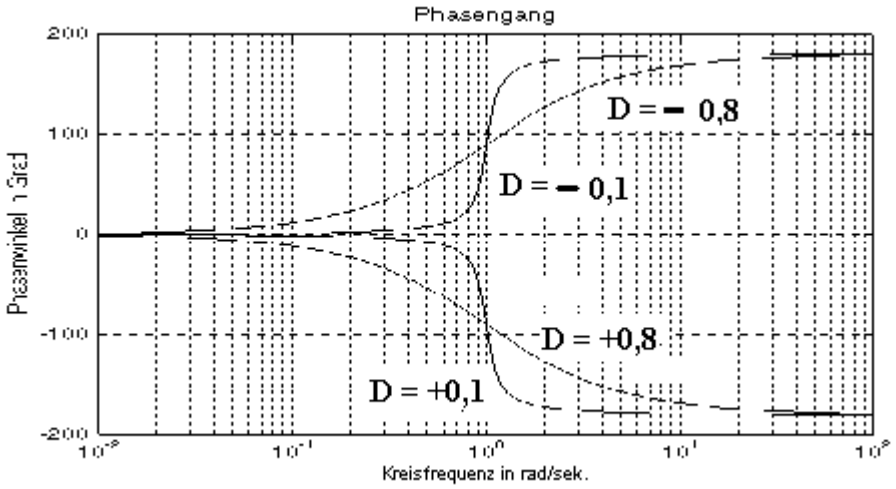
konjugiert komplexes Nullstellenpaar:

$$\arg\left\{1+2\tilde{D}\left(\frac{j\omega}{\tilde{\omega}_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\tilde{\omega}_n}\right)^2\right\} = \arctan\left\{\frac{2\tilde{D}\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_n}\right)^2}\right\} = \begin{cases} \underbrace{\begin{matrix}0°\\+90°\\+180°\end{matrix}}_{\substack{\text{falls } \tilde{D}>0\\ \text{Nullstelle links}}} & \underbrace{\begin{matrix}0°\\-90°\\-180°\end{matrix}}_{\substack{\text{falls } \tilde{D}<0\\ \text{Nullstelle rechts}}} & \begin{matrix}\text{für } \omega << \tilde{\omega}_n\\ \text{für } \omega = \tilde{\omega}_n\\ \text{für } \omega >> \tilde{\omega}_n\end{matrix} \end{cases}$$



konjugiert komplexes Polstellenpaar:

$$\arg\left\{\frac{1}{1+2D\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}\right\}=\begin{cases}0° & 0° & \text{für } \omega << \omega_n\\ -90° & +90° & \text{für } \omega = \omega_n\\ \underbrace{-180°}_{\substack{\text{falls } D>0\\ \text{Polstelle links}}} & \underbrace{+180°}_{\substack{\text{falls } D<0\\ \text{Polstelle rechts}}} & \text{für } \omega >> \omega_n\end{cases}$$



Zum Zeichnen der Phasengänge von konjugiert komplexen Pol- bzw. Nullstellenpaaren verwendet man den *Phasengang* (siehe Anhang A4).

Endlich addiert man alle Phasenbeiträge zusammen und stellt die summe graphisch dar. Das Ergebnis (sowohl Amplitudengang als auch Phasengang) steht auf der Titelseite dieses Kapitels.

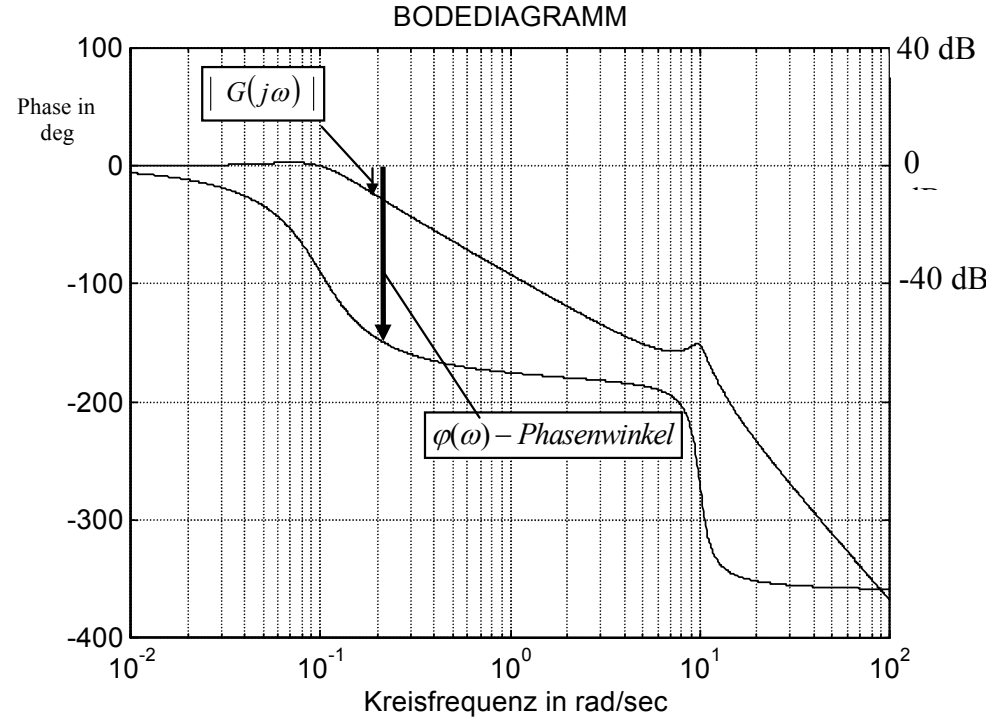
Noch eine Schlußbemerkung:

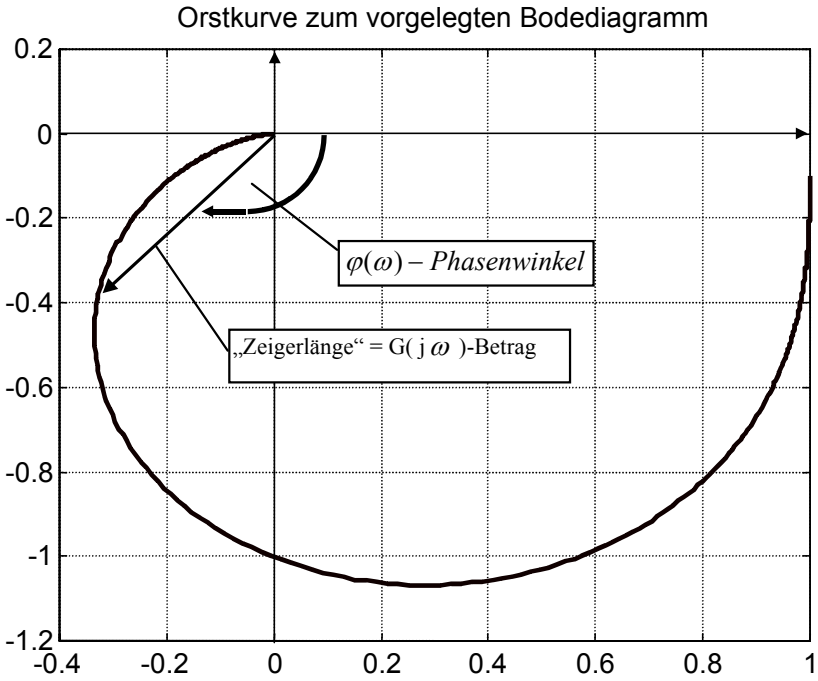
Bekanntlich nennt man Übertragungssysteme, bei denen mit dem Amplitudengang der Phasengang bereits eindeutig festliegt und nicht mehr gezeichnet werden muß: Phasenminimumsysteme, minimalphasige Systeme oder allpaßfreie Systeme.

Phasenminimumsysteme sind also stabil und haben nur Nullstellen mit $\mathrm{Re}\{s_{i0}\}<0$.

5.2. Skizzieren der Ortskurve des Frequenzgangs mit Unterstützung des BODE-Diagramms

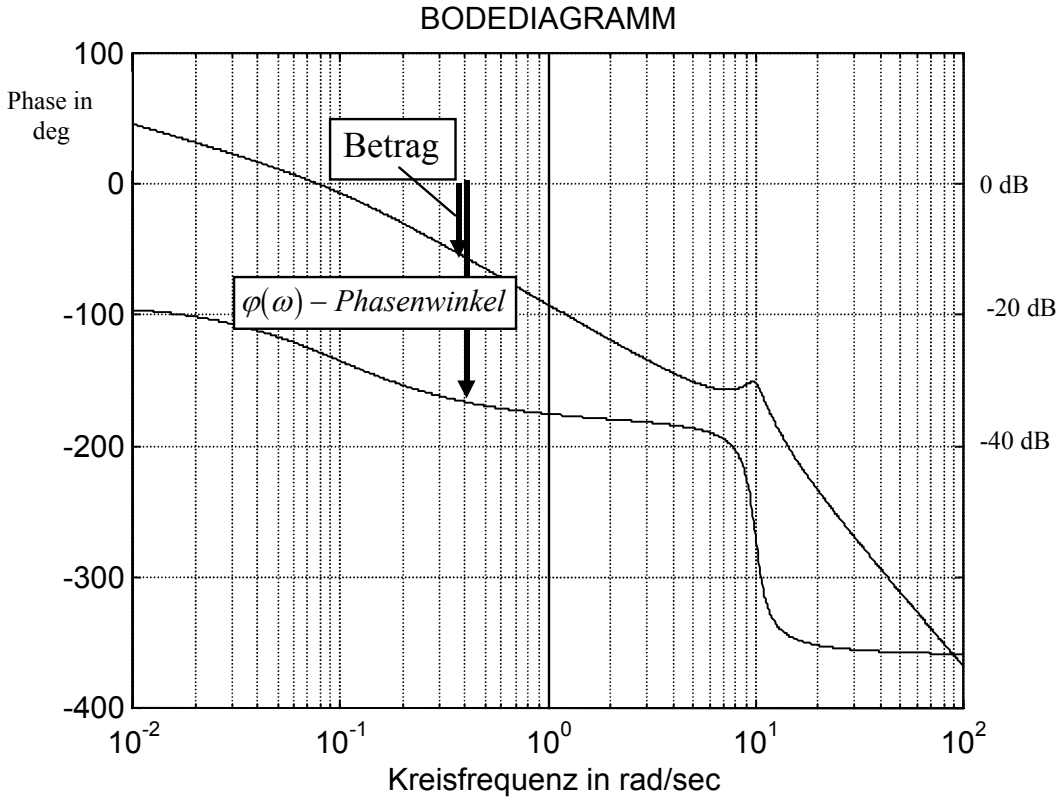
Hier können wir uns mit einigen beispielhaften Hinweisen begnügen.
Beispiel 1: G(jw) sei durch sein Bodediagramm gegeben

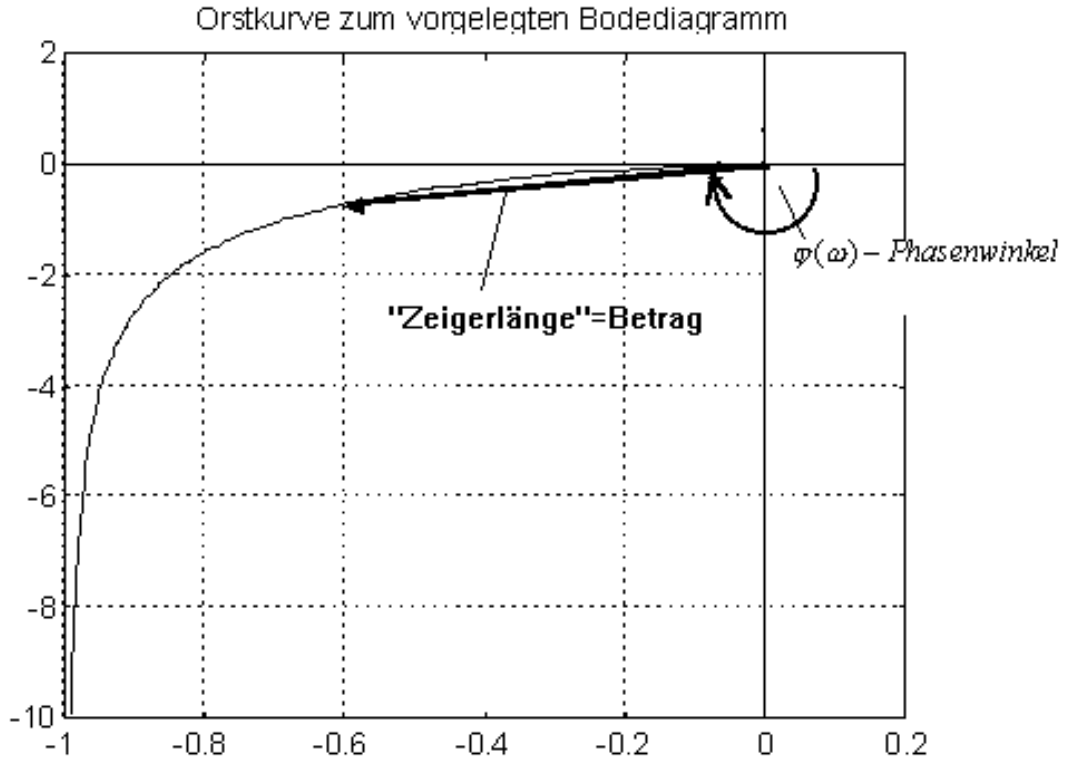




Für verschiedene Kreisfrequenzen liest man aus dem Bodediagramm den Betrag und die Phase von G(jw) aus und trägt diese als komplexen Zeiger in die Ortskurvenebene ein. Auf diese Weise erzeugt man sich qualitativ den Verlauf der Ortskurve des Frequenzgangs („Nyquistortskurve“).

Beispiel 2: G(jw) sei durch sein Bodediagramm gegeben



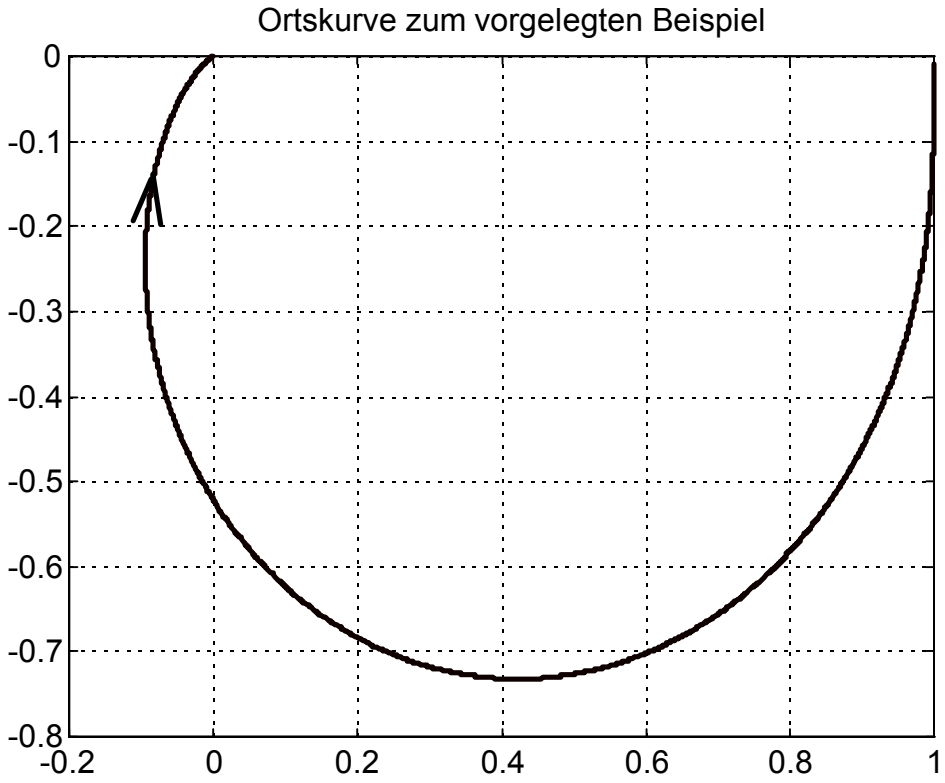


Für verschieden Kreisfrequenzen liest man aus dem Bodediagramm den Betrag und die Phase von G(jw) aus und trägt diese als komlexen Zeiger in die Ortskurvenebene ein. Überlgen Sie sich, wie hier der Verlauf der Ortskurve in der Nähe des Koordinatenursprungs aussieht.

Versuchen sie die folgende Aufgabe zu lösen:
Von einer Regelstrecke ist bekannt, daß $G_s(s)$ vom Typ

$$G_s(s) = \frac{K}{s^6 + a_5 s^5 + \ldots + a_0}$$ ist.

Folgende Ortskurve des Frequenzgangs wurde aufgenommen:



Ist die Regelstrecke stabil ?

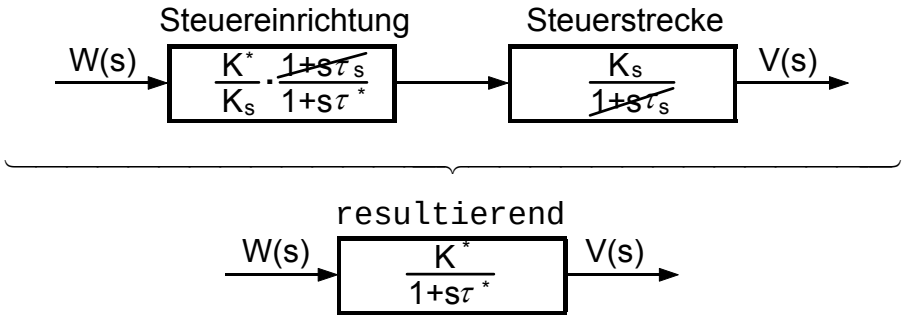
Lösung: Die Regelstrecke ist natürlich instabil. Wenn die Strecke stabil wäre, dann müßte der Phasenwinkel von $\omega = 0$ *bis* $\omega \to \infty$ einen Winkelbetrag von 6∗(-90°) = -540° durchlaufen. Es wurden aber nur eine Winkeländerung von - 180° festgestellt. Es muß also ein instabiles System sein das 2 Pole „rechts“ und 4 Pole „links“ hat. Die Reglerübertragungsfunktion lautet übrigens:

$$G(s) = \frac{1}{s^6 + 0{,}5s^5 - 10s^4 - 10s^3 + s^2 + s + 1}$$

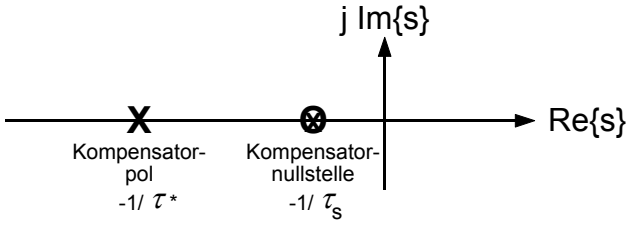
$G_s(s)$ hat Pole bei $s_{\infty} =$ +3.3455, -2.7705, -1.1658, +0.4905, -0.1999 +/- 0.3856i.

5.3 Kürzen von Polstellen durch Nullstellen

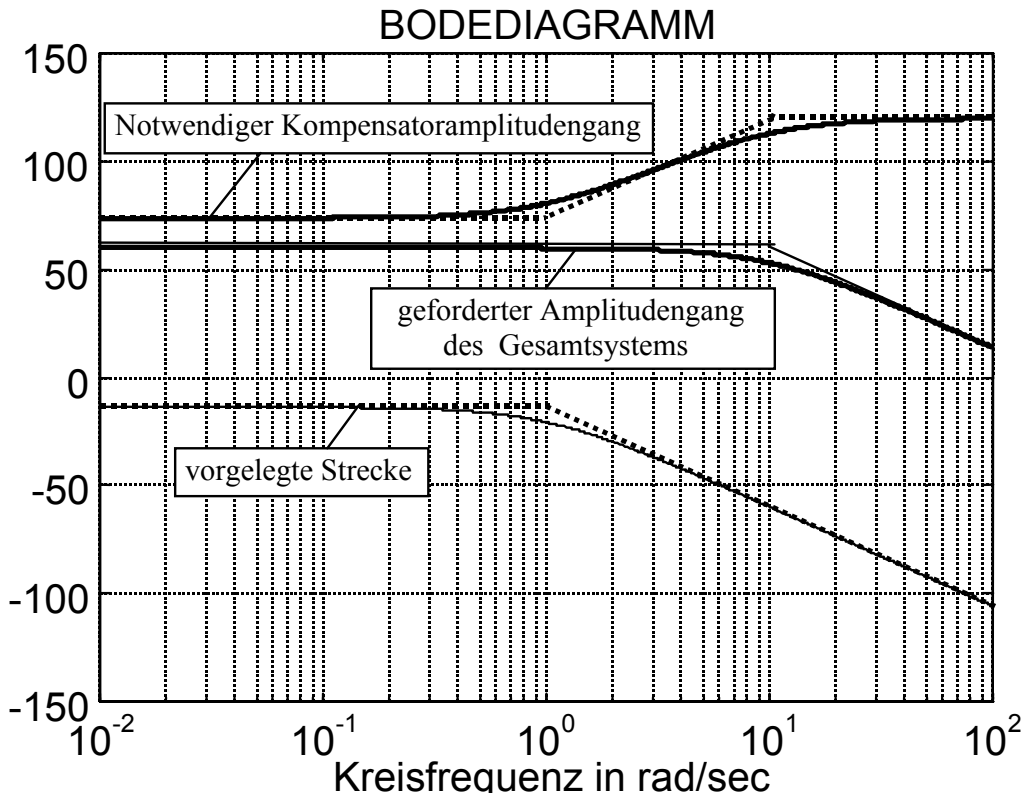
Es sei an 3.5 (Anmerkungen zum Steuerungsproblem = Kürzen von langsamen Polstellen der Steuerstrecke durch Kompensatornullstellen) erinnert.



Interpretation der Kürzung im P/N-Plan:



Neben der Interpretation im PN-Plan gibt es noch die aussagekräftigere Darstellung mit dem BODE-Diagramm. Wir begnügen uns mit den Amplitudengängen:



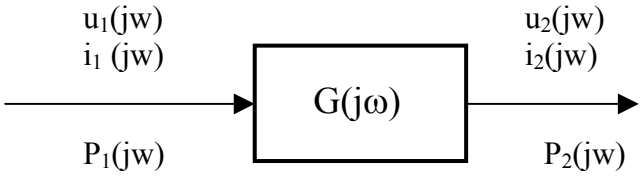
Kürzen von langsamen Streckenpolen durch Kompensatornullstellen kann man also folgendermaßen verstehen:

Da, wo ein Gefälle im Amplitudengang der Strecke einsetzt (Verursacher hierfür ist ja ein Streckenpol), ist dieser durch eine entsprechende Steigung des Kompensatoramplitudengangs (verursacht durch eine Kompensatornullstelle) zu begradigen.

Wenn man zur Lösung des vorgelegten Problems statt der Rechnung oder statt der Verwendung des PN-Plans das Bodediagramm heranzieht, so hat dies den Vorteil, daß die mathematische Beschreibung der Strecke gar nicht bekannt sein muß. Es genügt der gemessene Streckenfrequenzgang. Durch Anlegen von Asymptoten an den Streckenfrequenzgang gewinnt man sofort die richtige Vorstellung von Kompensatorfrequenzgang. Sowohl als Kurve als auch als mathematischen Ausdruck. Wie der Kompensator dann schaltungstechnisch zu realisieren ist, steht in Kapitel 3.

5.4 Weitere Anmerkungen zum Rechnen mit „dB“

Wir betrachten folgende beispielhafte Situation :



Eingangsgroeßen Ausgangsgroeßen

Unter „Amplitudengang“ $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log \frac{|V(j\omega)|}{|U(j\omega)|}$ versteht man hier entweder

$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log \frac{|U_2(j\omega)|}{|U_1(j\omega)|}$ oder alternativ $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log \frac{|I_2(j\omega)|}{|I_1(j\omega)|}$ (je nachdem, welche Signale Ein-und Ausgangsgrößen sein sollen) – das „Signalverhältnis“

oder $|G(j\omega)|_{dB} = 10 \cdot \log \frac{|P_2(j\omega)|}{|P_1(j\omega)|}$ - das „Leistungsverhältnis“ weil bei gleichen Widerständen sich die Leistungen wie die Quadrate wie der Spannungen bzw. der Ströme verhalten.

Manchmal wird statt des Amplitudengangs auch angegeben:
$a_{dB} = 20 \cdot \log \frac{|U_1(j\omega)|}{|U_2(j\omega)|}$ oder alternativ $a_{dB} = 20 \cdot \log \frac{|I_1(j\omega)|}{|I_2(j\omega)|}$ oder $a_{dB} = 10 \cdot \log \frac{|P_1(j\omega)|}{|P_2(j\omega)|}$
die Dämpfung (bzw. auch Dämpfungsmaß genannt)

und statt des Phasengangs b = $-\arg(G(j\omega)) = -\varphi(j\omega)$, das Phasenmaß.

Zusammengefaßt nennt man $g = a + j \cdot b \quad \in C$ das (komplexe) Übertragungsmaß.

In der Nachrichtentechnik wird nicht selten als Eingangsquelle ein sogenannter „Milliwattsender“ verwendet. Um dies zu kennzeichnen schreibt man beim Amplitudengang:

$$|G(j\omega)|_{dBm} = 10 \cdot \log \frac{|P_2(j\omega)[mW]|}{|P_1(j\omega)[1mW]|}.$$

Oder man verwendet einen „Wattsender“ und kennzeichnet dies durch:

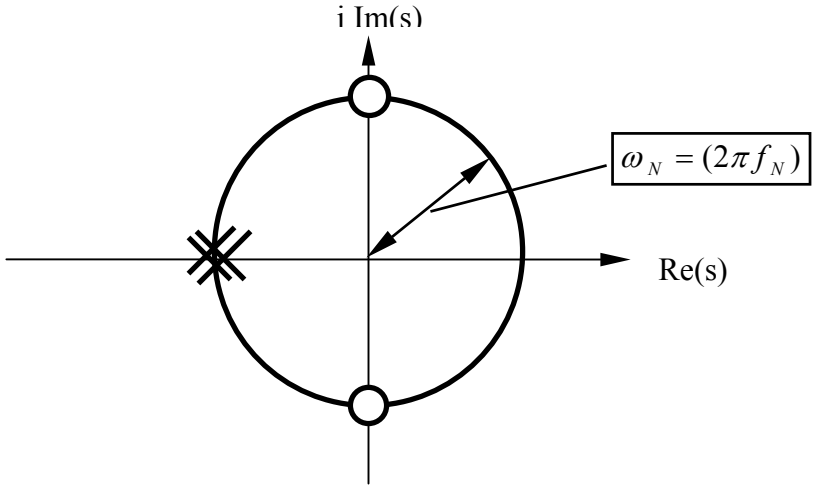
$$|G(j\omega)|_{dBW} = 10 \cdot \log \frac{|P_2(j\omega)[W]|}{|P_1(j\omega)[1W]|}.$$

In diesem Fall spricht man nicht mehr vom Amplitudengang sondern vom Leistungspegel.

Man beachte: 30dBm = 0 dBW bzw. 0 dBm = -30dBW.

5.5 Nochmals: Entwurf eines Notchfilters

In 3.7 heißt es: „Nachstehende Skizze zeigt den PN-Plan des Notchfilters. Warum gerade diese und keine andere PN-Konfiguration günstig ist, wird letzlich erst bei der Betrachtung zum BODE-Diagramm klar. Hier sei auf das 5. Kapitel verwiesen.“

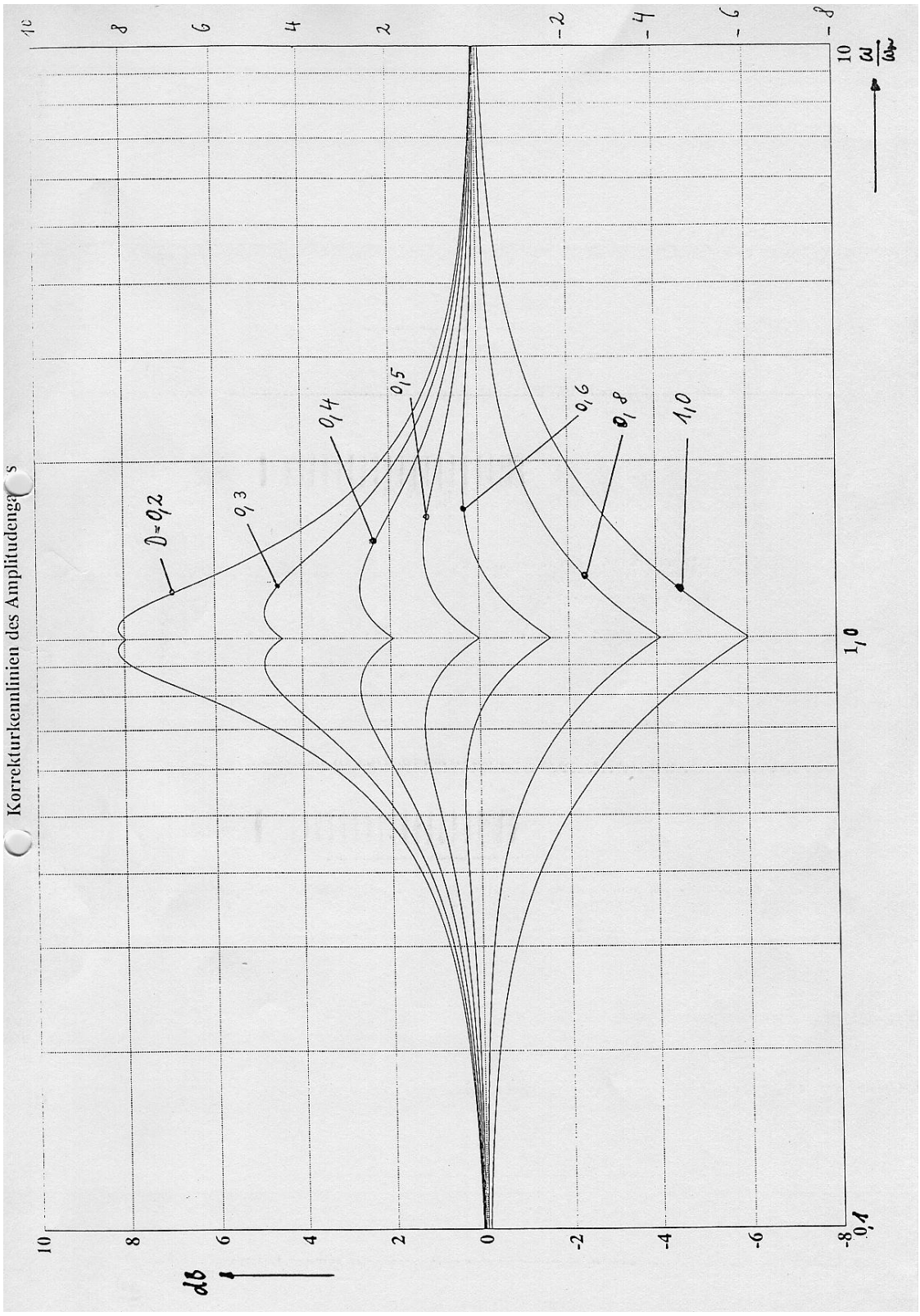


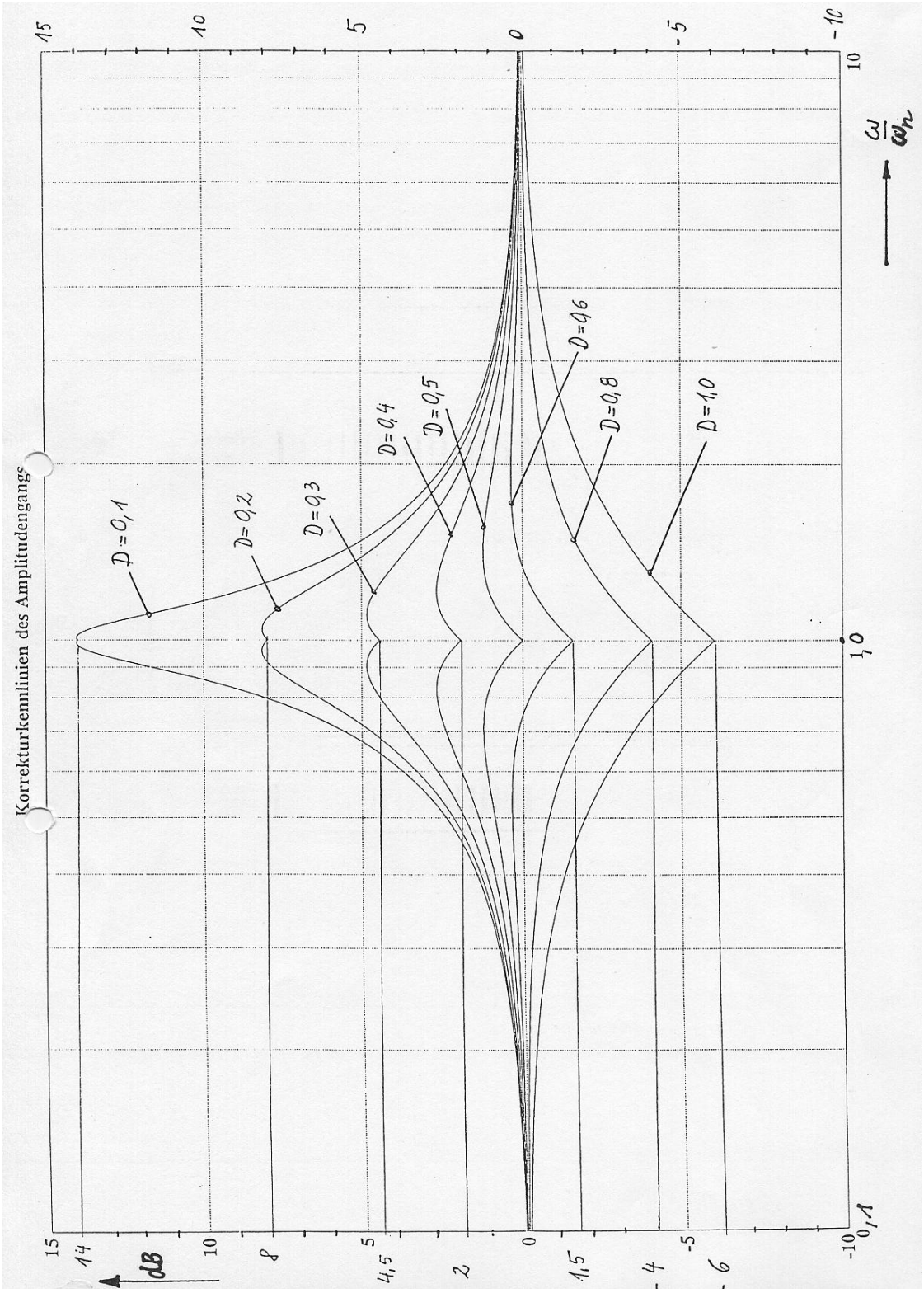
Die Lage der Nullstellen war ja zwangsläufig klar!
Welchen Vorteil hat gerade die oben gezeigte Lage der doppelten Polstellen? Argumentieren Sie mit Hilfe des BODE-Diagramms!

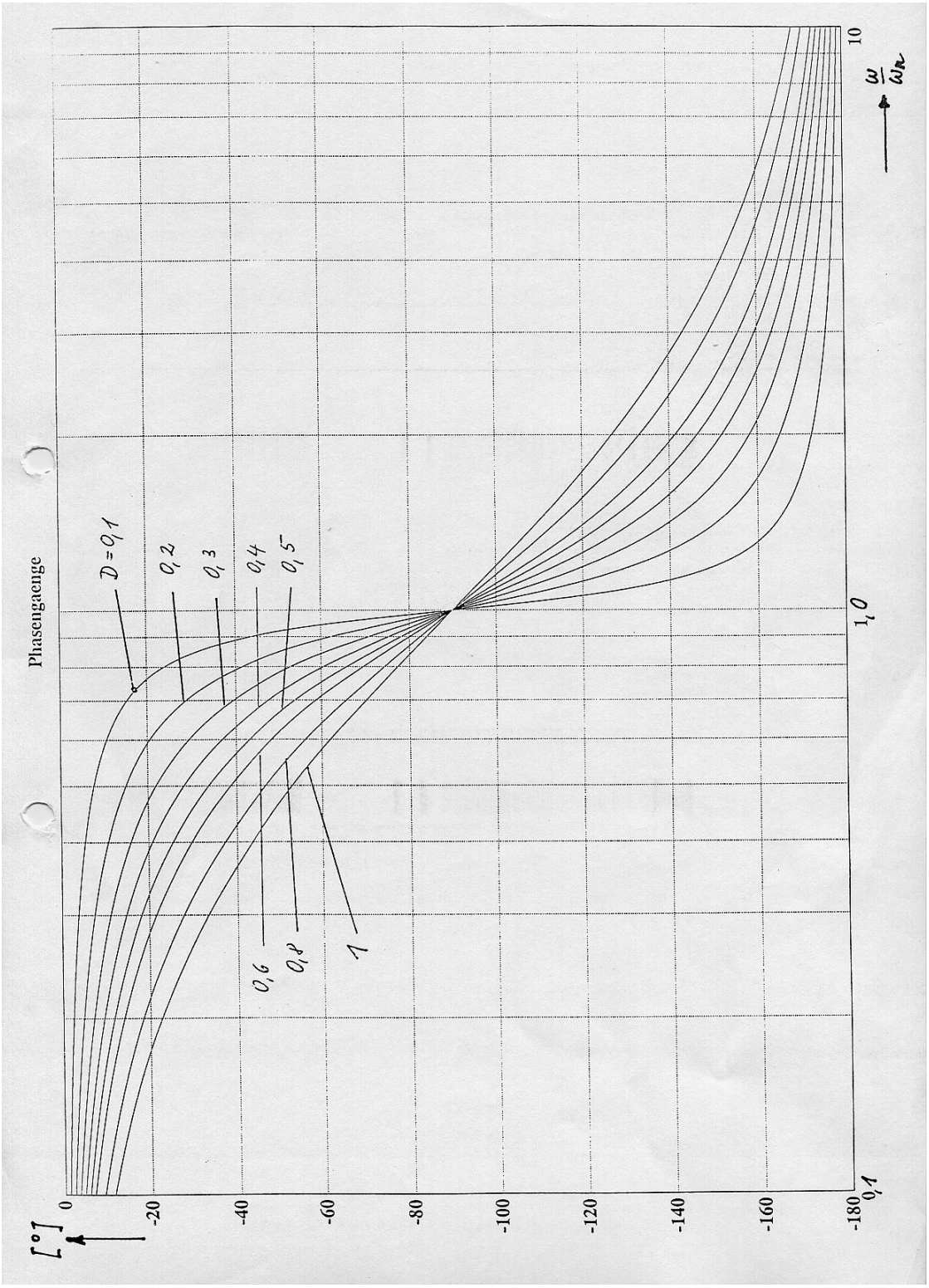
5.6 Anlagen :

In dieser Anlage finden Sie:

2	**Korrekturkennlinien des Amplitudengangs**
1	**Phasenlineal**
1	**Darstellung der Phasengänge**
1	**BODE-Papier in Grobstruktur**
3	**BODE-Papiere** in Feinstruktur


Korrekturkennlinien des Amplitudengangs
D=0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,8
1,0
db
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0,1
1,0
10


Korrekturkennlinien des Amplitudengangs
D=0,1
D=0,2
D=0,3
D=0,4
D=0,5
D=0,6
D=0,8
D=1,0
dB
ω/ωn
1,0
0,1


Phasengaenge
[°]
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
0,1
1,0
10
ω/ωr
D=0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,8
1

6. Betrachtungen am geschlossenen Regelkreis; Reglerparametrierungen

„Wer die Praxis ohne die Theorie liebt, ist wie ein Seemann, der auf ein Schiff steigt und nie weiß, wohin er gerät.“ (Leonardo da Vinci)

6.1 Regelungen mit einem und zwei Freiheitsgraden

Betrachtet werde der einschleifige Regelkreis von Bild 6.1.

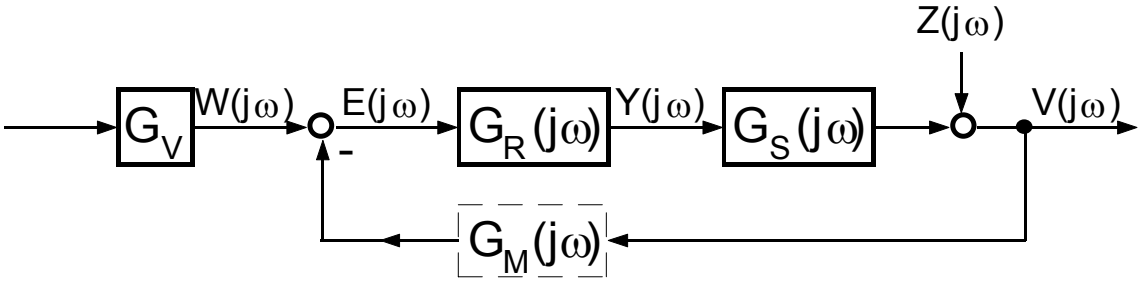


Bild 6.1: Regelkreis mit Vorfilter und Meßwandler; die Störgröße greift (repräsentativ) am Streckenausgang an. Es bezeichnet $G_O(j\omega) = G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega) \cdot \left(G_M(j\omega)\right)$ den Schleifenfrequenzgang (= Frequenzgang der offenen Regelschleife).

Es sei jetzt $G_M(j\omega) = 1$ und $G_V(j\omega) = 1$, dann gilt $G_O(j\omega) = G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega)$ und folglich:

Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises: $G_W(s) = \left.\frac{V(s)}{W(s)}\right|_{Z=0}$

$$G_W(s) = \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)} \tag{6.1}$$

Störübertragungsfunktion des Regelkreises: $G_Z(s) = \left.\frac{V(s)}{W(s)}\right|_{W=0}$

$$G_Z(s) = \frac{1}{1 + G_O(s)} \tag{6.2}$$

Offenbar gilt wegen $G_W(s) + G_Z(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad G_Z(s) = 1 - G_W(s)$ (6.3)

Regelung mit einem Freiheitsgrad, da mit dem Führungsfrequenzgang der Störfrequenzgang schon festliegt.

M. a. W.: “Aus dem Führungsverhalten folgt in diesem Fall das Störverhalten und umgekehrt.”

Überlegen Sie sich selbst, daß bei frei wählbarem $G_V(jw)$ ein Regelkreis mit 2 Freiheitsgraden entsteht.

Wir bleiben beim Regelkreis mit 1 Freiheitsgrad.

6.2 Regelfehler und die Stabilität von Regelkreisen

„Zwei Dinge sind unendlich: Das Universum und die Menschliche Dummheit. Aber beim Universum bin ich mir nicht ganz sicher.“ (Albert Einstein)

6.2.1 Regelfehler

Der Regelfehler e(t) = error, nach DIN 19226 auch mit $x_d(t)$ bezeichnet, ist
definiert als $e(t) = x_d(t) := w(t) - v(t).$ (6.4)

Im nachfolgendem Bild 6.2 ist e(t) eine (physikalische) Größe die tatsächlich im Regelkreis auftritt. Es sollte aber darauf hingewiesen werden, daß e(t) normalerweise nur eine Rechengröße ist. In Bild 6.3 tritt e(t) nicht explizit auf.

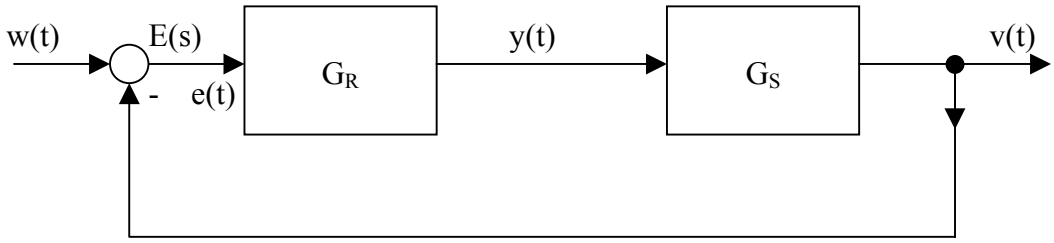


Bild 6.2: *e(t) tritt als physikalische Größe direkt im Regelkreis auf.*

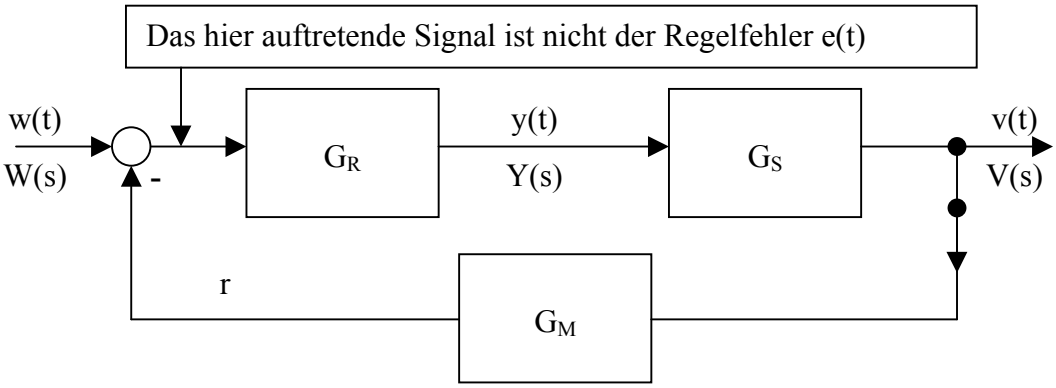
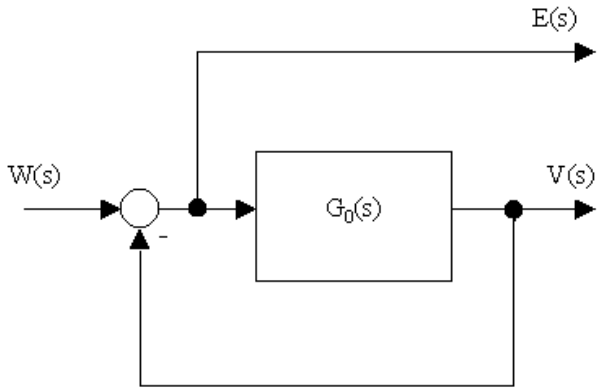


Bild 6.3: *e(t) tritt nicht im Regelkreis auf.*

Als stationären Regelfehler definiert man: $e_\infty = x_{d\infty} := \lim_{t\to\infty} e(t)$

Falls w(t) speziell
- $w(t) = \sigma(t)$ $\Rightarrow e_\infty = e_{1\infty}$ = stationärer Lagefehler
- $w(t) = t\cdot\sigma(t)$ $\Rightarrow e_\infty = e_{2\infty}$ = stationärer Geschwindigkeitsfehler
- $w(t) = (t^2/2)\cdot\sigma(t)$ $\Rightarrow e_\infty = e_{3\infty}$ = stationärer Beschleunigungsfehler

Für den Sonderfall in Bild 6.2 ...



... lassen sich Ausdrücke für $e_{1\infty}$, $e_{2\infty}$, $e_{3\infty}$ besonders einfach angeben.

Aus Bild 6.2, bzw. oben, liest man ab:

$$E(s) = W(s) - V(s) = W(s) - \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \cdot W(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot W(s)$$

G_0 sei in der V-Normalform gegeben:

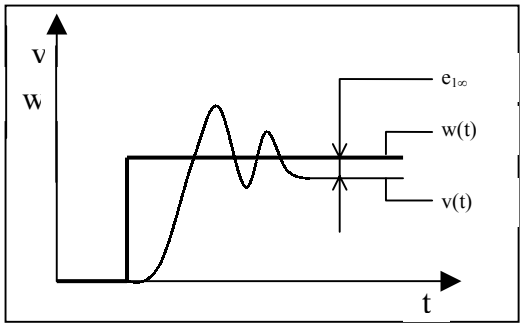
$$G_0(s) = \frac{V}{s^\rho} \cdot \frac{Z(s)}{N(s)}; \qquad Z(0) = N(0) = 1$$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{s^\rho N(s)}{s^\rho N(s) + V \cdot Z(s)} \cdot W(s)$$

Es sei $w(t) = \sigma(t)$ *("Sprung")*

$$\Rightarrow e_{1\infty} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s^\rho N(s)}{s^\rho N(s) + V \cdot Z(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

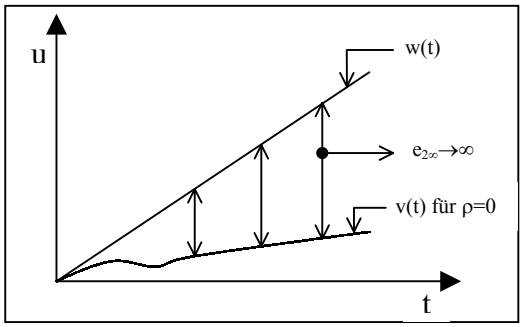
$$\textit{für } t \to \infty \Rightarrow e_{1\infty} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+V} & \textit{für } \rho = 0 \\ 0 & \textit{für } \rho = 1;2;3;... \end{cases}$$

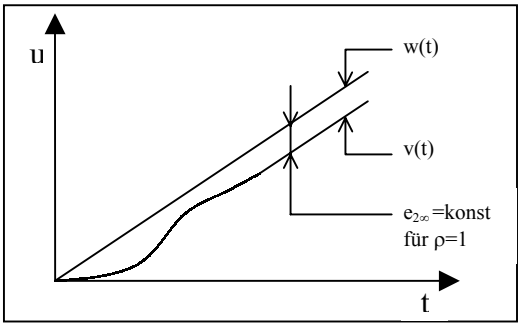


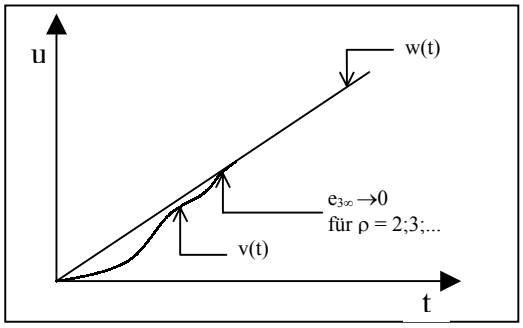
Es sei $w(t) = t \cdot \sigma(t)$ *("Rampe")*

$$\Rightarrow e_{2\infty} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s^{\rho} N(s)}{s^{\rho} N(s) + V \cdot Z(s)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$\text{für } t \to \infty \Rightarrow e_{2\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } \rho = 0 \\ \dfrac{1}{V} & \text{für } \rho = 1 \\ 0 & \text{für } \rho = 2;3;... \end{cases}$$







Es sei $w(t) = \dfrac{t^2}{2} \cdot \sigma(t)$ *("Parabel")* $\qquad$ $\text{für } t \to \infty \Rightarrow e_{3\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } \rho = 0;1 \\ \dfrac{1}{V} & \text{für } \rho = 2 \\ 0 & \text{für } \rho = 3;4;... \end{cases}$

Zusammenstellung der Ergebnisse (für die spezielle Struktur von Bild 6.2):

$\rho \rightarrow$ $w \downarrow$	0	1	2	3	…
$\sigma(t)$	$\frac{1}{1+V}$	0	0	0	…
$t \cdot \sigma(t)$	∞	$\frac{1}{V}$	0	0	…
$\frac{1}{2!}t^2 \cdot \sigma(t)$	∞	∞	$\frac{1}{V}$	0	…
$\frac{1}{3!}t^3 \cdot \sigma(t)$	∞	∞	∞	$\frac{1}{V}$	…
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

(6.5)

Aufgabe: Für eine Regelkreisstruktur wie in Bild 6.1 dargestellt stelle man ein vergleichbares Tableau auf.

6.2.2 Die Stabilität in Regelkreisen

Vorbemerkung zur Stabilität von rückgekoppelten und nicht rückgekoppelten Systemen

Definition:

> Ein Übertragungssystem ist stabil, wenn zu jeder beschränkten Eingangsfunktion eine beschränkte Ausgangsfunktion gehört (=BIBO-Stabilität).
>
> Bekanntlich (vgl. VL Systemtheorie) gilt für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten (=zeitunveränderlichen) Parametern:
>
> System BIBO-stabil $\Leftrightarrow$ für alle Pole $s_{i\infty}$ von G(s) gilt: $\mathbf{Re\{s_{i\infty}\} < 0}$

Alle Teilsysteme eines Regelsystems können stabil sein, zusammengeschaltet kann instabiles Regelsystem entstehen.

Es werden jetzt Stabilitätskriterien angegeben.

(Ein Kriterium ist ein Merkmal, an dem man ablesen kann, ob eine Eigenschaft im Sinne der Definition vorliegt oder nicht).

Es gibt notwendige und hinreichende Kriterien.

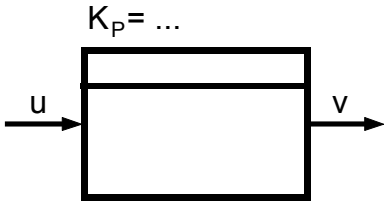
Damit ist folgendes gemeint:

Hinreichendes Kriterium erfüllt	$\Rightarrow$	Stabilitätseigenschaft liegt vor.
Stabilitätseigenschaft liegt vor	$\Rightarrow$	Notwendiges Kriterium kann daraus abgeleitet werden.

6.3. Zusammenstellung wichtiger Regelkreisglieder

„Ich finde keine Spur von Geist – und alles ist Dressur“ (Goethe, Faust)

6.3.1. Das P-Glied



Beschreibung im Zeitbereich: $v(t) = K_P \cdot u(t)$ K_P - Proportionalbeiwert

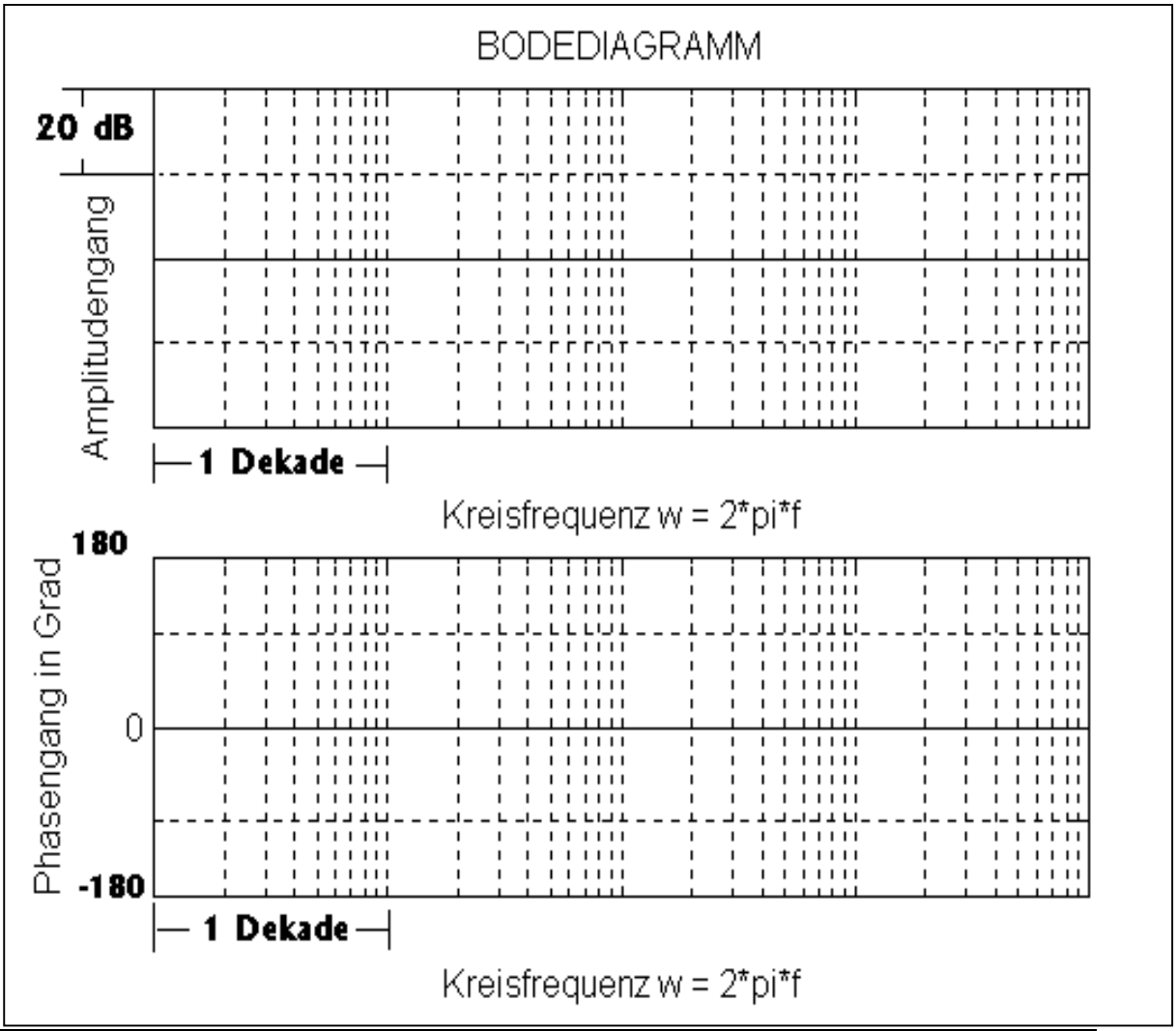
Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P$

Übergangsfunktion: $h(t) = K_P \cdot \sigma(t)$

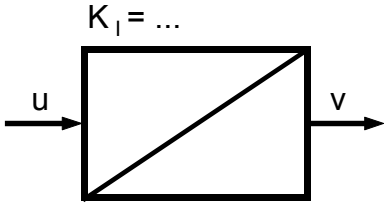
stabil
realisierbar

P/N-Plan entfällt

log. FKL’n:



6.3.2. Das I-Glied

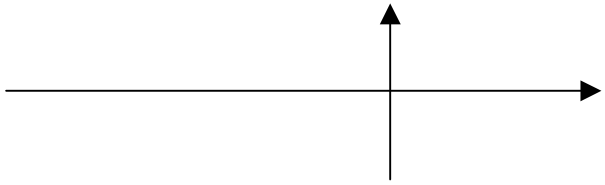


Beschreibung im Zeitbereich: $v(t) = K_I \cdot \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau$ K_I - Integrierbeiwert

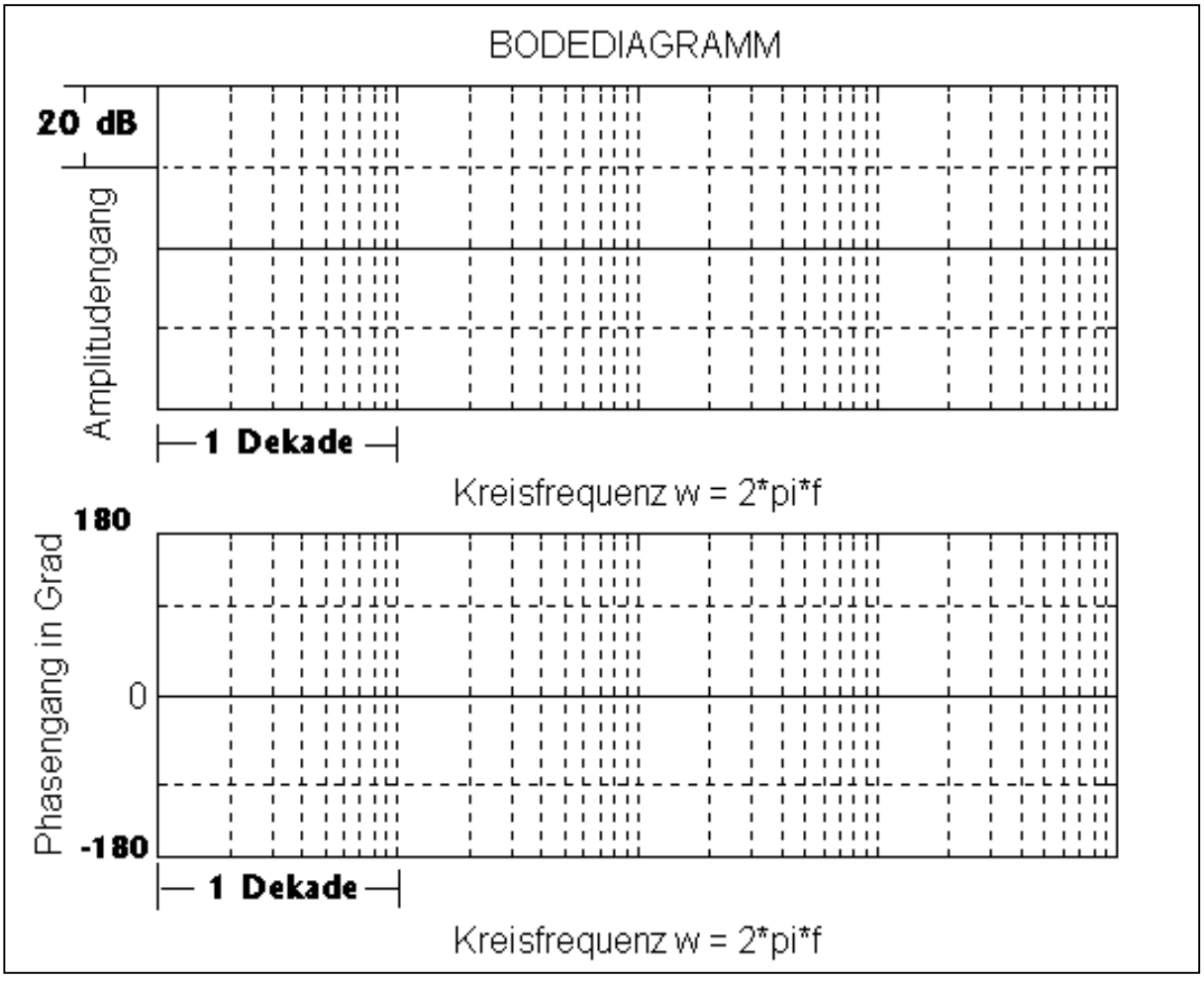
Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{K_I}{s}$ instabil realisierbar

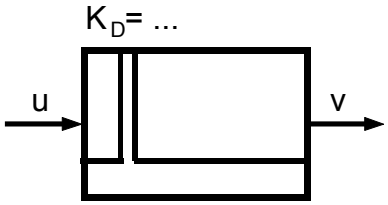
Übergangsfunktion: $h(t) = K_I \cdot t \cdot \sigma(t)$

P/N-Plan:



Log. Frequenzkennlinien





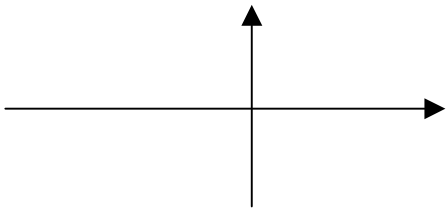
Beschreibung im Zeitbereich: $v(t) = K_D \cdot \dot{u}(t)$ K_D - Differenzierbeiwert

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_D \cdot s$

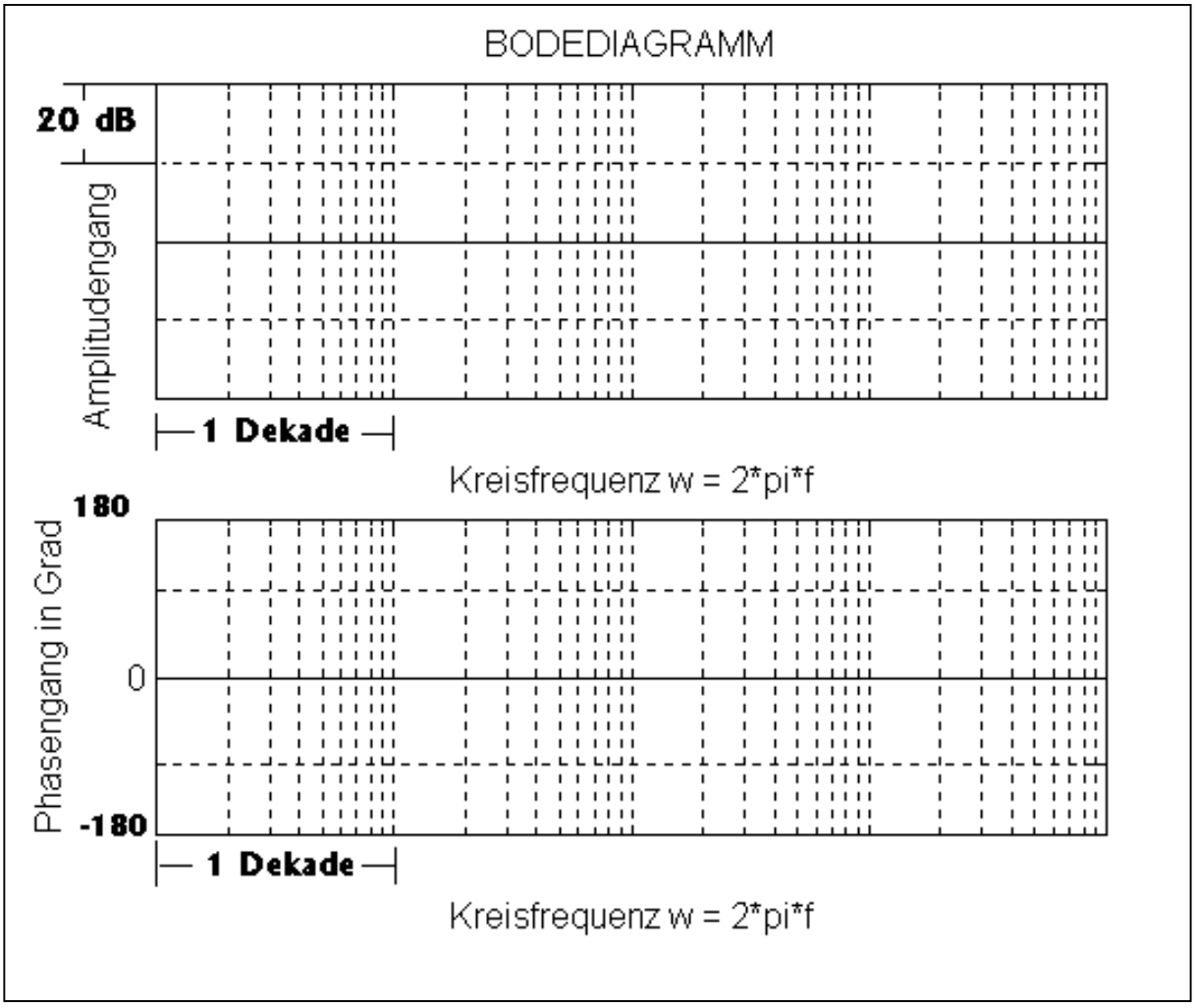
Instabil
nicht realisierbar

Übergangsfunktion: $h(t) = K_D \cdot \delta(t)$

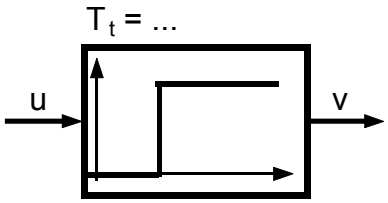
P/N-Plan:



Log. FKL'n



6.3.4. Das Totzeitglied



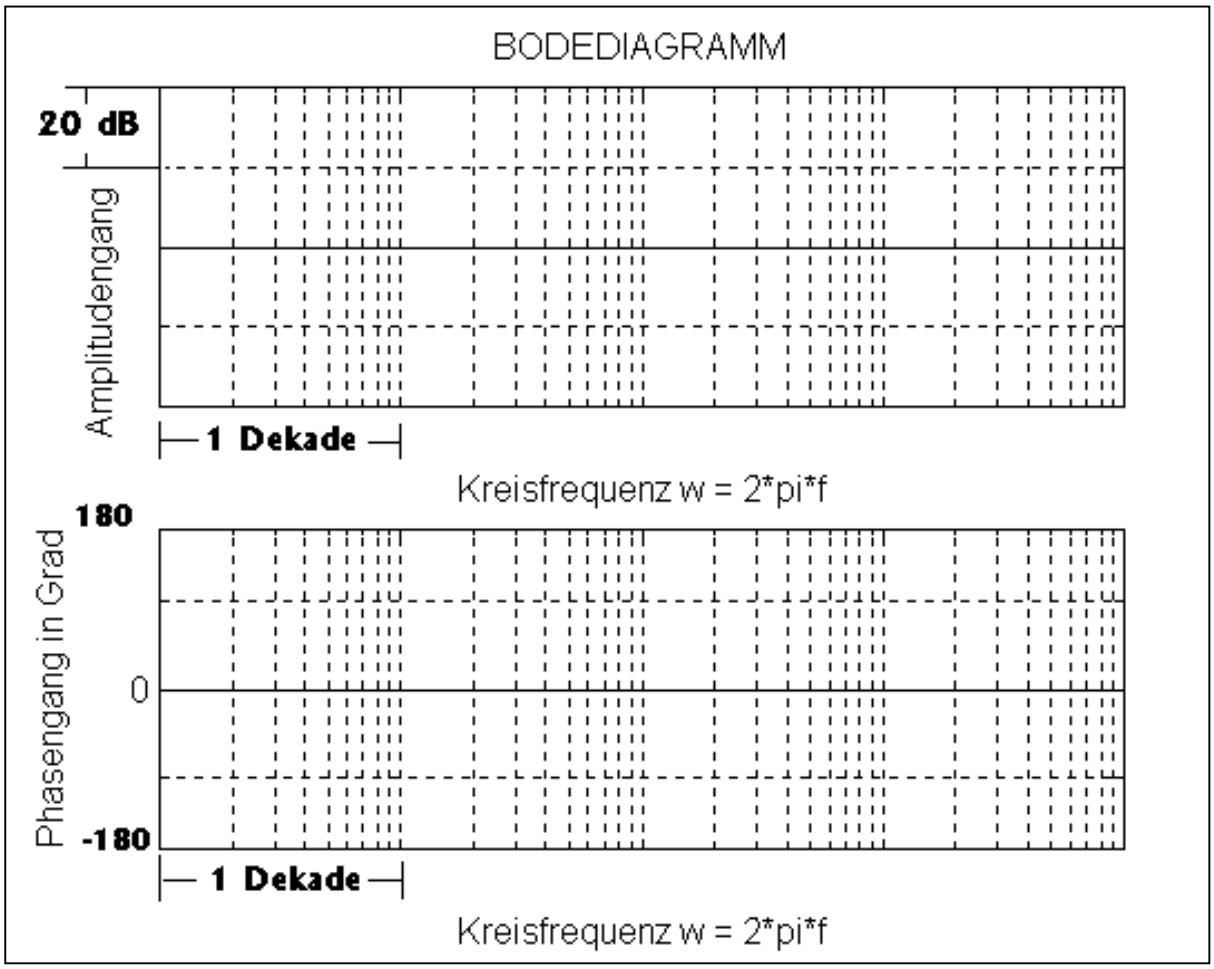
Beschreibung im Zeitbereich: $v(t) = u(t - T_t)$ T_t - Totzeit

Übertragungsfunktion: $G(s) = e^{-sT_t}$ realisierbar
stabil

Übergangsfunktion: $h(t) = \sigma(t - T_t)$

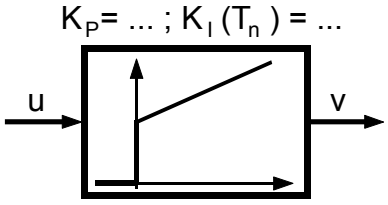
P/N-Plan: unterschiedlich darstellbar, aber immer ∞ viele Nullstellen und ggf. auch noch ∞ viele Polstellen.

log. FKL'n:



Achtung: Totzeitglieder sind (obwohl selber stabil) in geschlossenen Regelkreisen gefährliche "Stabilitätskiller" ! ($\rightarrow$ Nyquist-Kriterium).

6.3.5. Das PI-Glied (Der PI-Regler)



Beschreibung im Zeitbereich: $v(t) = K_P \cdot u(t) + K_I \cdot \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau$

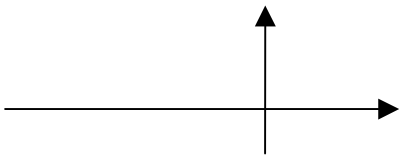
bzw. $v(t) = K_P \cdot \left[u(t) + \left(\frac{1}{T_n} \right) \cdot \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau \right]$ T_n - Nachstellzeit

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{sT_n} \right)$ $T_n = \frac{K_P}{K_I}$

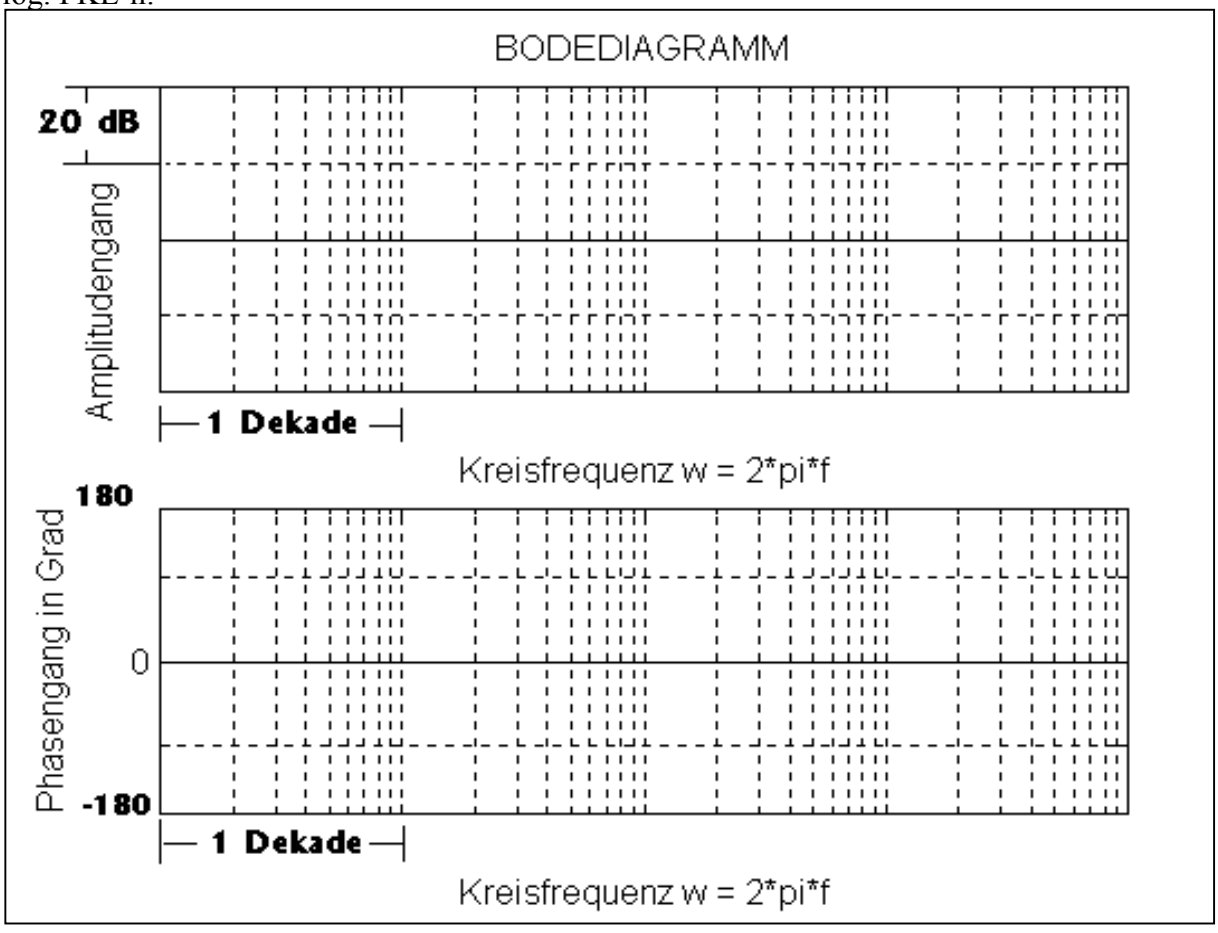
Übergangsfunktion: $h(t) = K_P \cdot \left(1 + \frac{t}{T_n} \right) \cdot \sigma(t)$

instabil
realisierbar

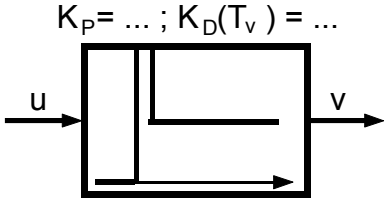
P/N-Plan:



log. FKL'n:



6.3.6. Das PD-Glied (Der PD-Regler)



Beschreibung im Zeitbereich: $v(t) = K_P \cdot u(t) + K_D \cdot \dot{u}(t)$

bzw. $v(t) = K_P \cdot \left[u(t) + T_v \cdot \dot{u}(t)\right]$ T_v - Vorhaltzeit

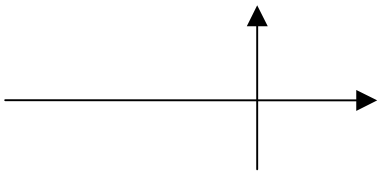
$$T_v = \frac{K_D}{K_P}$$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P \cdot \left[1 + sT_v\right]$

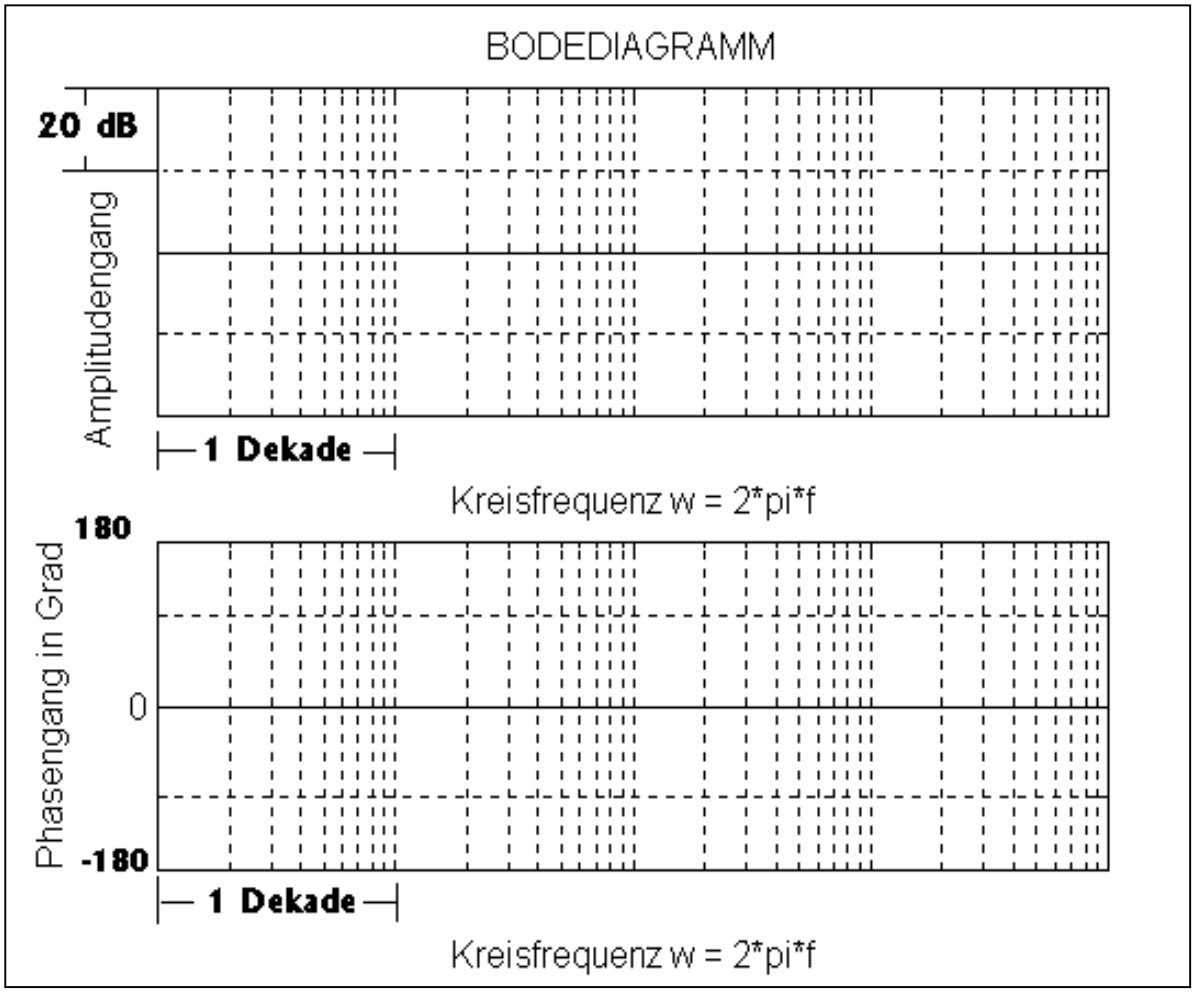
Übergangsfunktion: $h(t) = K_P \cdot \sigma(t) + K_D \cdot \delta(t)$

instabil
nicht realisierbar

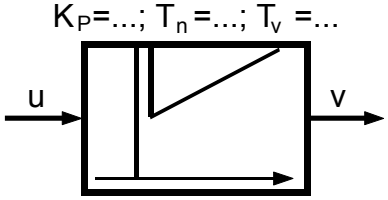
P/N-Plan:



log. FKL'n:



6.3.7. Das PID-Glied (Der PID-Regler)



Beschreibung im Zeitbereich: $v(t) = K_P \cdot u(t) + K_I \cdot \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau + K_D \cdot \dot{u}(t)$

bzw. $v(t) = K_P \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{T_n} \right) \cdot \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau + T_v \cdot \dot{u}(t) \right]$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P \cdot \left[1 + \frac{1}{sT_n} + sT_v \right]$ bzw. $G(s) = K_P \cdot \left[\frac{1 + sT_n + s^2 T_n T_v}{sT_n} \right]$

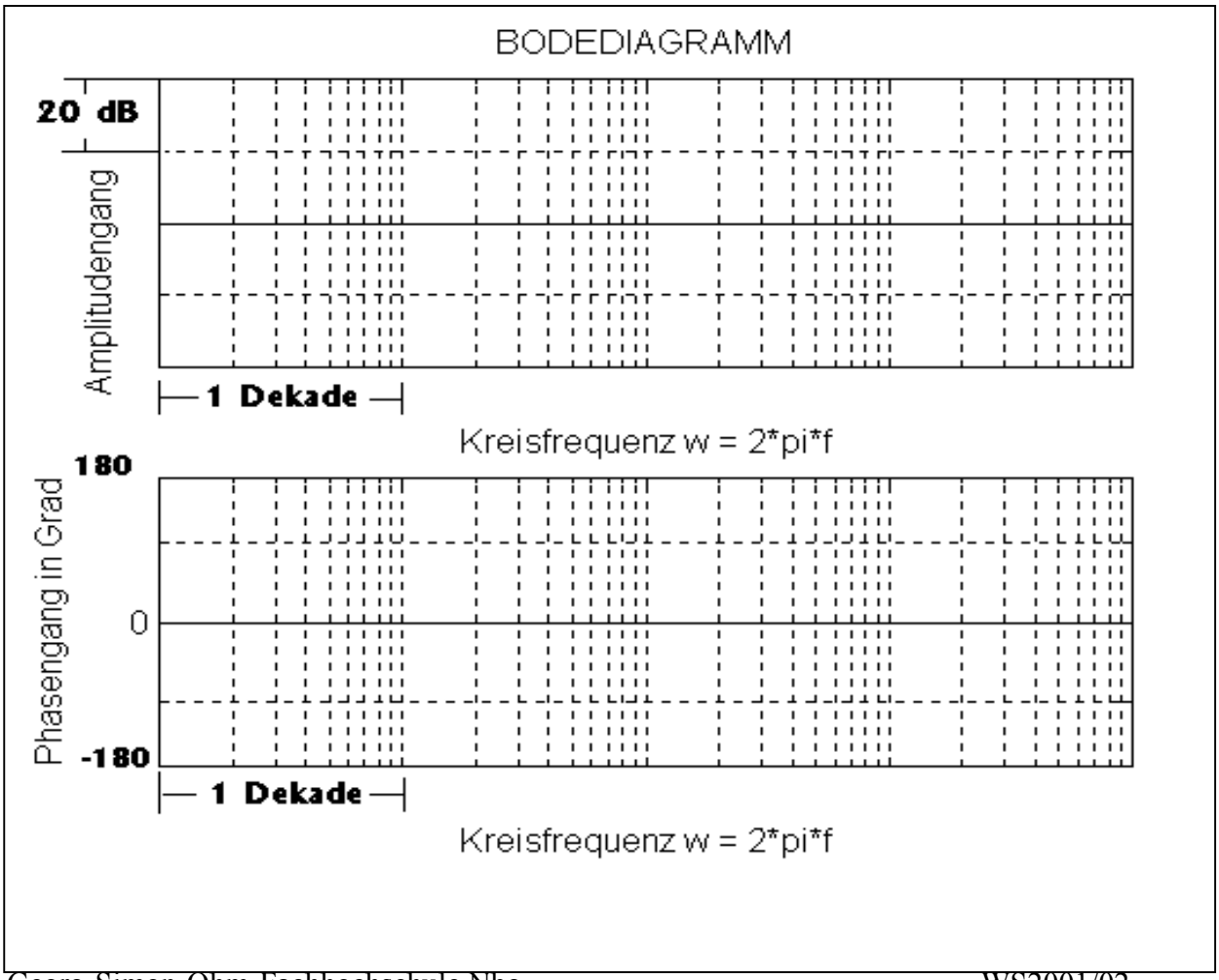
Übergangsfunktion: $h(t) = \left[K_P + K_I \cdot t \right] \cdot \sigma(t) + K_D \cdot \delta(t)$

instabil

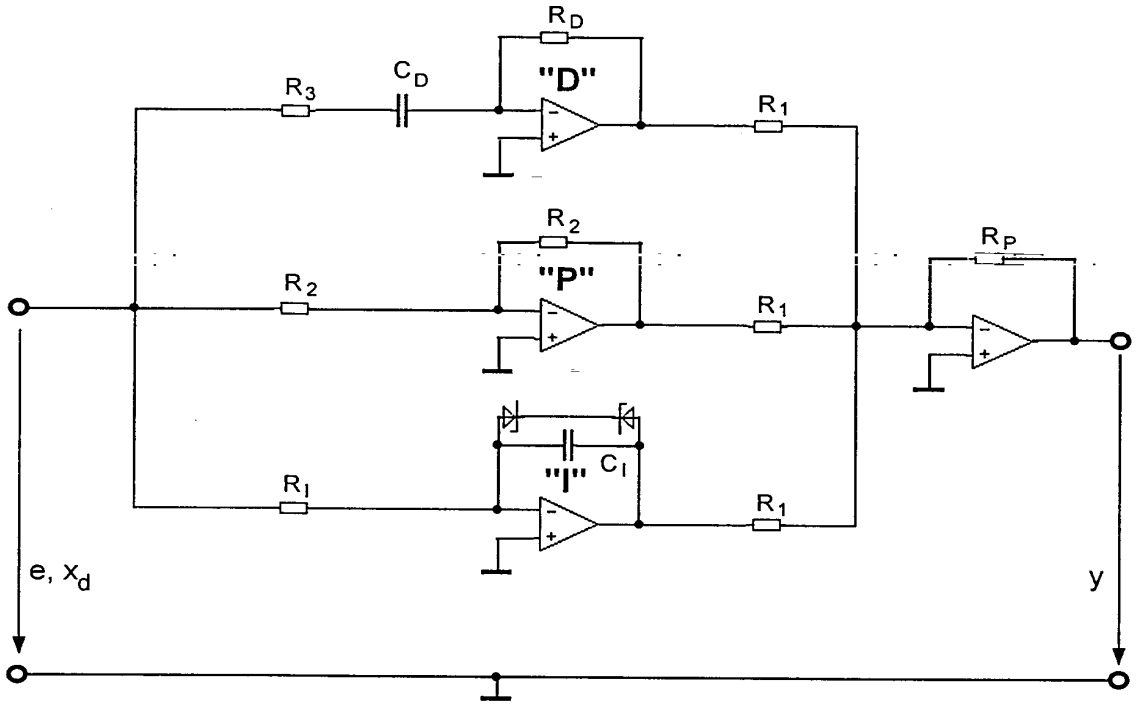
nicht realisierbar

P/N-Plan:

log. FKL'n:



Schaltungstechnische "Realisierung" des PID-Reglers:



$$G_R(s) = \frac{R_P}{R_1} \cdot \left[1 + sC_D R_D + \frac{1}{sR_I C_I} \right] \qquad R_3 = 0$$

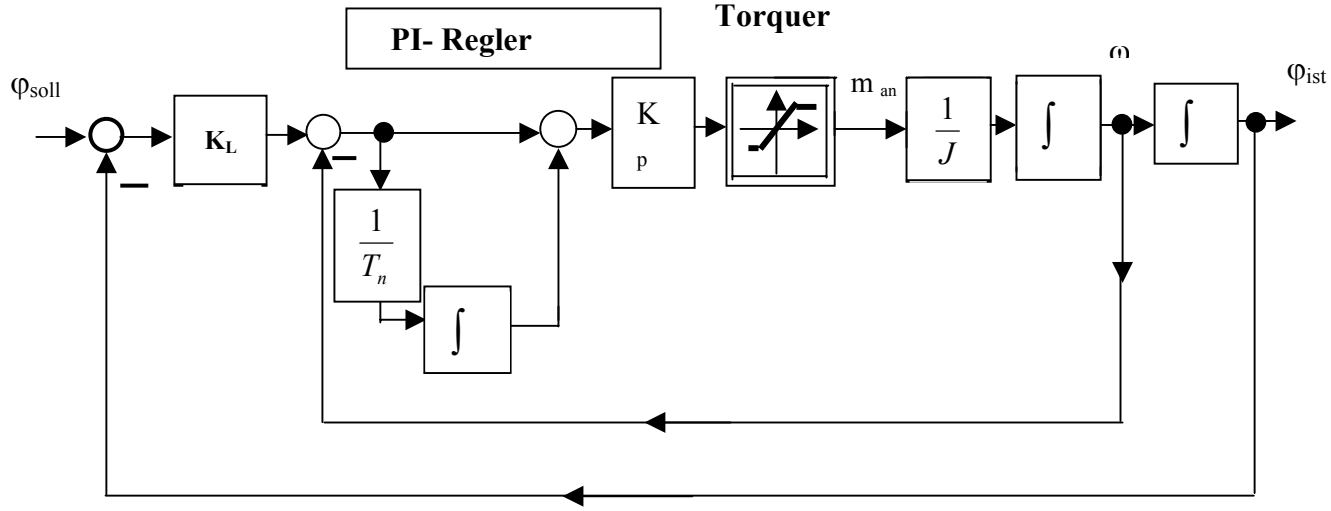
$$G_R(s) = K_P \cdot \left[1 + sT_v + \frac{1}{sT_n} \right]$$

Die beiden antiseriell geschalteten Zenerdioden, parallel zum Kondensator des I-Anteils, sind als Integratorbegrenzung (Anti-Reset-Windup-Schaltung) notwendig: Wenn das dem Regler nachgeschaltete Stellglied eine Stellgrößenbegrenzung hat (und das ist in der Praxis immer der Fall), dann kann es sein, daß der Integrierer sich immer mehr „auflädt" um einen festgestellten Regelfehler schnell auszuregeln, obwohl die dazu notwendige Stellgröße nicht zur Verfügung steht. Aufgrund der tatsächlich vorhandenen Stellgröße dauert es eine gewisse Anregelzeit bis der Istwert nach Führungsgrößensprung bzw. Störgrößensprung wieder erstmals in den Bereich der zulässigen Sollwertabweichung eintritt. Ist dann „v = w" erreicht, dann sollte der I-Anteil nicht weiter versuchen, die Stellgröße zu erhöhen. Da er sich aber über die Dauer der Ausregelzeit aufgeladen hat, wird er gerade das aber tun.
(Vgl. auch Bühler, H..:" Anti-Reset-Windup-Maßnahmen bei stetigen Reglern",
Automatisdierungstechnik 36 (1988) 5, S 190-191.

Von den beiden Zenerdioden ist immer eine im Durchlaß und eine gesperrt. Wird nun „y“ so groß, daß das Stellglied in die Begrenzung steuert , dann sollte die gesperrte Zeneridode „fluten“. Die Kondensatorspanung wird daraufhin auf dem Wert festgehalten, bei dem die Stellgrößenbegrenzung einsetzte.

Wie beeindruckend die Integratorbegrenzung wirkt, soll das nachstehende Beispiel zeigen:

„ Von einem Antriebssystem mit Lageregelung und unterlagerter Geschwindigkeitsregelung ist folgendes Strukturbild gegeben:



Zahlenwerte: $K_L = 55.0$, $Kp = 0.7586$, $Tn = 0.0166$ sec, $J = 0.0031746$ kgm^2

$$m_{an}(t) = \begin{cases} -3.255\,Nm, \; falls \; u(t) \le -3.255 \\ u(t), \; falls \quad |u(t)| \le 3.255 \\ +3.255\,Nm, \; falls \; u(t) > +3.255 \end{cases}$$

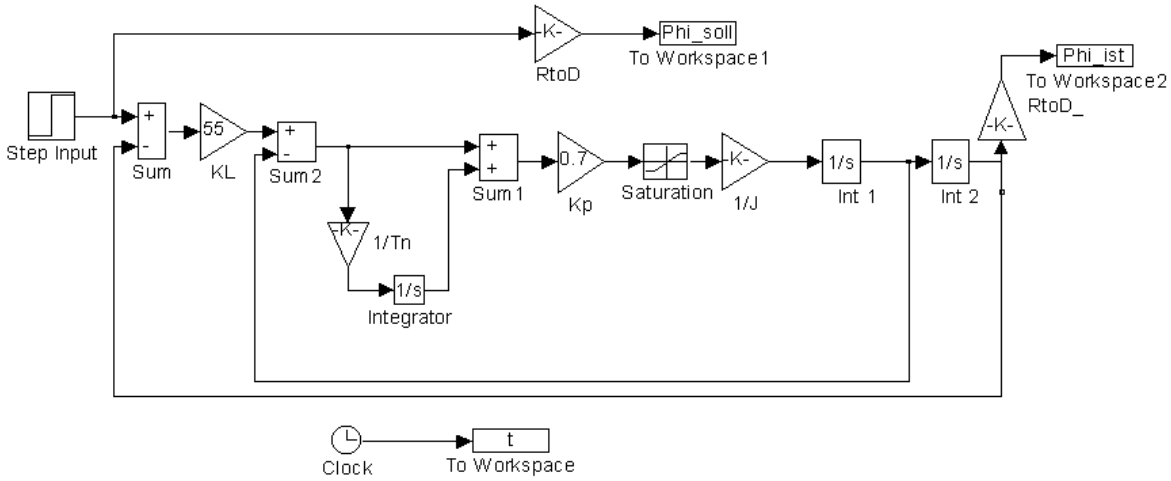
1. Simulieren Sie mit Hilfe von SIMULINK des Zeitverhalten von φ, wenn für φ_{soll} gilt:

$$\varphi_{soll} = \hat{\varphi} \cdot \sigma(t) \qquad \text{und} \qquad \hat{\varphi} = 5°, 30°, 60°$$

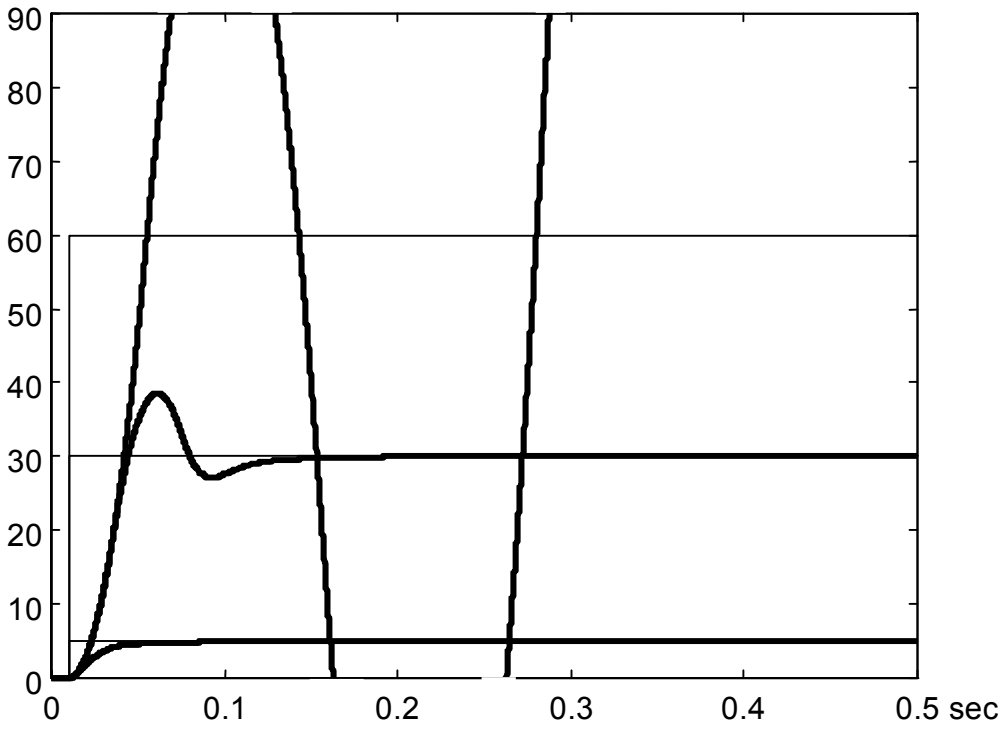
2. durch folgende Zusatzmaßnahme soll nunmehr (mit der ursprünglichen Reglereinstellung) ein stets befriedigendes Übergangsverhalten erreicht werden:
   Wenn das Stellmoment in die Begrenzung geht, dann soll der Integrationsvorgang des PI-Reglers angehalten werden. (Man lege hierzu den Integratoreingang einfach auf „0“). Wenn sich das Moment aus der Begrenzung löst, dann wird der I-Anteil wieder zugeschaltet. Auch hierzu ist das Zeitverhalten zu simulieren.

Ergebnisse:

Einfluß der Stellgrößenbeschränkung ohne gleichzeitige Integratorbegrenzung
Simulink-Simulation:

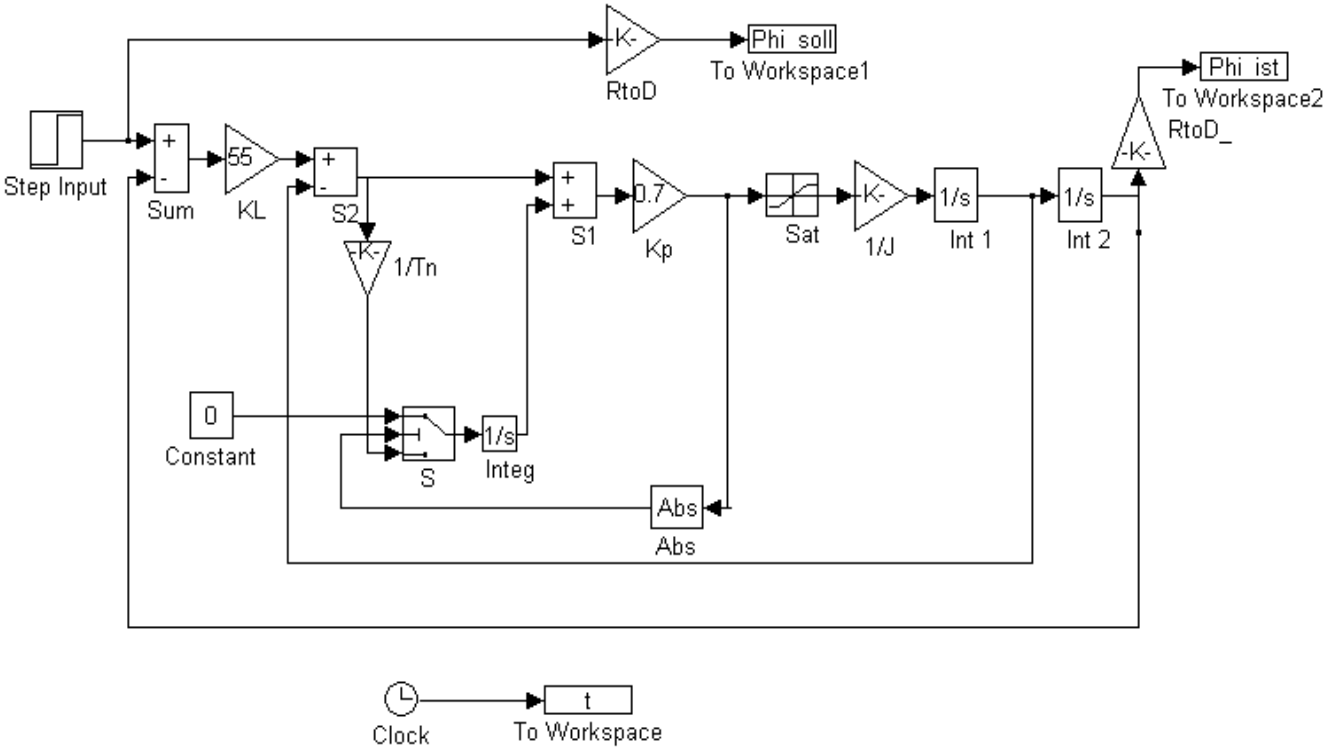


Übergangsfunktionen hierzu:

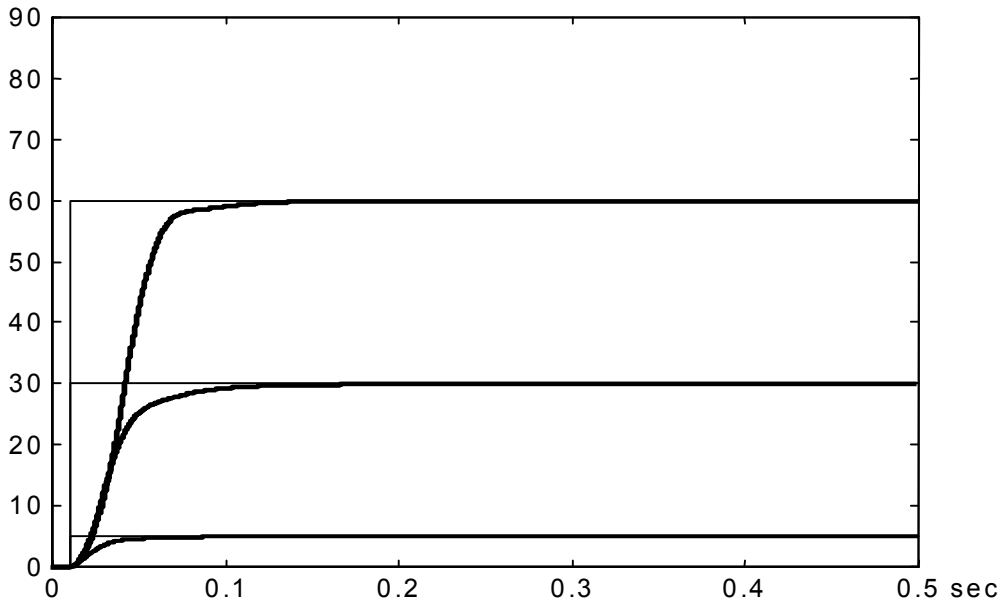


Einfluß der Stellgrößenbeschränkung mit gleichzeitiger Integratorbegrenzung

Simulink-Simulation

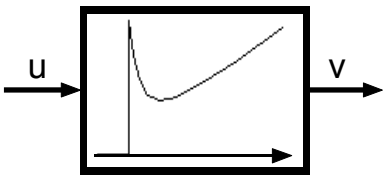


Übergangsfunktionen hierzu:



6.3.8. Das PID-T1-Glied (Der PID-T1-Regler)

< P=...; T n=...; T v =...‡ =...

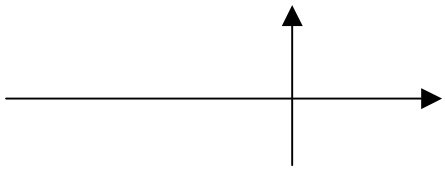


Beschreibung im Zeitbereich: $\tau_1 \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K_P \cdot \left[u(t) + \left(\frac{1}{T_n} \right) \cdot \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau + T_v \cdot \dot{u}(t) \right]$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P \cdot \frac{\left[1 + \frac{1}{sT_n} + sT_v \right]}{1 + s\tau}$

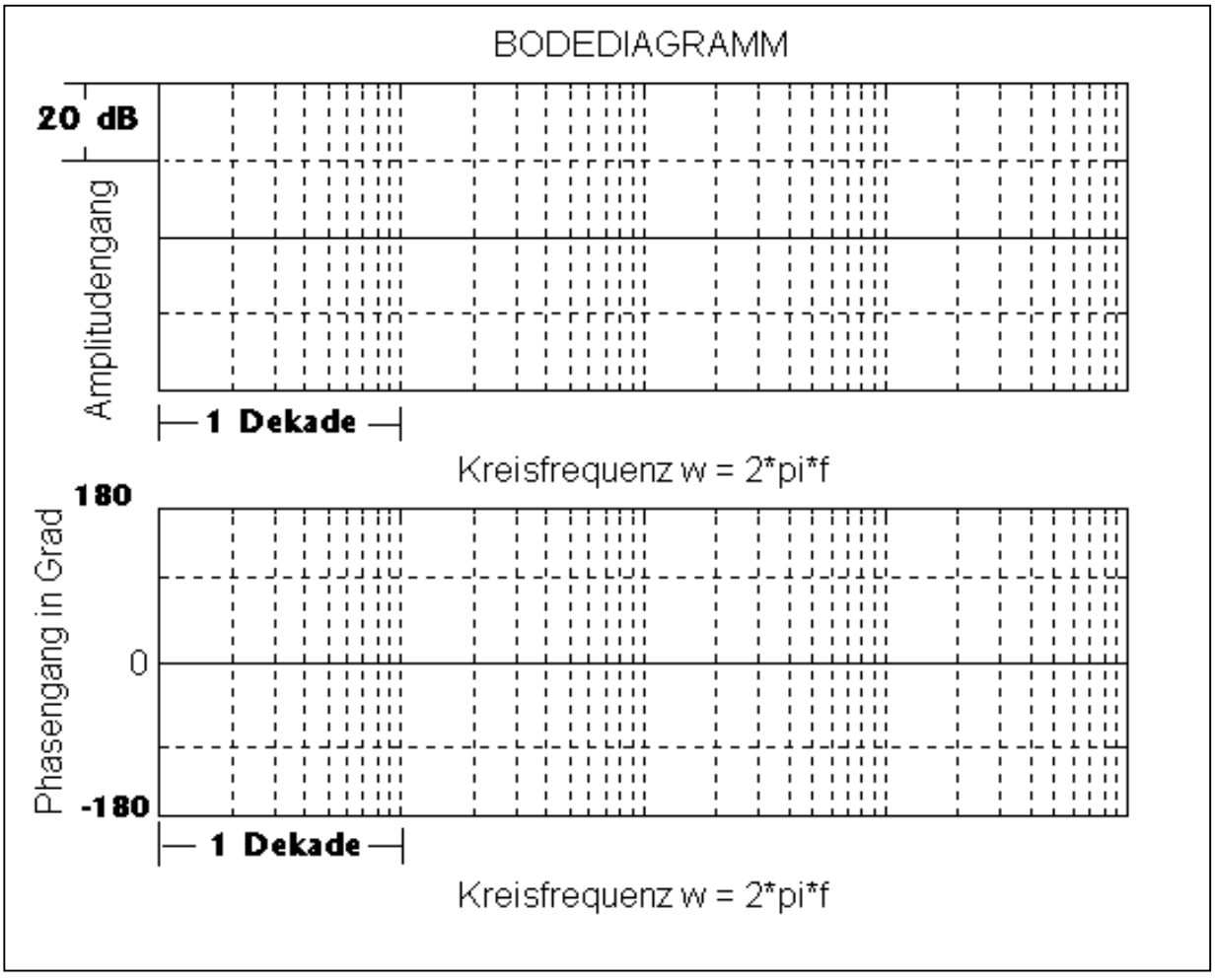
Übergangsfunktion: $h(t) = K_P \cdot \left[1 - \frac{\tau}{T_n} + \frac{t}{T_n} - \left(1 - \frac{\tau}{T_n} - \frac{T_v}{\tau} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \cdot \sigma(t)$

P/N-Plan:

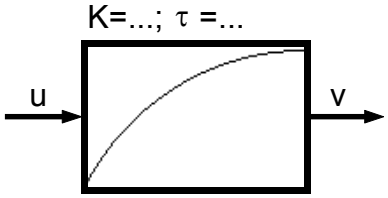


instabil
realisierbar

Log. FKL'n:



6.3.9. Das PT1-Glied (Verzögerungsglied 1.Ordnung)



Beschreibung im Zeitbereich: $\tau \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K \cdot u(t)$

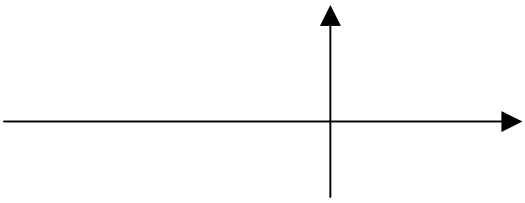
K - Beiwert

τ - Zeitkonstante

Übertragungsfunktion: $G(s) = \dfrac{K}{1 + s\tau}$

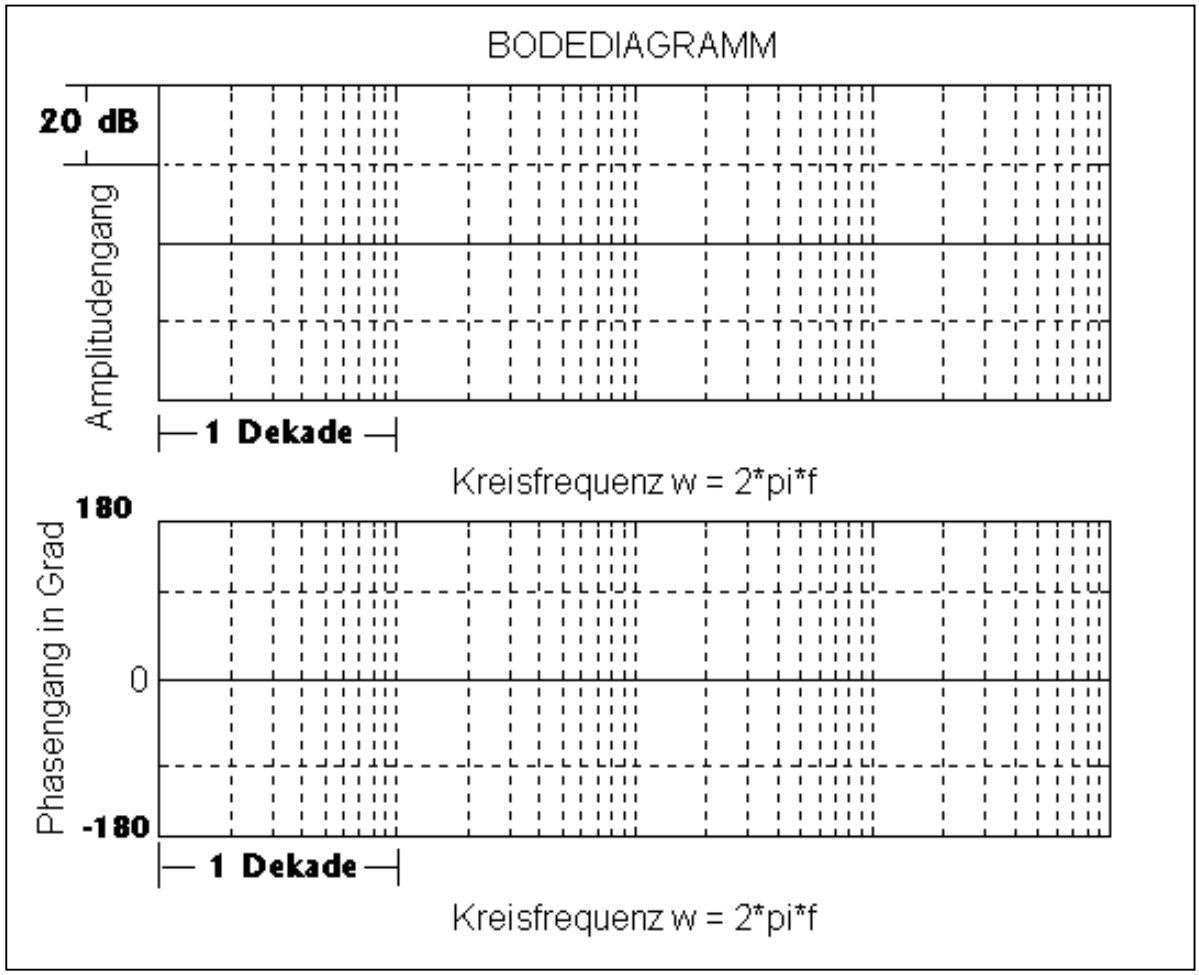
Übergangsfunktion: $h(t) = K \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \cdot \sigma(t)$

P/N-Plan:



stabil
realisierbar

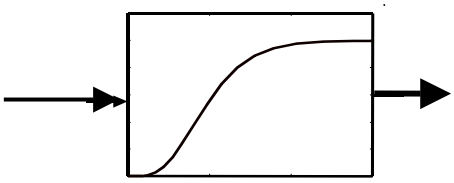
log. FKL'n:



6.3.10. Das PT2-Glied (Verzögerungsglied 2.Ordnung)

6.3.10.1 Das nichtschwingungsfähige PT2-Glied

K = ; τ_1 = ; τ_2 =

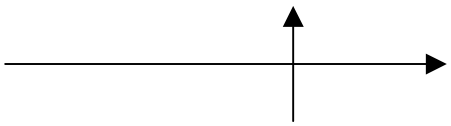


Beschreibung im Zeitbereich: $\tau \cdot_1 \cdot \tau_2 \cdot \ddot{v}(t) + (\tau_1 + \tau_2) \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K \cdot u(t)$

Übertragungsfunktion: $$G(s) = \frac{K}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} = \frac{K}{s^2\tau_1\tau_2 + s(\tau_1+\tau_2)+1}$$

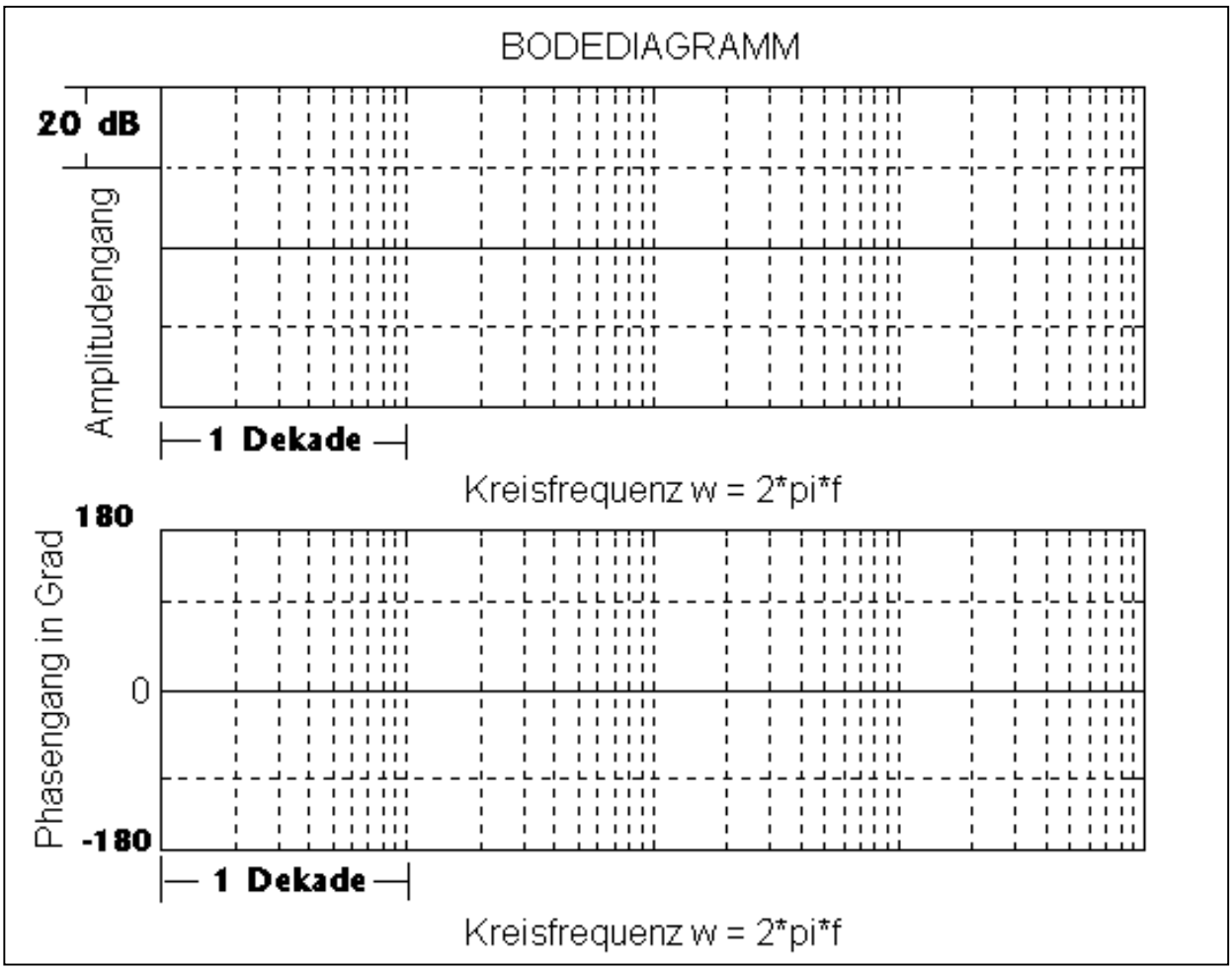
Übergangsfunktion: $$h(t) = K \cdot \left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right] \cdot \sigma(t)$$

P/N-Plan:



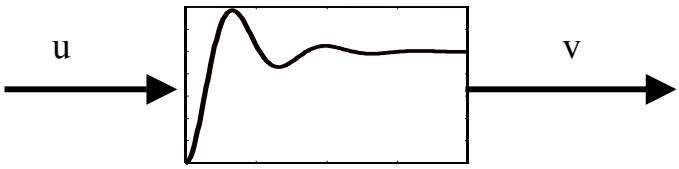
stabil

log. FKL'n:



6.3.10.2 Das schwingungsfähige PT2-Glied

K = ; D = ; τ = ;



Das schwingungsfähige PT2-Glied spielt in der Regelungstechnik eine bedeutende Rolle. Man versucht z.B. Regelsysteme – egal wie „kompliziert“ die Strecke und der Regler sein mögen – immer so zu entwerfen, daß sie sich wie ein schwingungsfähiges PT2-Glied verhalten.

Beschreibungen im Zeitbereich: $$\tau^2 \cdot \ddot{v} + 2 \cdot D \cdot \tau \cdot \dot{v} + v = K \cdot u \qquad \textbf{(6.6)}$$

oder auch $$\ddot{v} + 2 \cdot D \cdot \omega_n \cdot \dot{v} + \omega_n{}^2 \cdot v = \omega_n{}^2 \cdot K \cdot u \qquad \textbf{(6.7)}$$

Man nennt:

τ	-	die Zeitkonstante	[sec]
D (|D| <1)	-	den Dämpfungsfaktor	[ ]
$\omega_n = 1/\tau$	-	die Kreisfrequenz des ungedämpften Systems	[1/sec]
K	-	den Beiwert (oder die Verstärkung)	

Später brauchen wir noch:

$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - D^2}$ die Kreisfrequenz des gedämpften Systems

$\tau_{ab} = \dfrac{1}{D \cdot \omega_n}$ die Abklingzeitkonstante

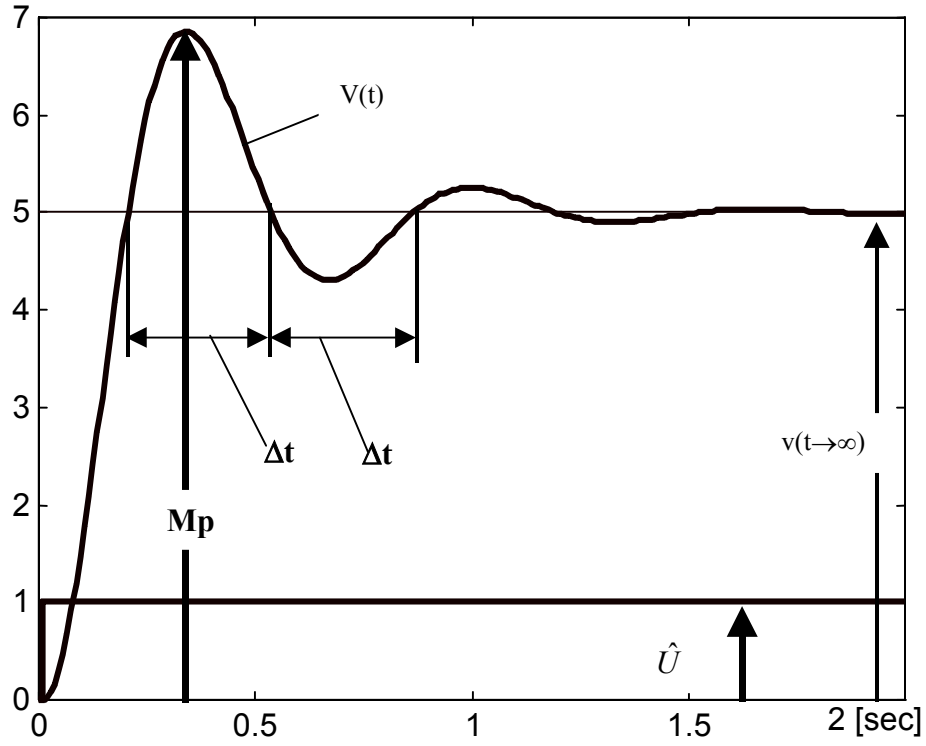
Φ_D - den Dämpfungswinkel [rad oder deg]

Übergangsfunktion:

$$h(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-D \cdot \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \cos(\omega_n \sqrt{1 - D^2} \cdot t - \arcsin(D)) \right) \qquad t \geq 0 \qquad \textbf{(6.8)}$$

oder gleichbedeutend: $$h(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-\frac{t}{\tau_{ab}}}}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \cos(\omega_d \cdot t - \Phi_D) \right) \qquad t \geq 0 \,. \qquad \textbf{(6.9)}$$

Die Kenngrößen K, D, und ω_n können aus einer gemessenen Übergangsfunktion herausgemessen werden:



Man bezeichnet : Mp – den Spitzenwert (Peak-value) der Ausgangsgröße.

und: $\ddot{u} = \dfrac{M_p - v(t \to \infty)}{v(t \to \infty)}$ **(6.10)** den Überschwingfaktor

mit $\ddot{u}_{\%} = \ddot{u} * 100\%$

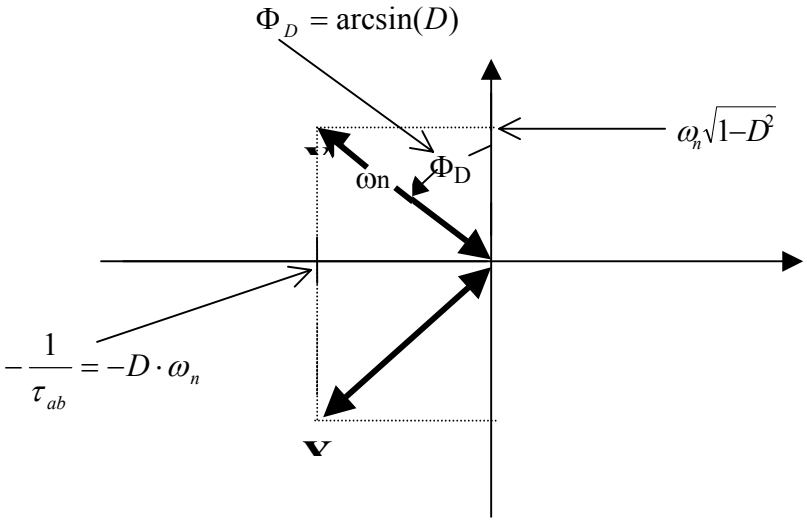
sowie: $K = \dfrac{v(t \to \infty)}{\hat{U}}$ **(6.11)**

der Beiwert bzw. die Verstärkung

Man erhält weiterhin (ohne Herleitung): $D = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\pi}{\ln(\ddot{u})}\right)^2}}$ **(6.12)**

$$\omega_n = \frac{\pi}{\Delta t \cdot \sqrt{1 - D^2}} \quad \textbf{(6.13)}$$

PN-Plan für das schwingungsfähige PT2-Glied:



Sprungantworten für verschiedene D-Werte:

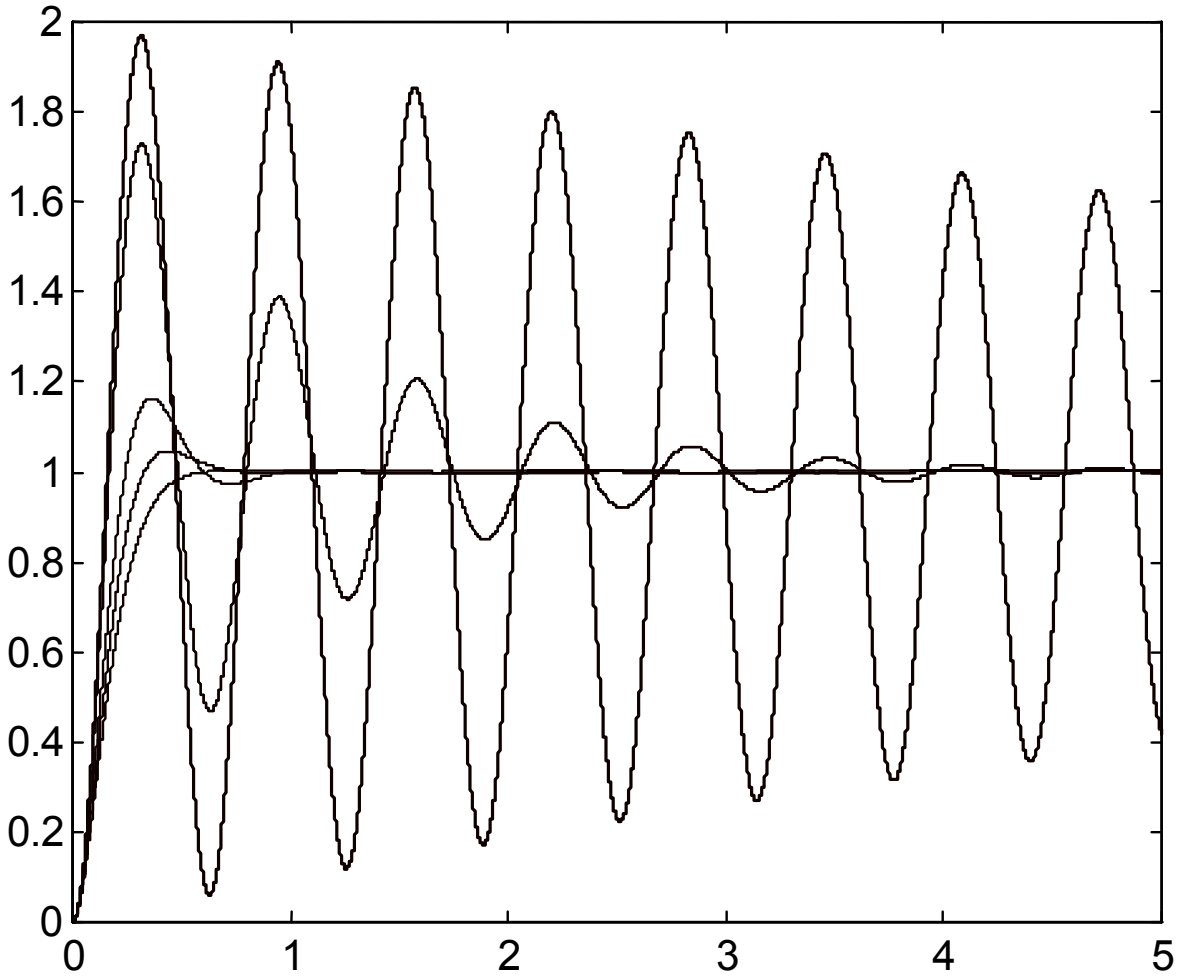
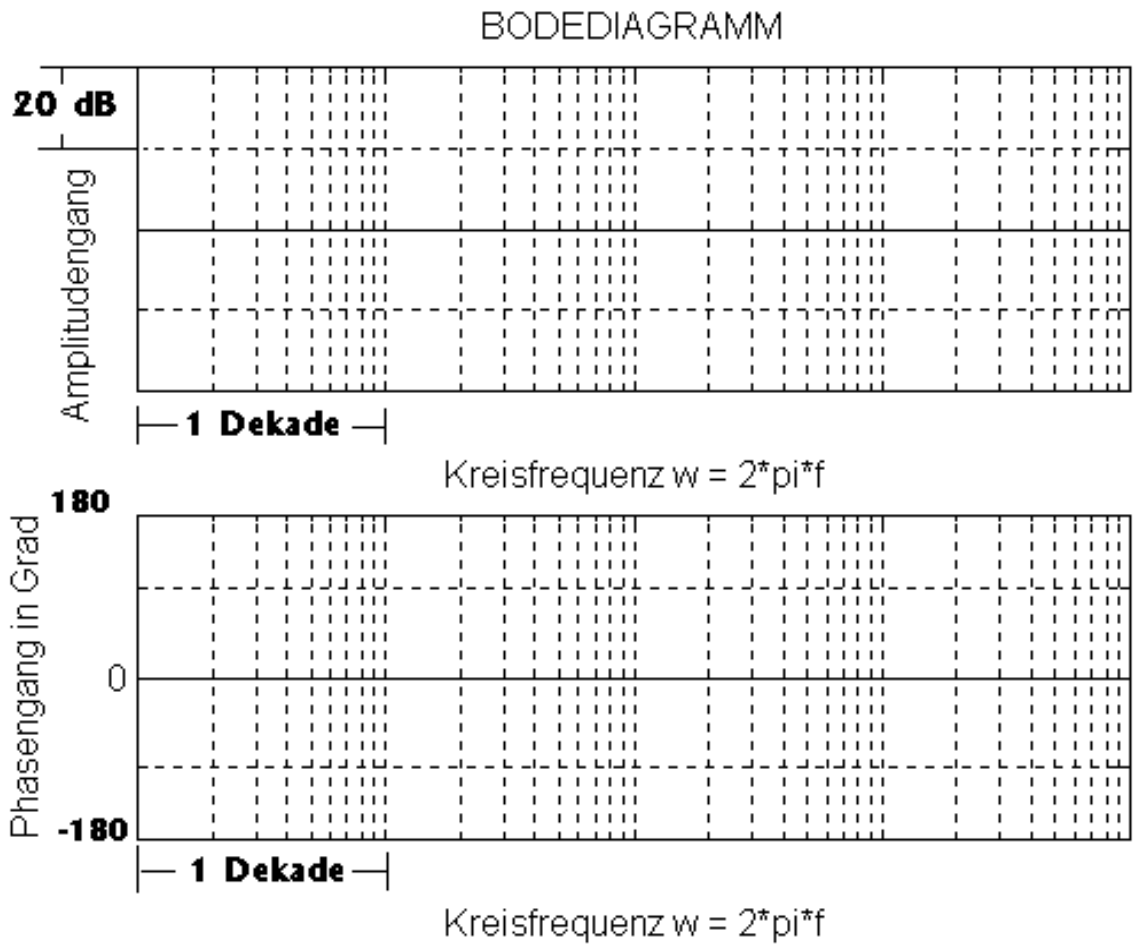


Bild 6.5: Sprungantworten des schwingungsfähigen PT2-Gliedes.
Die Kenngrößen sind K=1; $\omega_n = 10$; D $\in \{0.01; 0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9\}$



Weitere wichtige Zusammenhänge zwischen PN-Plan und Zeitverhalten:

Ausgehend von

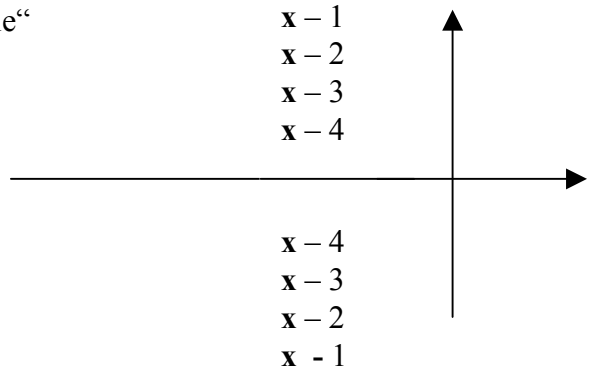
$$G(s) = \frac{\omega_n^{\,2}}{s^2 + 2 \cdot D \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^{\,2}} = \frac{1}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot D \cdot \tau \cdot s + 1} \qquad \textbf{|D| < 1} \qquad \textbf{(6.14)}$$

(zugehöriger PN-Plan wie Seite 37 oben) und den zugehörigen konjugiert komplexen

Polstellen $$s_{\infty 1,2} = -D\omega_n +/- j \cdot \omega_n \sqrt{1 - D^2} \qquad \textbf{(6.15)}$$

kommt man (durch Auswertung der Formeln für h(t)) auf folgende Zusammenhänge:

a) „gleiche Realteile“



„1“ entspr. -1 +/- j64
„2“ entspr. –1 +/-j16
„3“ entspr. –1 +/-j 4
„4“ entspr. –1 +/-j 2

entspricht: „gleiche Abklingzeitkonstante“ $\tau_{ab} = -\frac{1}{D \cdot \omega_n}$ hier im Beispiel: $\tau_{ab} = 1\text{sec}$

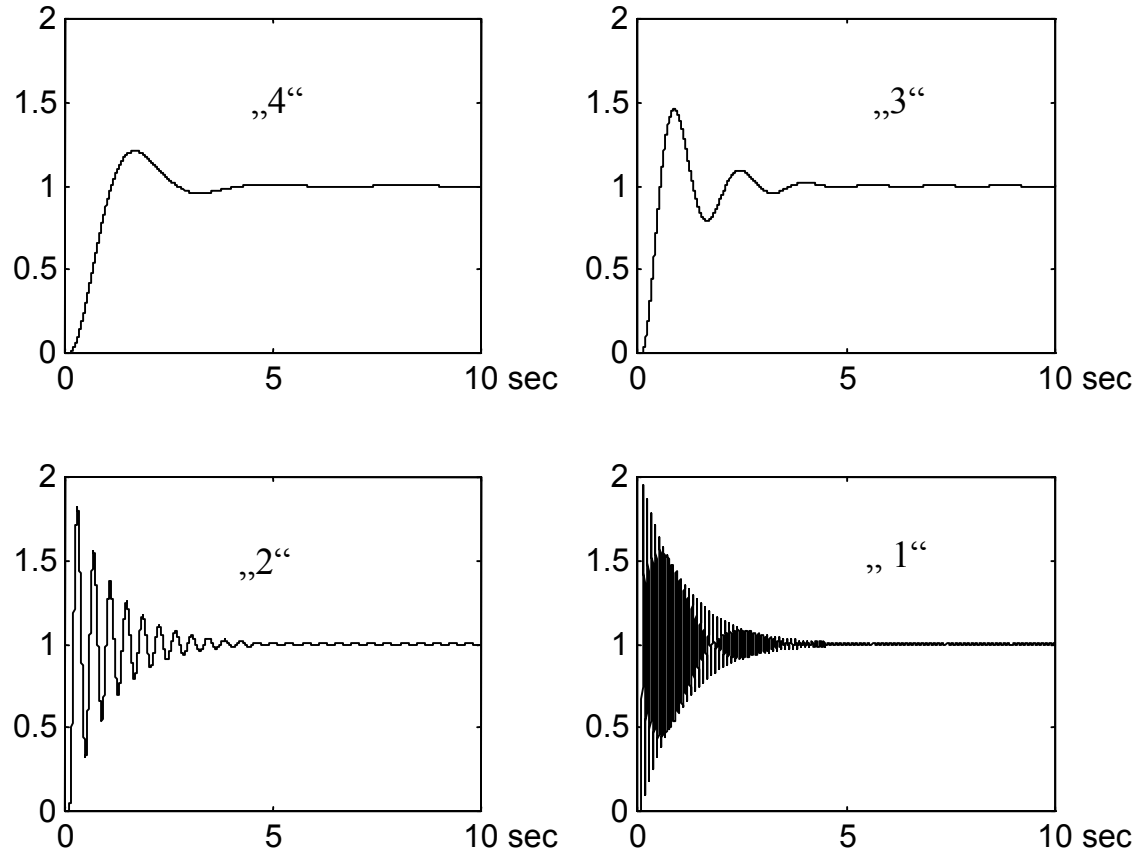
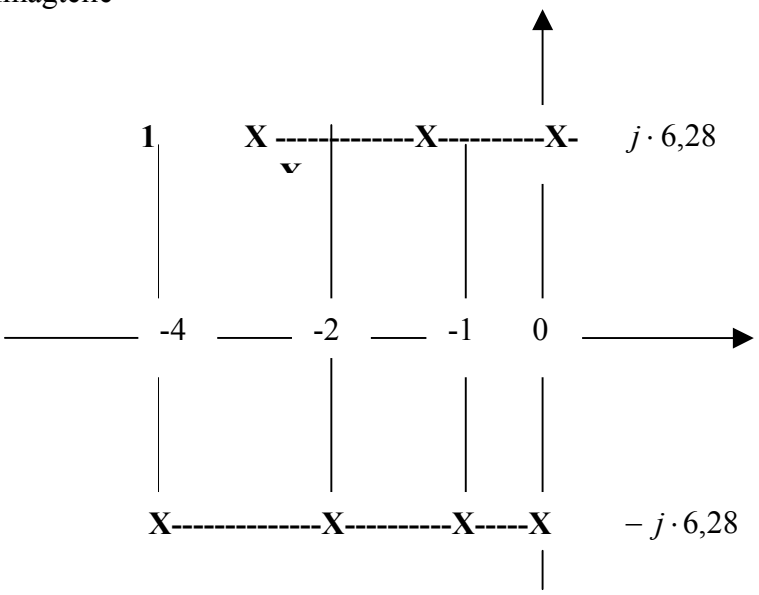


Bild 6.6 „gleiche Realteile“ ⇒“gleiche Abklingzeitkonstante“

b) „gleiche Imagteile“



entspricht: „gleiche Frequenz der in h(t) enthaltenen Schwingung“

$$f_d = \frac{j \cdot 6{,}28}{2 \cdot \pi} \quad \text{bzw. } T_d = 1 \text{ sec}$$

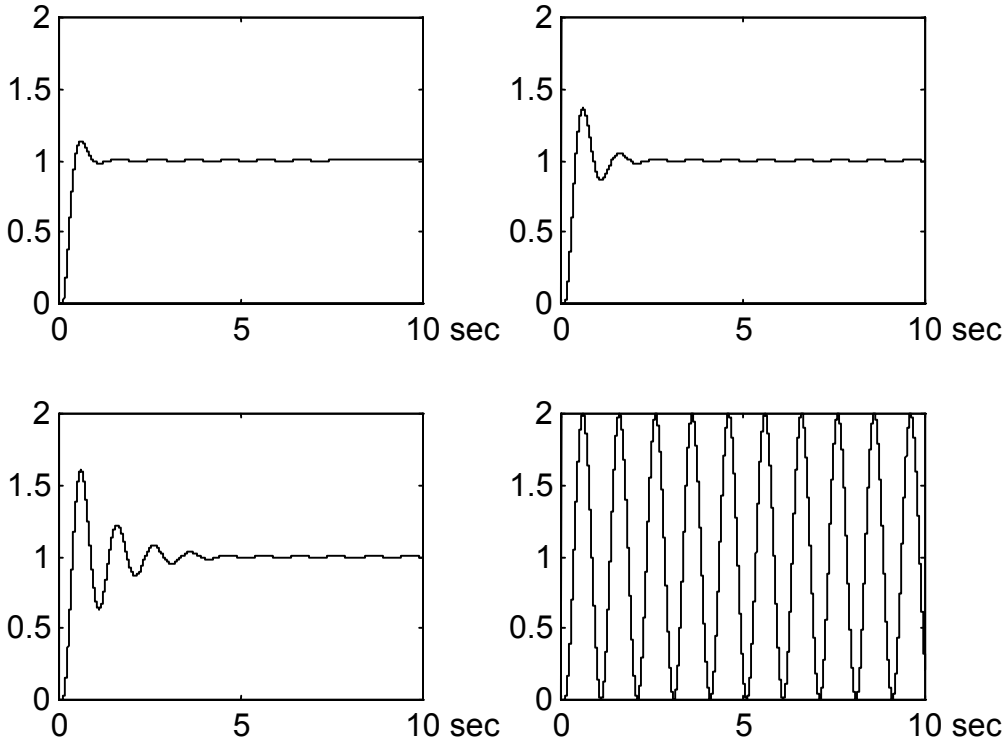
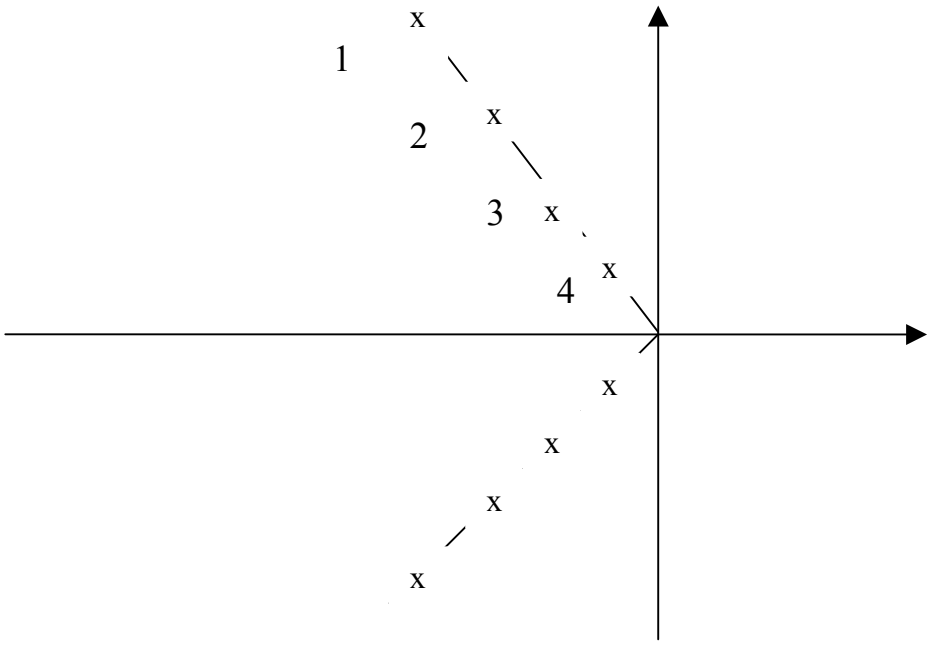


Bild 6.7 „gleiche Imagteile“ ⇒“gleiche Frequenz der gedämpften Schwingung“

c) „gleicher Winkel (Dämpfungswinkel) gegen die Imag-Achse“



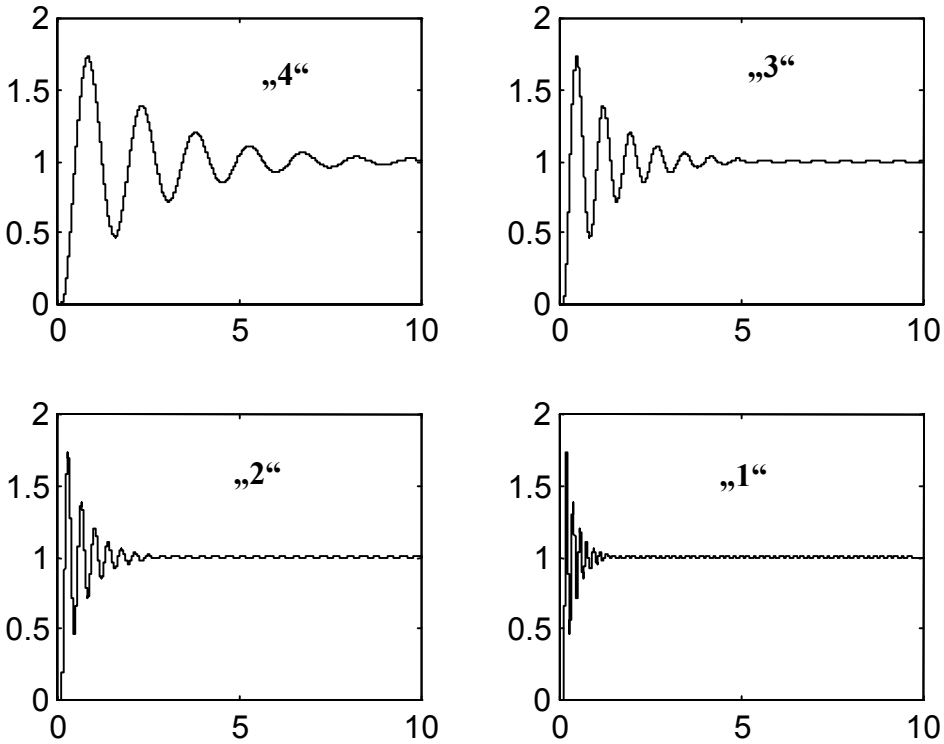


Bild 6.8 „gleiche Winkel gegen die Imagachse“ ⇒“gleicher Überschwingfaktor“
hier D = 0,1⇒ ü =

c) Nochmals: „gleicher Winkel (Dämpfungswinkel) gegen die Imag-Achse“

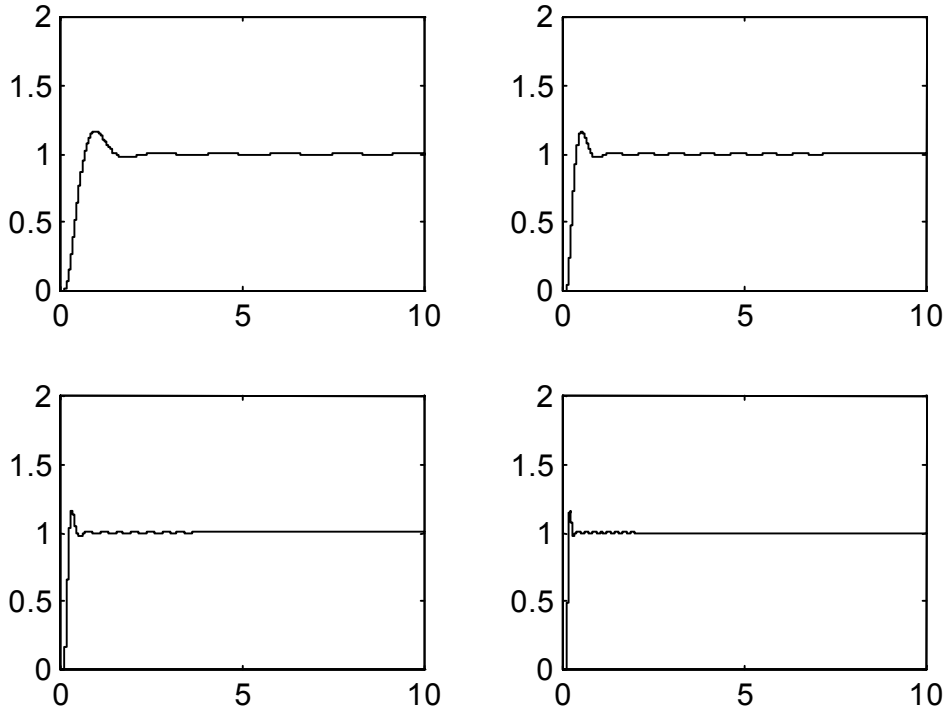


Bild 6.9 „gleiche Winkel gegen die Imagachse“ ⇒“gleicher Überschwingfaktor“
hier D = 0,5 ⇒ ü =

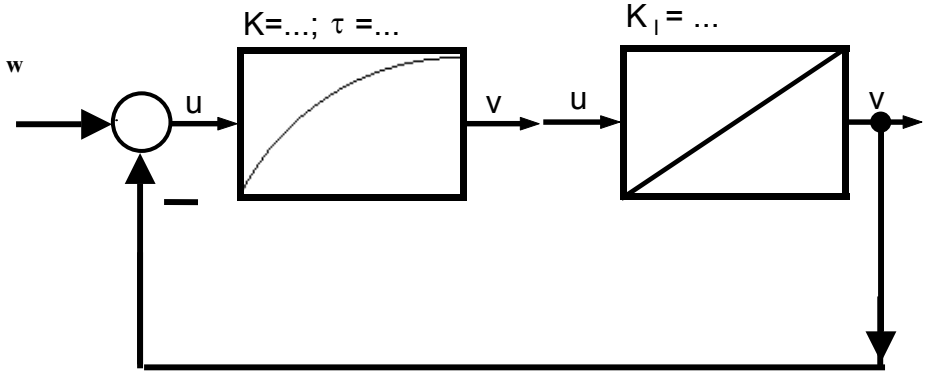
„Die Jugend von heute liebt den Luxus, hat schlechte Manieren und verachtet die Autorität. Sie widersprechen ihren Eltern, legen die Beine übereinander und tyrannisieren ihre Lehrer.“ (Sokrates, 470-399 v.Chr.)

6.3.11. Das schwingungsfähige PT2-Glied, dargestellt durch I-Glied und PT1-Glied

„Eine selbst bescheidene Wahrheit zu finden ist bedeutungsvoller, als über die erhabensten Dinge weitschweifig zu diskutieren, ohne jemals zu einer Wahrheit zu gelangen.“ (Galileo Galilei)

Die nachfolgenden Ausführungen sind entscheidend für das Verständnis der klassischen Regelungstechnik. Leider kann man diese Ausführungen kaum in Lehrbüchern nachlesen. Es wird um gesteigerte Aufmerksamkeit gebeten.

Ausgangspunkt ist die nachstehende Rückkopplungsstruktur:



6.3.11.1 Rechnung:

Ausgehend von $G_W(s) = \dfrac{\dfrac{K}{1+s\tau}\cdot\dfrac{K_I}{s}}{1+\dfrac{K}{1+s\tau}\cdot\dfrac{K_I}{s}} = \dfrac{K\cdot K_I}{s^2\cdot\tau + s + K\cdot K_I} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{s^2}{\dfrac{K\cdot K_I}{\tau}}\right)+\left(\dfrac{s}{K\cdot K_I}\right)+1}$

erhält man nach Koeffizientenvergleich mit $G_W(s) = \dfrac{1}{\dfrac{s^2}{\omega_n^2}+2\cdot D\cdot\dfrac{s}{\omega_n}+1}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K\cdot K_I}{\tau}} \qquad \text{und} \qquad D = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\tau\cdot K\cdot K_I}}.$$

Folgerung : Wenn gilt

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{\tau\cdot K_1\cdot K}} < 1 \quad ,$$ verhält sich das Regelungssystem wie ein schwingungsfähiges PT2-Glied

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{\tau\cdot K_1\cdot K}} > 1 \quad ,$$ verhält sich das Regelungssystem wie ein nicht schwingungsfähiges PT2-Glied

Nicht nur die Rechnung, auch der Gebrauch des Wurzelortskurvenverfahrens zeigt, daß folgende **Regel 1** gilt:

Bei hinreichend hoher Kreisverstärkung (bei unserem Beispiel Ko = Ks*K_I) verhält sich ein I+PT1-Glied nach Rückkopplung wie ein schwingungsfähiges Glied 2. Ordnung. Andernfalls wie ein nichtschwingungsfähiges PT2-Glied .

6.3.11.2 Darstellung mit Hilfe des BODE-Diagramms

„Nicht minder voller Wunder wie die himmlischen Vorgänge selbst, erschienen mir ja die Umstände, unter denen die Menschen zu ihrer Erkenntnis gelangten“ (Johannes Keppler)

Für den praktischen Gebrauch erweist sich die Interpretation der Ergebnisse von 6.3.11.1 im BODE-Diagramm als sehr vorteilhaft.

Zeichnet man sich die Ergebnisse verschiedener Simulationen (zu rückgekoppelten I+PT1-Gliedern) auf, so kommt man auf repräsentative Ergebnisse, wie sie die Bilder 6.10 bis 6.13 zeigen.

Das Ergebnis dieser Simulationen liefert eine Alternative zu Regel1. Wir kommen auf eine entsprechende **Regel 2**:

Besitzt eine Anordnung aus I+ PT1-Glied einen Phasenrand von kleiner 60°, verhält sich das System nach Rückkopplung wie ein schwingungsfähiges PT2-Glied. Andernfalls verhält es sich wie ein nichtschwingungsfähiges PT2-Glied.

Schauen wir uns die zugehörigen Simulationen an:
„Immer mit den einfachsten Beispielen anfangen." (David Hilbert)

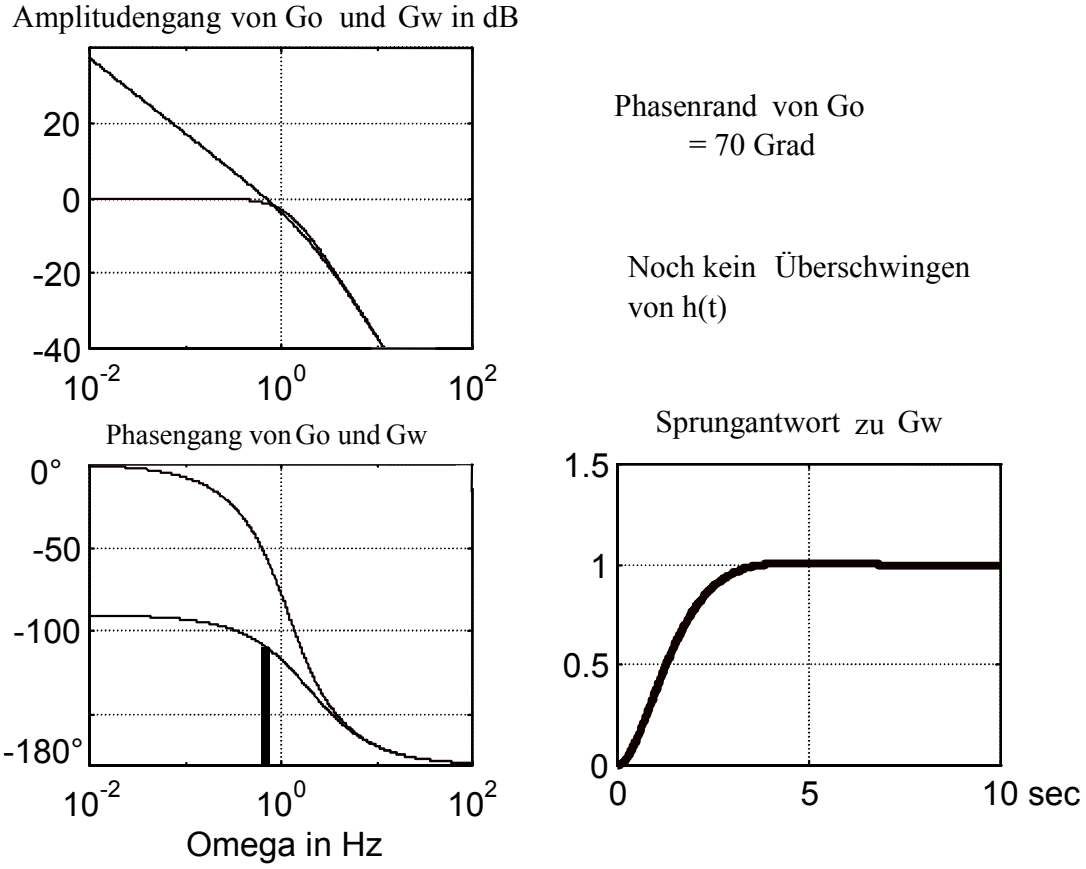


Bild 6.10: *Offene Schleife (= I+PT1), zugehörige Rückkopplung sowie Sprungantwort*

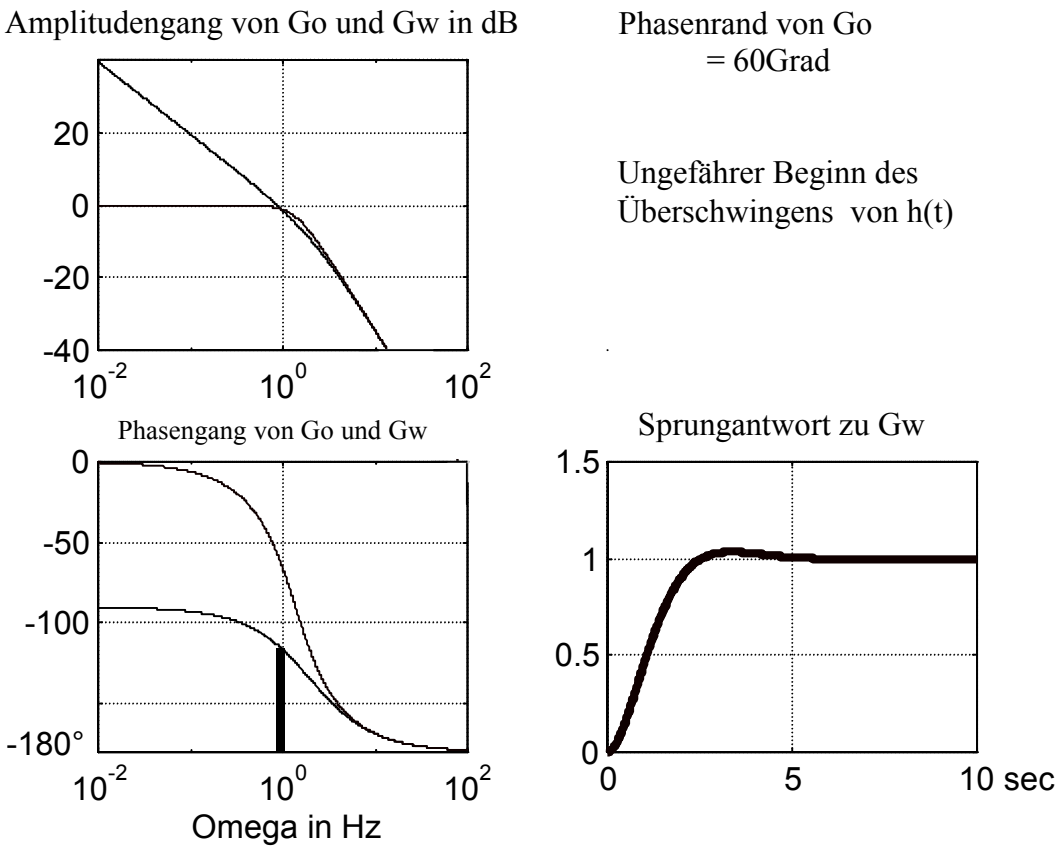


Bild 6.11: *Die Erhöhung der Schleifenverstärkung (von Go) führt auf eine Verringerung des Phasenrandes von Go...*

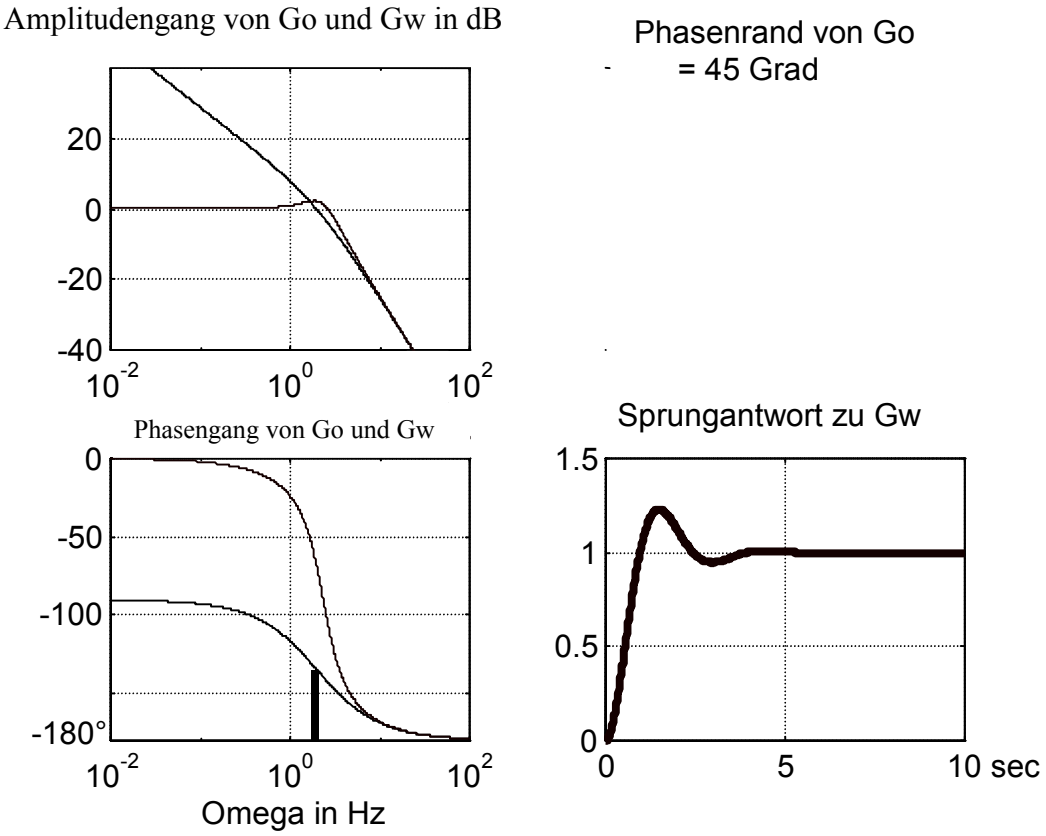


Bild 6.12: *...und damit auf eine Erhöhung des Überschwingens der Übergangsfunktion zu Gw...*

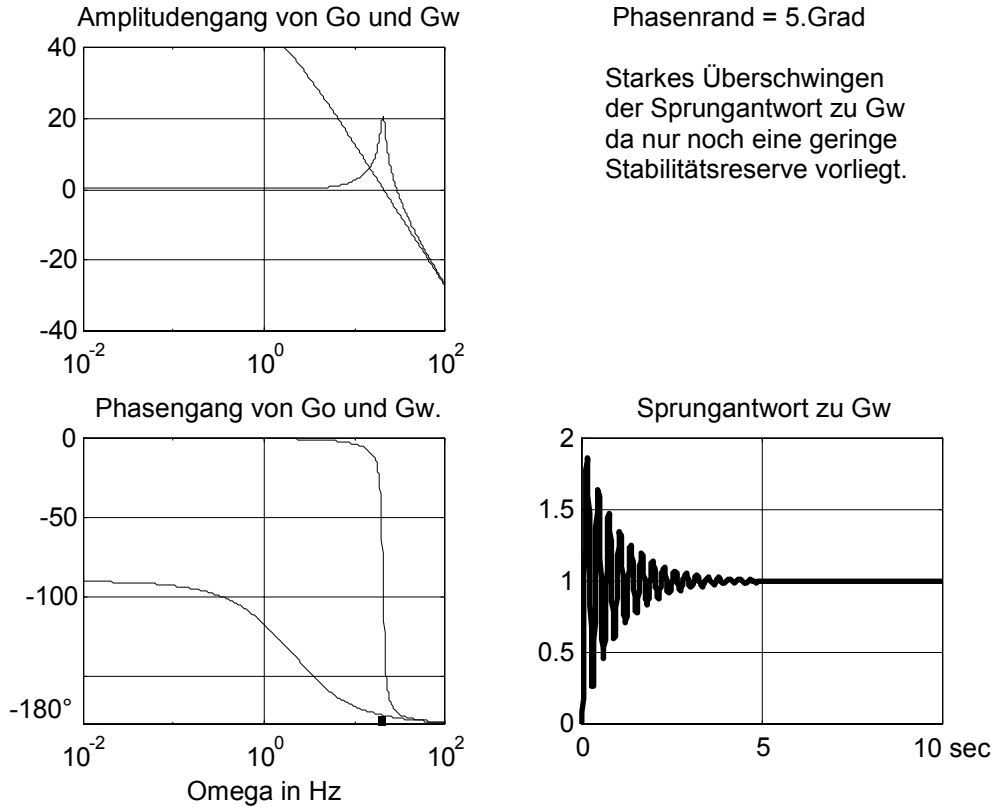
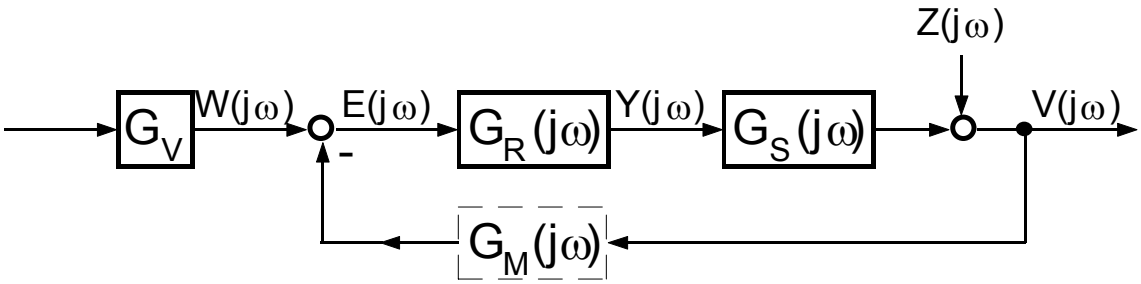


Bild 6.13: *... weil die Stabilitätsreserve (mit Verkleinerung des Phasenrandes) abnimmt.*

6.3.11.3 Wichtige Ungleichungen und die entscheidenden Folgerungen.

„In diesem Zeitalter des Überflusses, wo die Fließbänder der sozialisierten militärisch-industriellen Gesellschaft synthetisches Manna auf den Faulen und den Fleißigen, auf den Tölpel und das Genie herabregnen lassen, wird die Gelehrsamkeit nicht untergehen.“ (Clifford A.Truesdell)

Wir gehen aus von der nachstehenden Struktur



$$G_O(j\omega) = G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega) \cdot \left(G_M(j\omega)\right)$$

und setzen $G_v(s) = G_M(s) = 1$ sowie Z = 0.

Es gelten folgende wichtige Grobabschätzungen:

a) für diejenigen ω-Werte, wo $|G_O(j\omega)| >> 1$ gilt: $G_W(j\omega) \approx 1$

b) für diejenigen ω-Werte, wo $|G_O(j\omega)| << 1$ gilt: $G_W(j\omega) \approx G_O(j\omega)$

c) für diejenigen ω-Werte, wo $|G_O(j\omega)| \approx 1$ gilt: $G_O(j\omega) \approx ?$

Die Grobabschätzungen und ihre graphischen Interpretationen legen folgenden Sachverhalt nahe:

Das Zeitverhalten des (rückgekoppelten) Regelkreises hängt entscheidend vom Verlauf des Frequenzgangs der offenen Regelschleife in der Umgebung des Durchtretens durch den Einheitskreis
(bzw. beim BODE-Diagramm: durch die 0dB-Achse) ab.

Die erste entscheidende Folgerung lautet also:

Wenn die Ortskurven der Frequenzgänge von zwei (völlig voneinander verschiedenen) offenen Regelschleifen in der Umgebung des Durchtretens durch den Einheitskreis aufeinanderliegen und dort auch noch dieselbe Frequenzbezifferung tragen, dann haben die beiden Systeme nach Rückkopplung praktisch dasselbe Zeitverhalten.

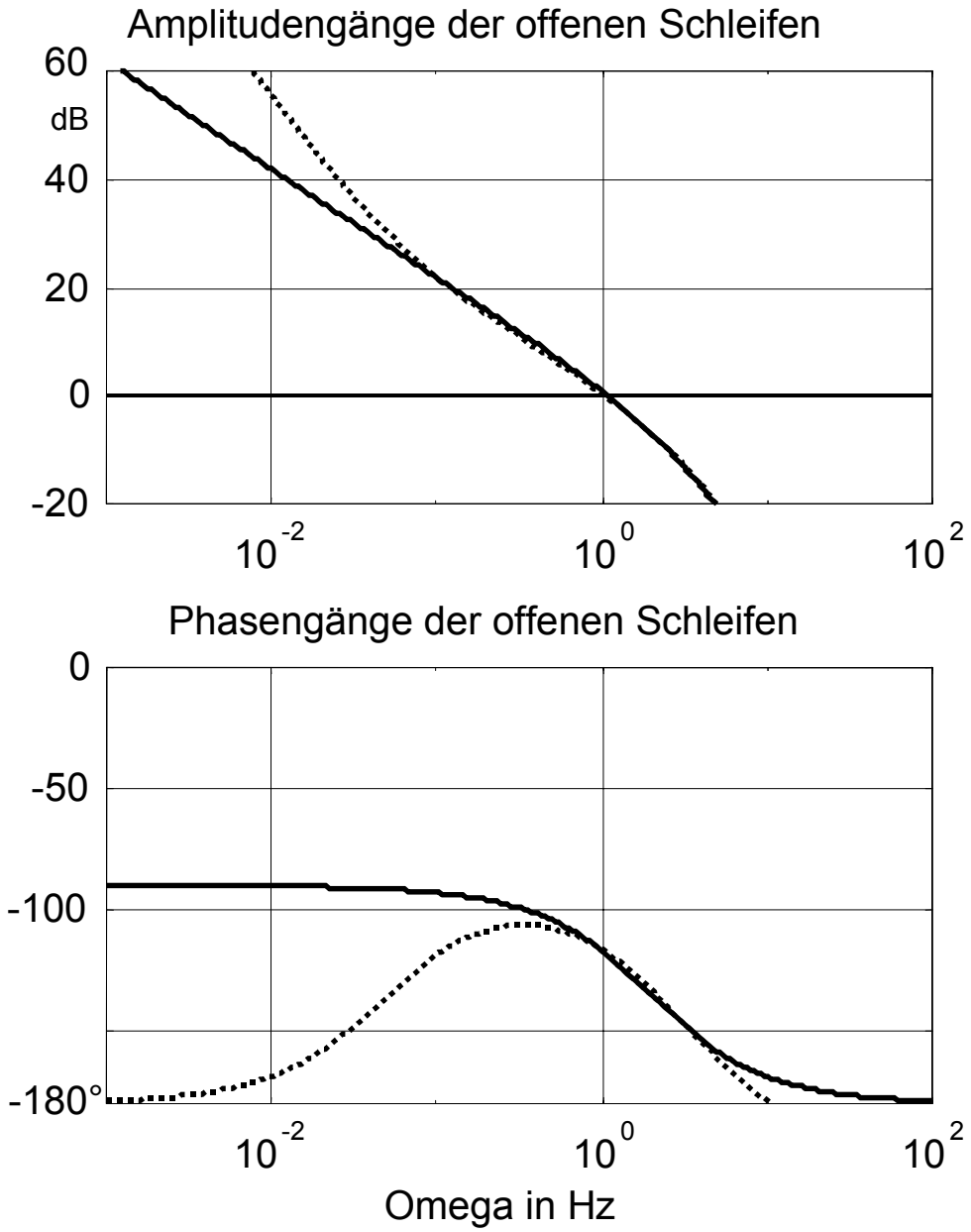
Alternativ: Wenn die BODE-Diagramme, also sowohl Amplituden- wie Phasengänge, von zwei (völlig voneinander verschiedenen) offenen Regelschleifen in der Umgebung des Durchtretens durch die 0-dB-Achse aufeinanderliegen, dann haben die beiden Systeme nach Rückkopplung dasselbe Zeitverhalten.

Ein kurzes Rechenbeispiel soll das soeben gesagte verdeutlichen: Wir betrachten die folgenden beiden offenen Regelschleifen – ausgedrückt durch deren Übertragungsfunktionen:

Zwei völlig voneinander verschiedene Übertragungsfunktionen offener Regelschleifen sind z.B.:

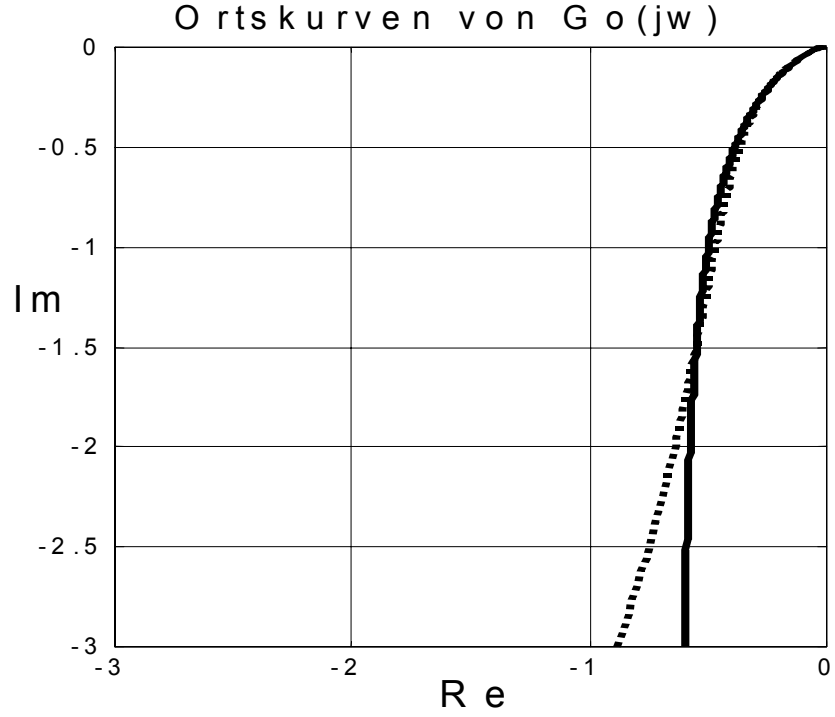
$$G_{O1}(s) = \frac{5}{s^2 + 2 \cdot s} \; und \; G_{O2}(s) = \frac{300 \cdot s^2 + 465 \cdot s + 22{,}5}{s^5 + 53{,}8 \cdot s^4 + 193{,}6 \cdot s^3 + 180 \cdot s^2}$$

Schauen wir uns einmal die BODE-Diagramme von G_{O1} und G_{O2} an:

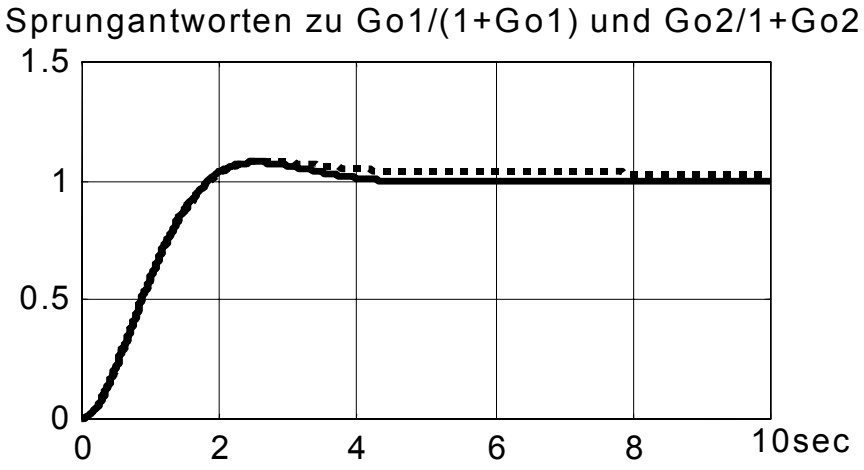


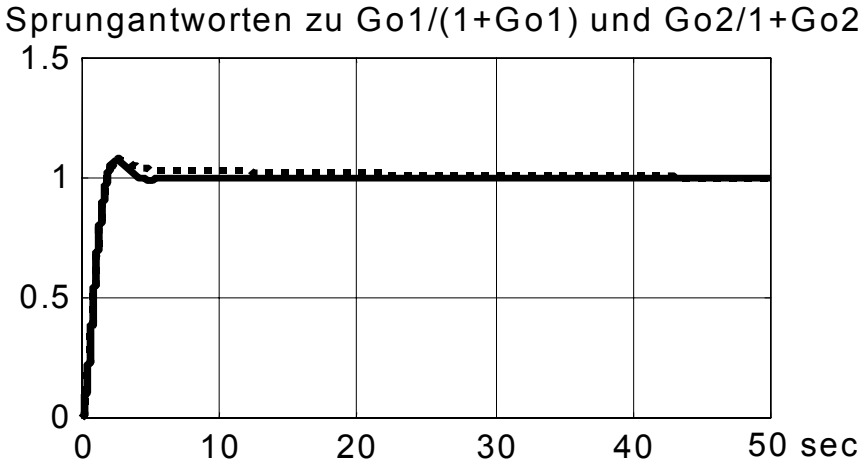
Die Ortskurven von G_{O1} und G_{O2} müßten also in der Umgebung des Durchtretens durch den Einheitskreis aufeinanderliegen.

Das bestätigt die nachstehende Skizze:



Aufeinanderliegen müssen dann auch die Zeitverläufe – z.B. die Übergangsfunktionen:





Die zweite entscheidende Folgerung lautet also:

Wenn sich die Ortskurve des Frequenzgangs einer (beliebig „komplizierten“ d.h. auch von beliebig hoher Ordnung) offenen Regelschleife in der Umgebung des Durchtretens durch den Einheitskreis wie ein I+PT1-Glied verhält, dann verhält sich das System nach Rückkopplung wie ein schwingungsfähiges PT2-Glied.

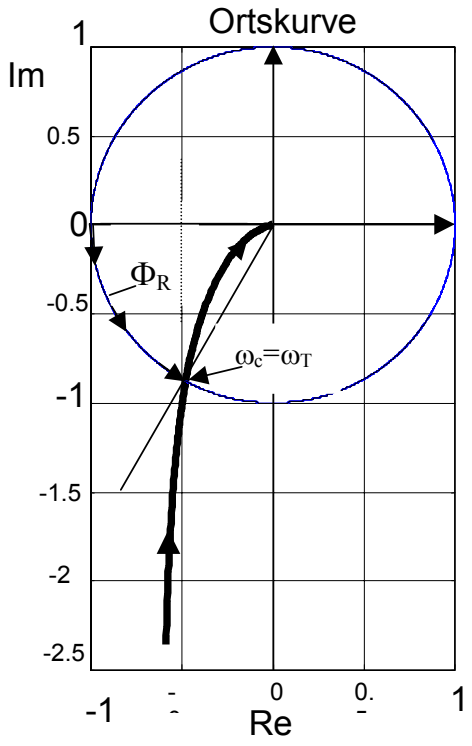
Alternativ: Wenn das BODE-Diagramm einer (beliebig „komplizierten“ d.h. auch von beliebiger Ordnung) offenen Regelschleife in der Umgebung des Durchtretens durch die 0-dB-Achse (also in der Umgebung der Transitkreisfrequenz) dort ein Gefälle von –20dB/Dek bis –40dB/Dek aufweist und wenn dabei der Phasengang fällt mit einem Phasenrand zwischen 0° und 60°, dann verhält sich das System nach Rückkopplung wie ein schwingungsfähiges PT2-Gleid.

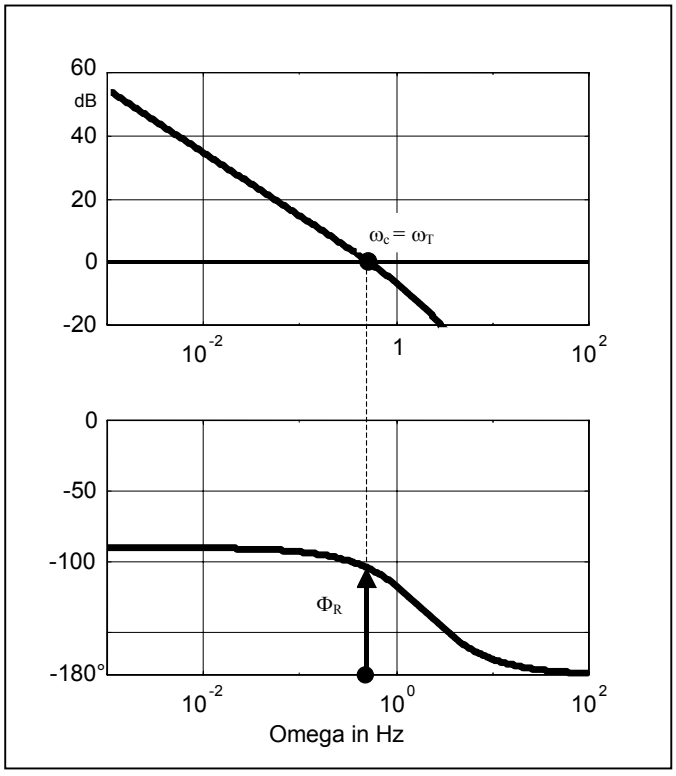
Zur Kennzeichnung des Verlaufs von $G_O\ (j\omega)$ in dieser Umgebung bedient man sich folgender - nun schon hinlänglich bekannter - Kenngrößen:

- Phasenrand Φ_r
- Durchtrittsfrequenz ω_c (Transitfrequenz ω_T)
- Schleifenverstärkung V

Diese Größen sind zur Wiederholung nachstehend in die beiden Skizzen eingetragen:

in der Ortkurvendarstellung von Go ... und einmal im BODE-Diagramm von Go





Unter Verwendung der obigen Kenngrößen kommen wir auf eine ganz allgemeine Entwurfsrichtiline für die Reglersynthese:

Wenn man eine Regelstrecke allein rückkoppelt, dann liegt das Zeitverhalten der rückgekoppelten Strecke offenbar von deren Durchtrittsfrequenz $\omega_c = \omega_T$ und Phasenrand Φ_r ab. Ist man mit dem Zeitverhalten dieses so rückgekoppelten Systems nicht zufrieden, so trenne man den Kreis wieder auf und schalte zusätzliche Übertragungsglieder vor die Strecke. Diese sollen den Frequenzgang von $G_S\ (j\omega)$ so "verbiegen", daß man eine "günstigere Durchtrittsfrequenz" und einen "günstigeren Phasenrand" hat.
"Günstiger" meint, daß man am Ende ein verbessertes Zeitverhalten des neu entstandenen geschlossenen Regelkreises erhält.

Übertragungssysteme, die man vor die Regelstrecke schaltet und die den Frequenzgang der offenen Schleife in geeigneter Weise verbiegen, nennt man Regler.

Mit einzelnen Reglern (und allgemeinen Regelkreisgliedern) beschäftigt sich der Abschnitt 6.3.

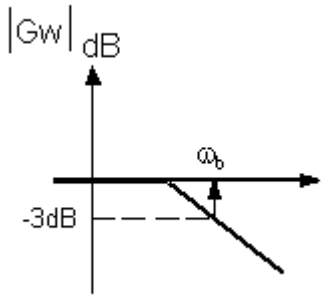
„Die Gelehrten sind die, welche in den Büchern gelesen haben. Die Denker, die Genies, die Welterleuchter und Förderer des Menschengeschlechtes sind aber die, welche unmittelbar im Buche der Welt gelesen haben" (Arthur Schopenhauer).

6.4. Formulierung der allgemeinen Forderungen an einen Regelkreis durch Frequenzgänge (man vergleiche mit Kapitel 1.3)

Gutes Folgeverhalten (**ideal** v(t) = w(t) für alle t)

$\Rightarrow$ für $G_W(j\omega)$ bedeutet das: $G_W(j\omega) = 1$ für alle ω

real: $G_W(j\omega) = 1$ für einen möglichst großen Frequenzbereich, entsprechend "ω_b groß", wenigstens aber sollte $G_W(0) = 1$ sein.



$$G_W(0) = 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} v(t) = \hat{w}, \text{ wenn } w(t) = \hat{w}\cdot\sigma(t)$$

Man sagt: "Der *stationäre Lagefehler* ist 0"

Nachweis:

$$V(s) = G_W(s)\cdot W(s), \text{ falls } w(t) = \hat{w}\cdot\sigma(t) \text{ entsprechend } W(s) = \frac{\hat{w}}{s}$$

$$\text{gilt}: \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot V(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot G_W(s)\cdot\frac{\hat{w}}{s} = G_W(0)\cdot\hat{w}$$

$G_W(j\omega) \overset{!}{=} 1$ für möglichst hohe Frequenzen ($\omega = 0 \ldots \omega_b$)

führt auf den Reglerentwurf nach dem *Betragsoptimum*

Reglerentwurf nach dem Betragsoptimum:
gutes Folgeverhalten, aber kein so gutes Störverhalten

$\Rightarrow$ für $G_O(j\omega)$ bedeutet das: $|G_O(j\omega)| \to \infty \forall\omega$

klar, da aus $G_W(j\omega) = \frac{G_O(j\omega)}{1+G_O(j\omega)}$; $G_O(j\omega) = \frac{G_W(j\omega)}{1-G_W(j\omega)}$ folgt!

real: $G_O(j\omega) \to \infty$ für einen möglichst großen Frequenzbereich, entsprechend "ω_c groß", wenigstens aber sollte $|G_O(0)| = \infty$ sein.

So einen Fall zeigt die nachstehende Skizze

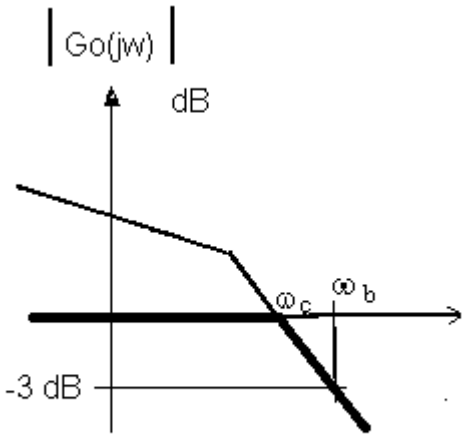
In der nebenstehenden Skizze
Ist Go(jw) dünn und Gw(jw)
dick eingezeichnet.

ω_c – Durchtrittskreisfrequenz
(= Transitkreisfrequenz)
der offenen Regelschleife

ω_b – Bandbreitenkreisfrequenz
des geschlossenen
Kreises

Es gilt (als Faustformel)

$$\frac{\omega_b}{\omega_c} \approx 1{,}6$$



Dann ist der stationäre Lagefehler = 0; falls nicht schon für die Strecke gilt: $|G_s(0)| = \infty$,
so verwende man einen I, PI, PID oder PID-T_1-Regler.

Andere Betrachtungen bilden den Ausgangspunkt für den Reglerentwurf nach dem *Symmetrischen Optimum*. Hier versucht man die Frequenzkennlinien der offenen Schleife (mit Unterstützung eines Reglers) so zu verbiegen, daß in der Umgebung des Durchtretens durch die 0dB-Achse ein Amplitudengefälle von –20dB/Dekade bis –40dB/Dekade zustande kommt.

Reglerentwurf nach dem Symmetrischen Optimum:
gutes Störverhalten, aber kein so gutes Folgeverhalten

Eine weitere Grundforderung an einen Regelkreis lautete:

Gutes Störunterdrückung (**ideal** v(t) = unabhängig von z(t) für alle t)
$\Rightarrow$ für $G_z(j\omega)$ bedeutet das: $G_z(j\omega) = 0$ für alle ω

real: $G_z(j\omega) = 0$ für einen möglichst großen Frequenzbereich, entsprechend "ω_b groß",
wenigstens aber sollte $G_z(0) = 1$ sein.

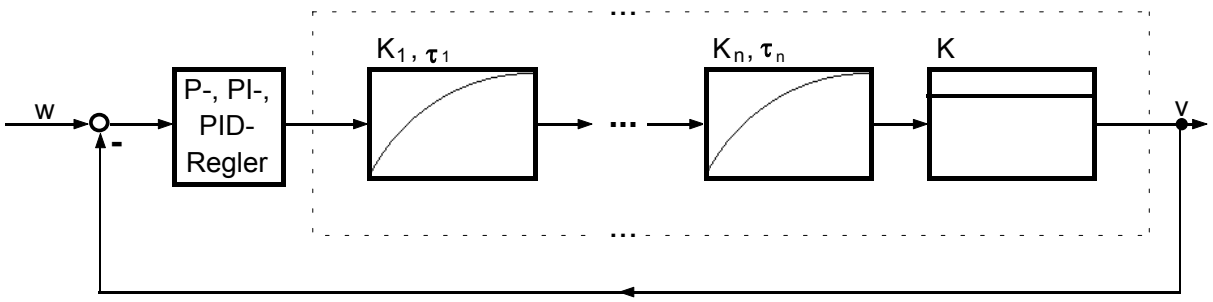
Da wir hier nur Regelsysteme mit 1 Freiheitsgrad betrachten, liegt (leider!) bei Festlegung des Führungsübetragungsverhaltens auch schon das Störübertragungsverhalten mit fest. Wir können lediglich nachträglich überprüfen, ob die Störunterdrückung genügend erfüllt wird. Oder wir können einen Reglerentwurf machen der eine gute Störunterdrückung liefert – dann müssen wir uns mit dem sich dabei ergebenden Führungsverhalten abfinden.

6.5. Reglereinstellung nach dem Betragsoptimum

„Wir müssen nur eine bessere Art der Vorbereitung finden“, sagte Dr. Karl, um Sachlichkeit bemüht. Hera Lind (DasWeibernest)

Voraussetzung:

- Strecke hat nur stabile, reelle Pole
- keine konjugiert komplexen Pole
- keine Nullstellen



Bisheriger Kenntnisstand:

Reglereinstellung nach dem Betragsoptimum bedeutet:
langsame Zeitkonstanten durch Reglernulstellen kürzen und Regler so einstellen, daß man „|Re| = |Im|“ und damit ü = 4% erhält.

Daß die Reglereinstellung nach dem Betragsoptimum ggf. differenzierter gesehen werden muß, zeigt die nachfolgende Herleitung:

Strecke: $G_S(s) = \dfrac{K}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \cdots} = \dfrac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots}$

Abkürzung: $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots$

Der Regler habe die Übertragungsfunktion $G_R(s) = \dfrac{r_0 + r_1 s + r_2 s^2}{2s}$

Abkürzung: $G_R(s) = \dfrac{R(s)}{2s}$

PI - Regler: $G_R(s) = K_P \cdot \dfrac{1 + sT_N}{sT_N} = \dfrac{2K_P}{T_N} \cdot \dfrac{1 + sT_N}{2s} = \dfrac{\overbrace{\dfrac{2K_P}{T_N}}^{r_0} + \overbrace{s \cdot 2K_P}^{r_1}}{2s}$

$$|G_W(j\omega)| = \left| \frac{G_R(j\omega)\cdot G_S(j\omega)}{1+G_R(j\omega)\cdot G_S(j\omega)} \right| = \left| \frac{1}{1+\dfrac{1}{G_R(j\omega)\cdot G_S(j\omega)}} \right| = \left| \frac{1}{1+\dfrac{2j\omega\cdot A(j\omega)}{R(j\omega)}} \right| \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\dfrac{2j\omega\cdot A(j\omega)}{R(j\omega)}} \cdot \overline{\left(\frac{1}{1+\dfrac{2j\omega\cdot A(j\omega)}{R(j\omega)}} \right)} = 1$$

Zur Erinnerung: $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad ; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Ist $P(j\omega)$ ein Polynom in " $j\omega$ " mit reellen Koeffizienten, dann gilt: $\overline{P(j\omega)} = P(-j\omega)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+\dfrac{2j\omega\cdot A(j\omega)}{R(j\omega)}} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{(-2j\omega)\cdot A(-j\omega)}{R(-j\omega)}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+4\cdot \dfrac{\omega^2\cdot A(j\omega)\cdot A(-j\omega) + \frac{1}{2} j\omega\cdot A(j\omega)\cdot R(-j\omega) - \frac{1}{2} jw\cdot A(-j\omega)\cdot R(j\omega)}{R(j\omega)\cdot R(-j\omega)}} \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2\cdot A(j\omega)\cdot A(-j\omega) + \frac{1}{2} j\omega\cdot A(j\omega)\cdot R(-j\omega) - \frac{1}{2} jw\cdot A(-j\omega)\cdot R(j\omega) \overset{!}{=} 0$$

Nun ist:

$$A(j\omega) = a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \cdots$$

$$R(j\omega) = r_0 + r_1(j\omega) + r_2(j\omega)^2 + \cdots$$

oben eingesetzt erhalten wir:

$$0 \overset{!}{=} \left(a_0{}^2 - r_0a_1 + r_1a_0\right)\omega^2 + \left(-2a_0a_2 + a_1{}^2 + r_0a_3 - r_1a_2 + r_2a_1\right)\omega^4$$
$$+ \left(2a_0a_4 - 2a_1a_3 + a_2{}^2 - r_0a_5 + r_1a_4 - r_2a_3\right)\omega^6 + \cdots$$

Man wähle r_0, r_1, r_2 so, daß gilt:

$a_0^2 - r_0 a_1 + r_1 a_0 = 0$ (Term von ω^2)

$a_1^2 - 2a_0 a_2 + r_0 a_3 - r_1 a_2 + r_2 a_1 = 0$ (Term von ω^4)

$a_2^2 + 2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 - r_0 a_5 + r_1 a_4 - r_2 a_3 = 0$ (Term von ω^6)

Angenommen, wir haben einen *PI-Regler* ($r_2 = 0$)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -a_1 & a_0 \\ a_3 & -a_2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -a_0^2 \\ 2a_0 a_2 - a_1^2 \end{pmatrix}}_{L}$$

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1 a_2 - a_0 a_3} \cdot \begin{pmatrix} -a_2 & -a_0 \\ -a_3 & -a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_0^2 \\ -a_1^2 + 2a_0 a_2 \end{pmatrix}$$

Zusammenstellung der Ergebnisse:

PI-Regler dimensioniert nach dem Betragsoptimum:

$$r_0 = \frac{a_0 \cdot \left(a_1^2 - a_0 a_2\right)}{a_1 a_2 - a_0 a_3} \quad ; \quad r_1 = \frac{a_1 \cdot \left(a_1^2 - a_0 a_2\right)}{a_1 a_2 - a_0 a_3} - a_0 \qquad \textbf{(6.16)}$$

PID-Regler dimensioniert nach dem Betragsoptimum:

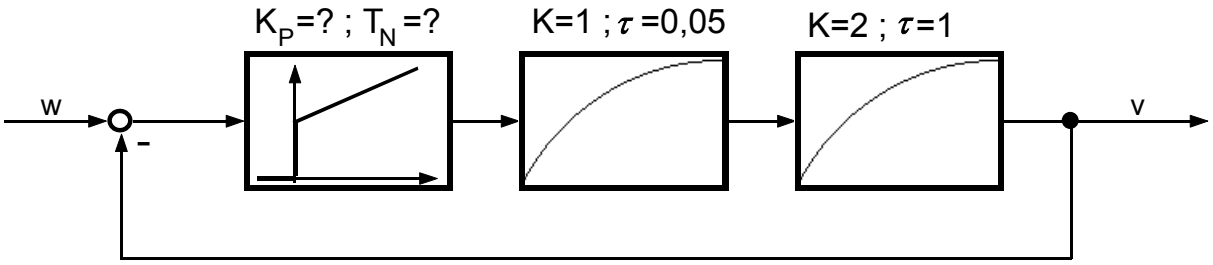
$$r_0 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} -a_0^2 & a_0 & 0 \\ -a_1^2 + 2a_0 a_2 & -a_2 & a_1 \\ -a_2^2 - 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 & a_4 & -a_3 \end{vmatrix}; r_1 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} -a_1 & -a_0^2 & 0 \\ a_3 & -a_1^2 + 2a_0 a_2 & a_1 \\ -a_5 & -a_2^2 - 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 & -a_3 \end{vmatrix}$$

$$r_2 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} -a_1 & a_0 & -a_0^2 \\ a_3 & -a_2 & -a_1^2 + 2a_0 a_2 \\ -a_5 & a_4 & -a_2^2 - 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 \end{vmatrix}; D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 \\ -a_5 & a_4 & -a_3 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(6.17)}$$

zur Erinnerung: *Cramersche Regel*

$$X_i = \frac{D_i}{D} \quad ; \quad D = \det(A) \quad ; \quad D_1 = \begin{vmatrix} L_1 & A_{12} \\ L_2 & A_{22} \end{vmatrix} \quad ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & L_1 \\ A_{12} & L_2 \end{vmatrix}$$

Beispiel:
Gegeben ist das nachfolgende System mit PI-Regler und zwei PT1-Gliedern.
Gesucht sind K_P und T_N des PI-Reglers.



PI - Regler: $G_R(s) = K_P \cdot \frac{1+sT_N}{sT_N} = \frac{r_0 + r_1 s}{2s}$

Strecke: $G_S(s) = \frac{\overbrace{2}^{1.PT1-Glied \times 2.PT1-Glied}}{(1+0{,}05s)(1+s)} = \frac{2}{1+1{,}05s+0{,}05s^2} = \frac{1}{\underbrace{0{,}5}_{a_0} + \underbrace{0{,}525s}_{a_1} + \underbrace{0{,}025s^2}_{a_2}}$

Berechnung von r_0, r_1 mit Formeln für den PI-Regler:

$$r_0 = \frac{0{,}5 \cdot \left(0{,}525^2 - 0{,}5 \cdot 0{,}025\right)}{0{,}525 \cdot 0{,}025 - 0{,}5 \cdot 0} = 10 \quad ; \quad r_1 = \frac{0{,}525 \cdot \left(0{,}525^2 - 0{,}5 \cdot 0.025\right)}{0{,}525 \cdot 0{,}025} - 0{,}5 = 10$$

$$G_R(s) = 2 \cdot \left(\frac{K_P}{T_N}\right) \cdot \frac{1+sT_N}{2s} \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{2K_P}{T_N} \quad ; \quad r_1 = 2K_P$$

$$\left.\begin{aligned} 2K_P &= 10 \\ \frac{2K_P}{T_N} &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} K_P &= 5 \\ T_N &= 1 \end{aligned}$$

Interpretation dieses Ergebnisses:

$$G_W(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{5 \cdot \frac{1+s}{s} \cdot \frac{2}{(1+0{,}05s)(1+s)}}{1+5 \cdot \frac{1+s}{s} \cdot \frac{2}{(1+0{,}05s)(1+s)}} = \frac{10}{0{,}05s^2 + s + 10}$$

$G_W(s)$ hat Polstellen bei : $s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2}}{0{,}1} = -10 \pm 10j$

Man sieht in diesem Fall, daß sich langsame Streckenpole wegkürzen und daß für den geschlossenen Regelkreis ein dominierendes Polpaar mit |Re|=|Im| erzeugt wird.
Bei der Einstellung nach dem Betragsoptimum ergibt sich hier ein Überschwinger von 4%.

Wann wird welcher Regler verwendet wenn das Betragsoptimum zu Grunde gelegt werden soll?

a) eine große Zeitkonstante ⇒ PI-Regler
b) zwei große Zeitkonstanten ⇒ PID-Regler
c) drei oder mehr große Zeitkonstanten ⇒ PID-Regler (nach Formel einstellen. Spätestens hier gilt dann „ü = 4%“ und „Re“ = „Im“ nicht mehr.)

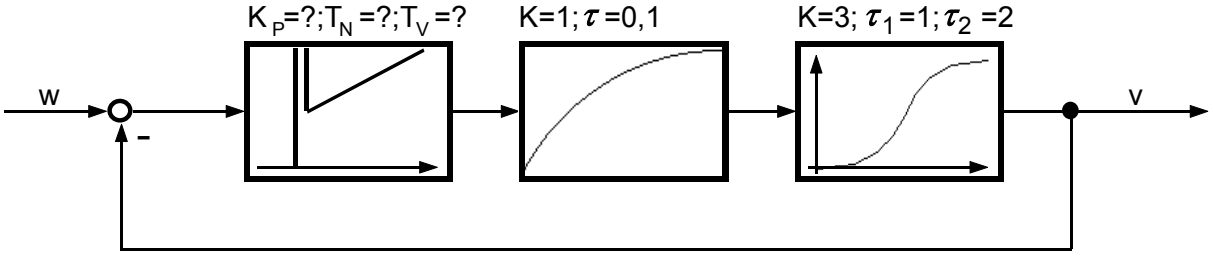
Zur Unterscheidung von „großen“ und „kleinen Zeitkonstanten“ betrachte man:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{\prod_{\nu=1}^{n}(1+s\tau_\nu)\cdot\prod_{\mu=1}^{m}(1+s\tilde{\tau}_\mu)}$$

wobei $\tau_1 >> \tilde{\tau}_1 + \ldots + \tilde{\tau}_m \quad , \quad \ldots \quad , \tau_n >> \tilde{\tau}_1 + \ldots + \tilde{\tau}_m$.

$\tau_1, \ldots, \tau_n$ sind „große“ Zeitkonstanten; $\tilde{\tau}, \ldots, \tilde{\tau}_m$ sind „kleine“ Zeitkonstanten.

Weiteres Beispiel:
Gegeben ist das nachfolgende System mit PID-Regler, einem PT1- und einem PT2-Glied.
Gesucht sind K_P, T_N und T_V des PID-Reglers.



PID - Regler: $G_R(s) = K_P \cdot \frac{1 + sT_N + s^2 T_N T_V}{sT_N}$ (additive Form)

oder: $G_R(s) = \tilde{K}_P \cdot \frac{(1+s\tilde{T}_N)(1+s\tilde{T}_V)}{s}$ (multiplikative Form)

Umwandlungsformeln:

Umwandlung zwischen additiver und multiplikativer Form:

$$K_P = \tilde{K}_P \cdot T_N \quad ; \quad T_N = \tilde{T}_V + \tilde{T}_N \quad ; \quad T_V = \frac{\tilde{T}_N \cdot \tilde{T}_V}{T_N}$$

Ausgehend von der multiplikativen Form verlange man:
$\tilde{T}_N = 2; \tilde{T}_V = 1 \Rightarrow$ damit lassen sich die langsamen Pole der Strecke wegkürzen ($\tau_1 = 1; \tau_2 = 2$)

Es verbleibt:

$$L(s) = \frac{\tilde{K}_P}{s} \cdot (1+2s) \cdot (1+s) \cdot \frac{3}{(1+0{,}1s)(1+2s)(1+s)}$$

$$T(s) = \frac{\frac{3\tilde{K}_P}{s(1+0{,}1s)}}{1+\frac{3\tilde{K}_P}{s(1+0{,}1s)}} = \frac{3\tilde{K}_P}{0{,}1s^2 + s + 3\tilde{K}_P}$$

die Pole von $T(s)$ liegen bei: $s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-1{,}2\tilde{K}_P}}{0{,}2}$

$\tilde{K}_P$ wird jetzt so festgelegt, daß |Re|=|Im|

$$\Rightarrow 1-1{,}2\tilde{K}_P = -1 \Rightarrow \tilde{K}_P = \frac{2}{1{,}2} = \frac{5}{3}$$

Nun gilt: $\tilde{T}_N + \tilde{T}_V = T_N = 3\,\text{sec}$

$$\tilde{T}_N \cdot \tilde{T}_V = T_N \cdot T_V = 2 \Rightarrow T_V = \frac{2}{3}\,\text{sec}$$

$$K_P = \tilde{K}_P \cdot T_N = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5$$

Ergebnis:

Der PID-Regler hat folgende Werte:

$K_P = 5 \quad ; \quad T_N = 3\,\text{sec} \quad ; \quad T_V = \frac{2}{3}\,\text{sec}$

Wegen der Einstellung nach dem Betragsoptimum ergibt sich ein Überschwinger von 4%.

Die Summenzeitkonstante

Regelstrecke: $G_S(s) = \dfrac{K_S}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\cdots(1+s\tau_n)}$

große Zeitkonstante $\tau_1 >> \tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_n$

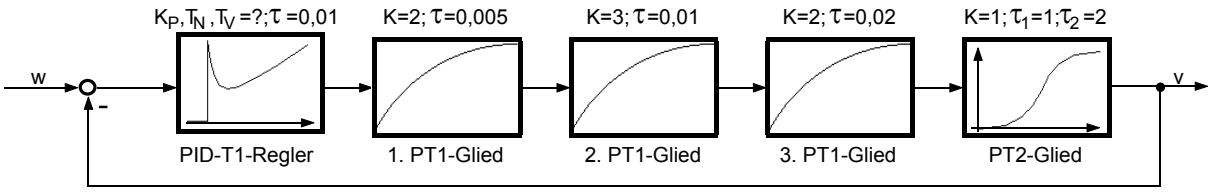
Setze dann $\tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_n = \tau_\Sigma$ - Summenzeitkonstante

$$G_S(s) \approx \frac{K_S}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_\Sigma)}$$

τ_Σ - Summenzeitkonstante

Beispiel:

Der PID-T1-Regler im nachfolgenden System ist nach dem Betragsoptimum auszulegen.



Lösung:

$\tau_1 = 1 \;\Rightarrow\; \tilde{T}_V = 1; \qquad \tau_2 = 2 \;\Rightarrow\; \tilde{T}_N = 2;$

Für den Reglerentwurf fasse man die “kleinen Zeitkonstanten” zur Summenzeitkonstanten zusammen.

$$\tau_\Sigma = \underbrace{0{,}01\,\text{sec}}_{\substack{\text{PT1-Anteil}\\ \text{des Reglers}}} + \underbrace{0{,}005\,\text{sec}}_{\substack{1.\\ \text{PT1-Glied}}} + \underbrace{0{,}01\,\text{sec}}_{\substack{2.\\ \text{PT1-Glied}}} + \underbrace{0{,}02\,\text{sec}}_{\substack{3.\\ \text{PT1-Glied}}} \Rightarrow \tau_\Sigma = 0{,}045\,\text{sec}$$

$$\text{Strecke}: G_S(s) \approx \frac{\overbrace{12}^{\substack{\text{Produkt der}\\ \text{K-Terme}}}}{\underbrace{(1+\text{s})(1+2s)}_{\substack{\text{große}\\ \text{Zeitkonstanten}}}\underbrace{(1+0{,}045s)}_{\substack{\text{Summenzeit-}\\ \text{konstante}}}}$$

$$\text{Regler}: G_R(s) = \widetilde{K}_P \cdot \frac{(1+s)(1+2s)}{s}$$

$$\text{L(s)} = \text{G}_\text{S}(s) \cdot G_R(s) = \frac{12\widetilde{K}_P}{s} \cdot \frac{1}{1+0{,}045s}$$

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{12\widetilde{K}_P}{0{,}045s^2 + s + 12\widetilde{K}_P} \quad \text{mit } s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2{,}16\widetilde{K}_P}}{2 \cdot 0{,}045}$$

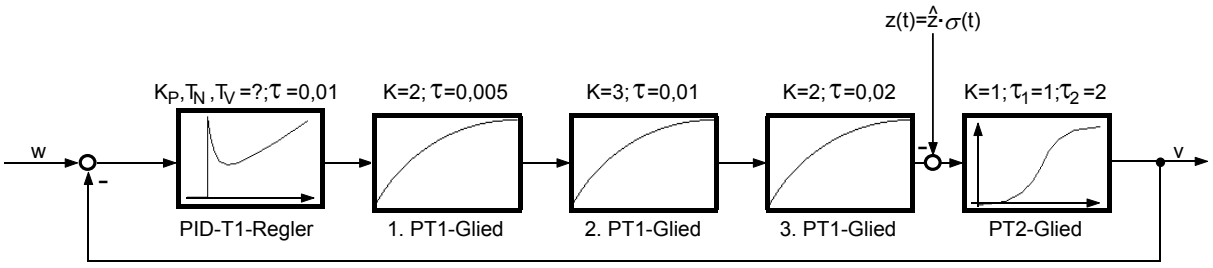
$$\text{mit } |\,\text{Re}\,| = |\,\text{Im}\,| \Rightarrow -1 = 1 - 2{,}16\widetilde{K}_P \Rightarrow \widetilde{K}_P = 0{,}93 \Rightarrow s_{1,2} = -11{,}11 \pm 11{,}11j$$

mit den Umwandlungsformeln ergibt sich als Ergebnis :

$$\text{K}_\text{P} = 2{,}79; T_N = 3\,\text{sec}; T_V = 0{,}66\,\text{sec}$$

Fortführung des Beispiels:

An der Strecke greife nun eine Störung in der bezeichneten Form an.
Man berechne die Störübertragungsfunktion $T_d(s)$.

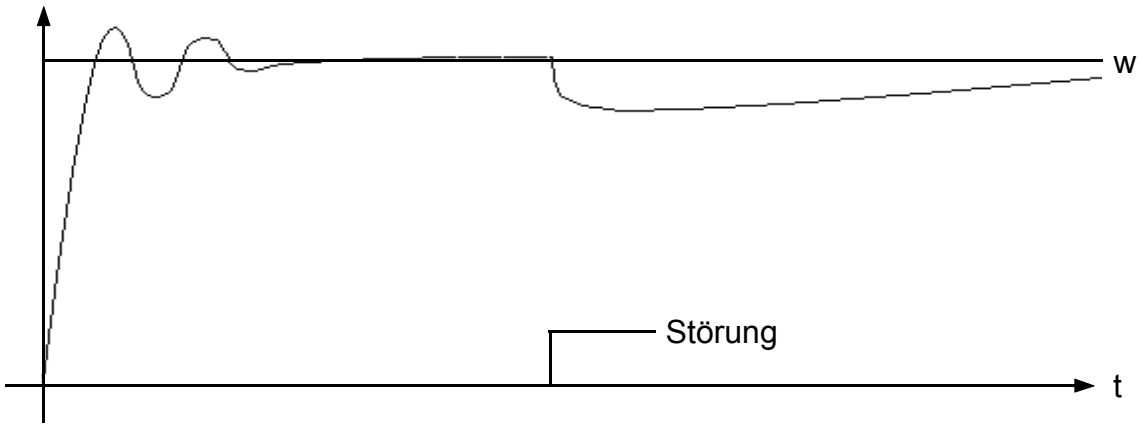


Lösung:

$$G_Z(s) = \frac{-\dfrac{1}{(1+s)(1+2s)}}{1+\dfrac{12\cdot 0{,}93\cdot(1+s)(1+2s)}{s(1+s)(1+2s)(1+0{,}045s)}} = -\frac{1}{(1+s)(1+2s)\left(1+\dfrac{12\cdot 0{,}93}{s(1+0{,}045s)}\right)}$$

$$G_Z(s) = -\frac{s(1+0{,}045s)}{\underbrace{(1+s)(1+2s)}_{\substack{\text{große}\\ \text{Zeitkonstanten}}}(0{,}045s^2+s+11{,}16)}$$

Die großen Streckenzeitkonstanten treten bei einer Störung wieder auf, deshalb hat das Betragsoptimum ein schlechtes Störverhalten.



Das Bild zeigt deutlich, daß eine Störung nach Erreichen des eingeschwungenen Zustandes nur langsam kompensiert wird.

Wenn das Störübertragungsverhalten im Vordergrund steht, wird deshalb besser das Symmetrische Optimum verwendet.

„Ich habe überhaupt keine Hoffnung mehr in die Zukunft unseres Landes, wenn einmal unsere Jugend die Männer von morgen stellt. Unsere Jugend ist unerträglich, unverantwortlich und entsetzlich anzusehen.“ (Aristoteles, 384-322 v. Chr.)

Weiteres Beispiel:

Strecke: $G_S(s) = \dfrac{(1+s)}{s(1+0{,}1s)(1+5s)}$

Hier ist die Verwendung eines PI- oder PID-Reglers ungünstig, da die Strecke bereits einen Pol bei s=0 besitzt.
Statt dessen kann man einen Regler vorschlagen, der die "langsame Polstelle" bei s=-0,2 und die Nullstelle bei s=-1 herauskürzt.
Die Reglerverstärkung ist dann soweit aufzudrehen, daß sich für das Regelsystem ü=4% einstellt.

Lösung:

Regler: $G_R(s) = K_P \cdot \dfrac{(1+5s)}{(1+s)}$ $\Rightarrow$ PD - T1 - Regler

Vergleicht man $G_R(s)$ mit $G_S(s)$ so sieht man deutlich, daß sich bei der Multiplikation die Terme (1+s) und (1+5s) wie gewünscht herauskürzen.

ü=4% bedeutet, daß |Re|=|Im| und mit dieser Beziehung kann dann K_P berechnet werden.

Ergebnis: K_P=2,525; T_V=5sec; τ=1sec

6.6. Das Symmetrische Optimum

Das Symmetrische Optimum kürzt Polstellen nicht heraus, daher hat es ein schlechteres Folgeverhalten, jedoch ein gutes Störverhalten.

Das Symmetrische Optimum gilt nur für folgenden Streckentyp:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+s\tau_\nu\right)\cdot\prod_{\mu=1}^{m}\left(1+s\tilde{\tau}_\mu\right)} \quad \text{mit } \tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n >> \underbrace{\tilde{\tau}_1+\tilde{\tau}_2+\ldots+\tilde{\tau}_m}_{=:\tau_\Sigma}$$

Der Ansatz für den Regler lautet:

$$G_R(s) = \frac{K_R}{s}\cdot\left(1+s\tau_R\right)^n$$

Formeln für den Reglerentwurf nach dem Symmetrischen Optimum:

allgemeiner Fall:

Strecke:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+s\tau_\nu\right)\cdot\prod_{\mu=1}^{m}\left(1+s\tilde{\tau}_\mu\right)}$$

Regler:

$$K_R = \frac{1}{2K_S\cdot\tau_\Sigma}\cdot\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\tau_\nu}{\left(4n\tau_\Sigma\right)^n}$$

$$\tau_R = 4n\tau_\Sigma$$

spezieller Fall: n = 1 $\Rightarrow$ PI - Regler

Strecke:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{\left(1+s\tau_1\right)\cdot\prod_{\mu=1}^{m}\left(1+s\tilde{\tau}_\mu\right)}$$

Regler:

$$K_R = \frac{\tau_1}{8K_S\cdot\tau_\Sigma{}^2}$$

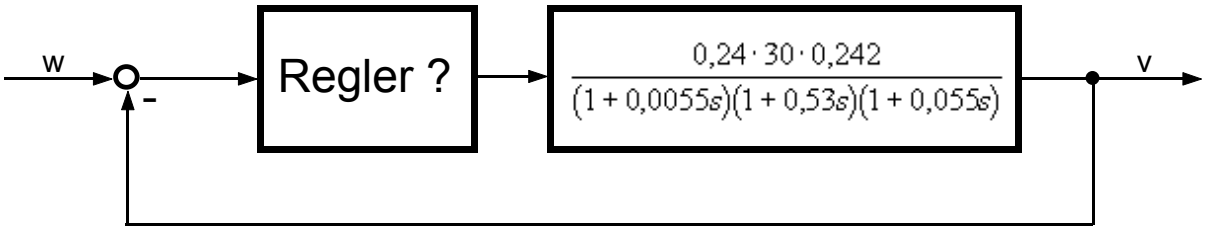
$$\tau_R = 4\tau_\Sigma$$

(6.18)

spezieller Fall: n = 2 $\Rightarrow$ PID - Regler

Beispiel:

Um welchen Reglertyp handelt es sich in dem nachfolgenden System?
Berechnen Sie diesen Regler nach dem Symmetrischen Optimum!



Lösung:

Es handelt sich hierbei um einen *PI-Regler*, da wir bereits gelernt haben, daß bei nur einer großen Zeitkonstante (hier: τ=0,53sec) ein solcher Reglertyp verwendet wird.

Die Berechnung des PI-Reglers erfolgt nun nach den Formeln für das Symmetrische Optimum:

PI-Regler: n=1

$$G_R(s) = K_R \cdot \frac{1 + s\tau_R}{s}$$

$$K_S = 0,24 \cdot 30 \cdot 0,242 = 1,7424$$
$$\tau_\Sigma = 0,0055\,\text{sec} + 0,055\,\text{sec} = 0,0605\,\text{sec}$$
$$\tau_R = 4\tau_\Sigma = 0,24\,\text{sec}$$
$$K_R = \frac{\tau_1}{8K_S \cdot \tau_\Sigma{}^2} = \frac{0,53}{8 \cdot 1,7424 \cdot (0,0605)^2} = 10,39$$

$$\Rightarrow \quad G_R(s) = 10,39 \cdot \frac{1 + 0,24s}{s}$$

„Unsere Jugend ist heruntergekommen und zuchtlos. Die jungen Leute hören nicht mehr auf ihre Eltern. Das Ende der Welt ist nahe.“ (Keilschrifttext aus Ur um 2000 v. Chr.)

7. Reglersynthese mittels FKL-Verfahren

„Alle wissen nichts“ (Erich Miehlke)

7.2 Der Grundgedanke dieses Syntheseverfahrens

Man betrachte das nachstehende Bild und erinnere sich an 6.3.11.3 (Wichtige Ungleichungen und die entscheidenden Folgerungen). Dort hatten wir eine „zweite entscheidende Folgerung“ formuliert.

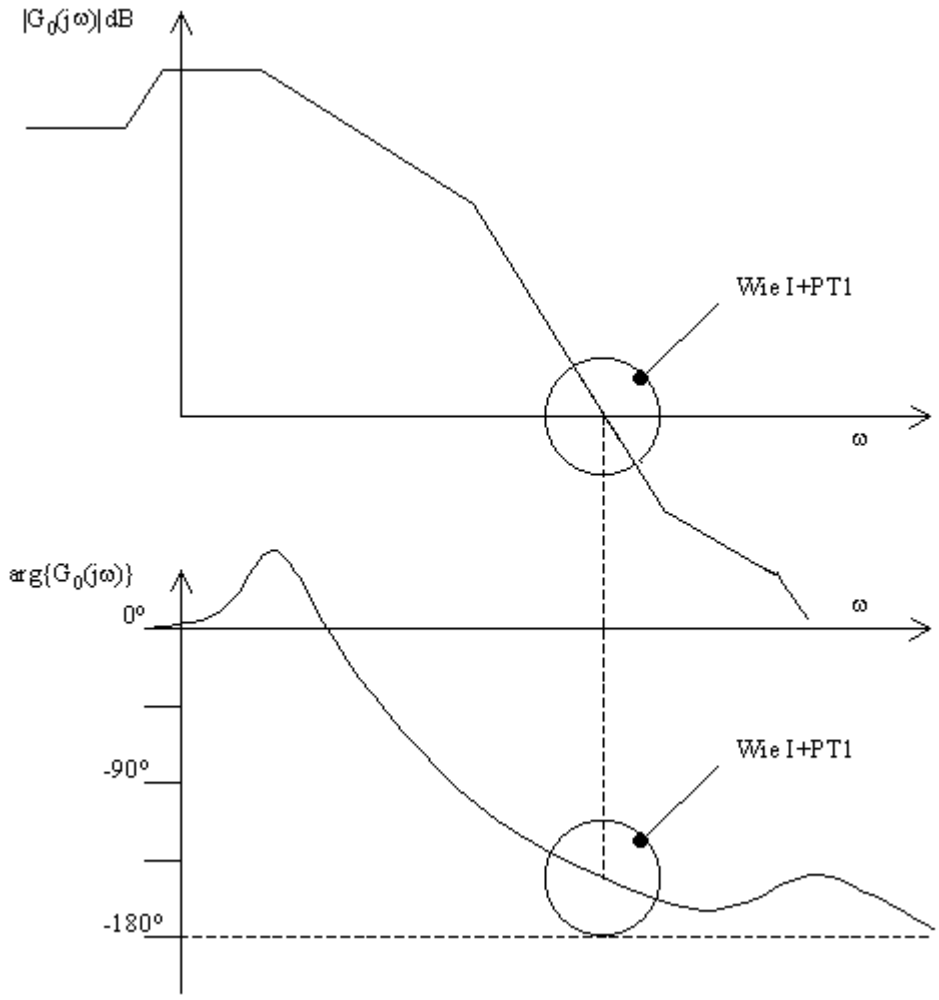


Bild 7.1: ***Prinzipskizze des BODE-Diagramms einer möglichen offenen Regelschleife***

Der Grundgedanke ist folgender:

- Bereits in 6.3.11 wurde nachgewiesen: Ein I-Glied und ein PT_1-Glied als Bestandteile einer offenen Regelschleife wirken sich nach Rückkopplung (also als Regelsystem) wie ein nicht schwingungsfähiges bzw. schwingungssfähiges PT_2-Glied aus .

Es läßt sich zeigen:

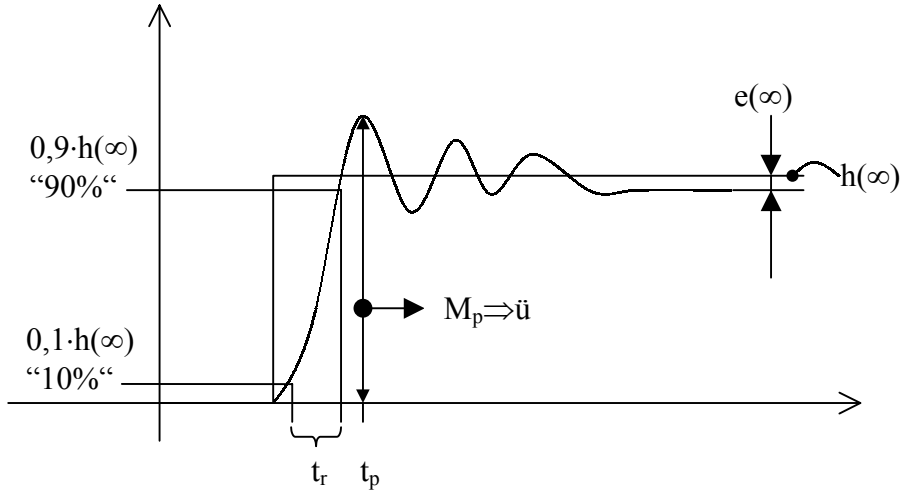
		Phasenrand der offenen Schleife
Regelkreis schwingungsfähig/		$\varphi_R<60^0$
	$\hat{=}$	
nicht schwingungsfähig		$\varphi_R>60^0$

- Weiterhin wurde gezeigt (vgl 6.1):
  „Das Zeitverhalten des (rückgekoppelten) Regelkreises hängt entscheidend vom Verlauf des Frequenzganges der offenen Regelschleife in der Umgebung des Durchtretens durch den Einheitskreis (bzw. beim BODE-Diagramm: durch die 0dB-Achse) ab."

- Zusammengefaßt heißt dies:

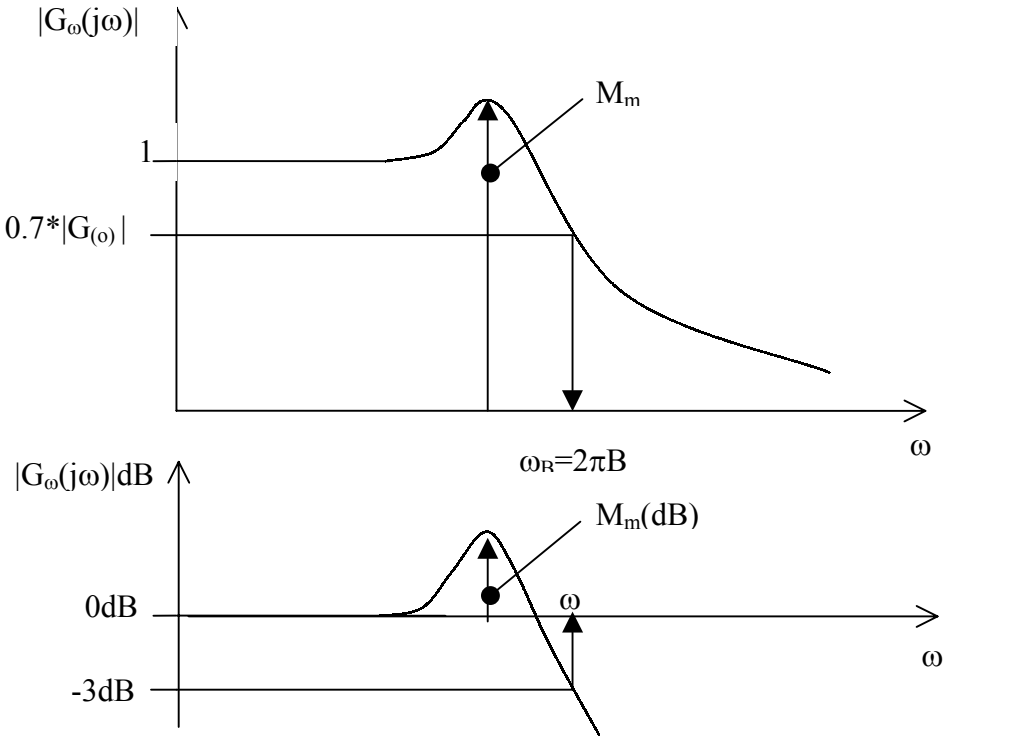
Wenn die offene Regelschleife sich in der Umgebung des Durchtretens durch den Einheitskreis (bzw. beim durch die 0dB-Achse) wie ein I+PT_1-Glied verhält (also Gefälle des Amplitudenganges -20dB/Dekade bis -40dB/Dekade und $0^0<\varphi<60^0$), dann verhält sich der Regelkreis wie ein schwingungsfähiges PT_2-Glied.

Der Zusammenhang zwischen den charakteristischen Kenngrößen von h(t) (=Sprungantwort des Regelsystems) einerseits



den entsprechenden Kenngrößen im Frequenzbereich ...

Char. Kenngrößen für $G_w(j\omega)$

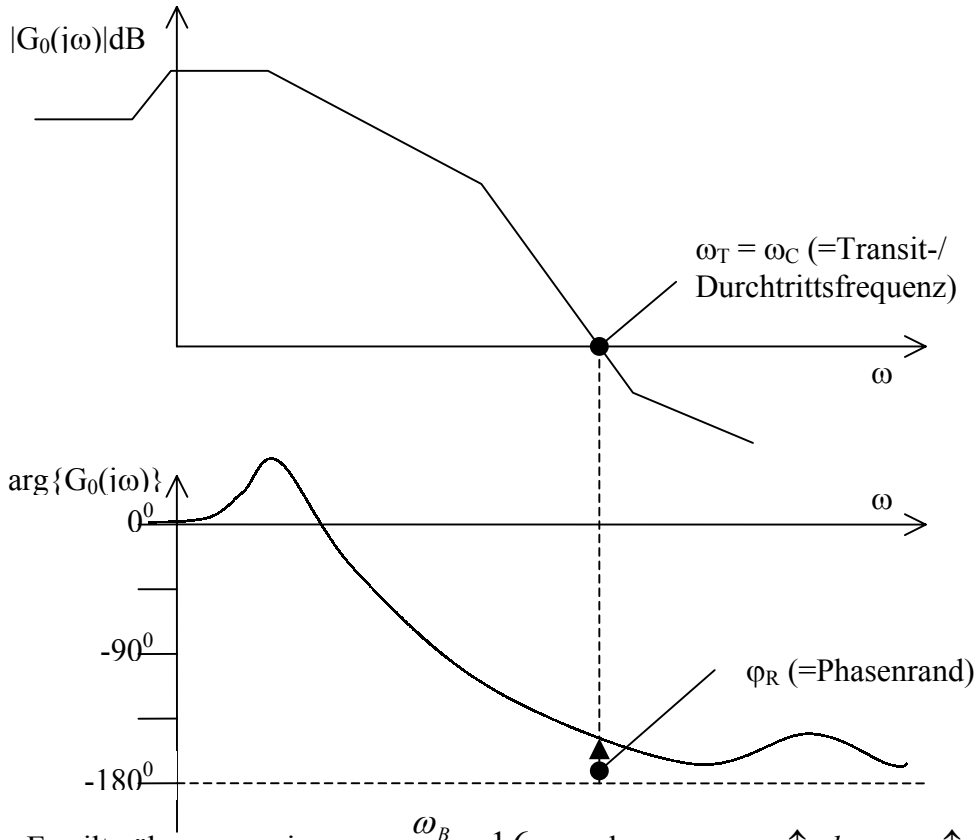


Es gilt näherungsweise $\omega_B \cdot t_r \approx 2{,}2$ $(B \cdot t_r \approx 0{,}35)$, also: wenn $\omega_B \uparrow \Leftrightarrow tr\downarrow$

weiterhin $M_p\uparrow$ (bzw: ü$\uparrow$) $\Leftrightarrow M_m\uparrow$

... und den charakteristischen Kenngrößen der offenen Regelschleife ist andererseits.

Char. Kenngrößen für $G_0(j\omega)$



Es gilt näherungsweise $\frac{\omega_B}{\omega_c} \approx 1{,}6$ also: wenn $\omega_B \uparrow$, *dann* $\omega_C \uparrow$

weiterhin $M_m \cdot \varphi_R \approx 60°$ also: wenn $\varphi_R \uparrow$, dann $M_m \downarrow$

und (bekanntlich) $e_{1\infty} = \frac{1}{1+V}$ bzw. $e_{2\infty} = \frac{1}{V}$ usw. also: wenn $V \uparrow$ dann $e_{i\infty} \downarrow$

Die Forderungen an die Sprungantwort (die Übergangsfunktion) des geschlossenen Regelkreises werden umgesetzt in Forderungen an den Frequenzgang $G_w(j\omega)$ des geschlossenen Regelkreises und dann weiter in Forderungen an $G_0(j\omega)$, den Frequenzgang der offenen Regelschleife: $G_0(j\omega) = G_S(j\omega)G_R(j\omega)$. $G_S(j\omega)$ wird normalerweise nicht schon diese Forderungen erfüllen, deshalb müssen mit $G_R(j\omega)$ die Frequenzkennlinien so verbogen werden, daß $G_O(j\omega)$ diese Anforderungen erfüllt. Zum „Verbiegen“ der Frequenzkennlinien nehmen wir Lead- und Lag-Kompensatoren

Das nachstehende Bild 7.2 soll das bisher Gesagte erstmals motivieren.

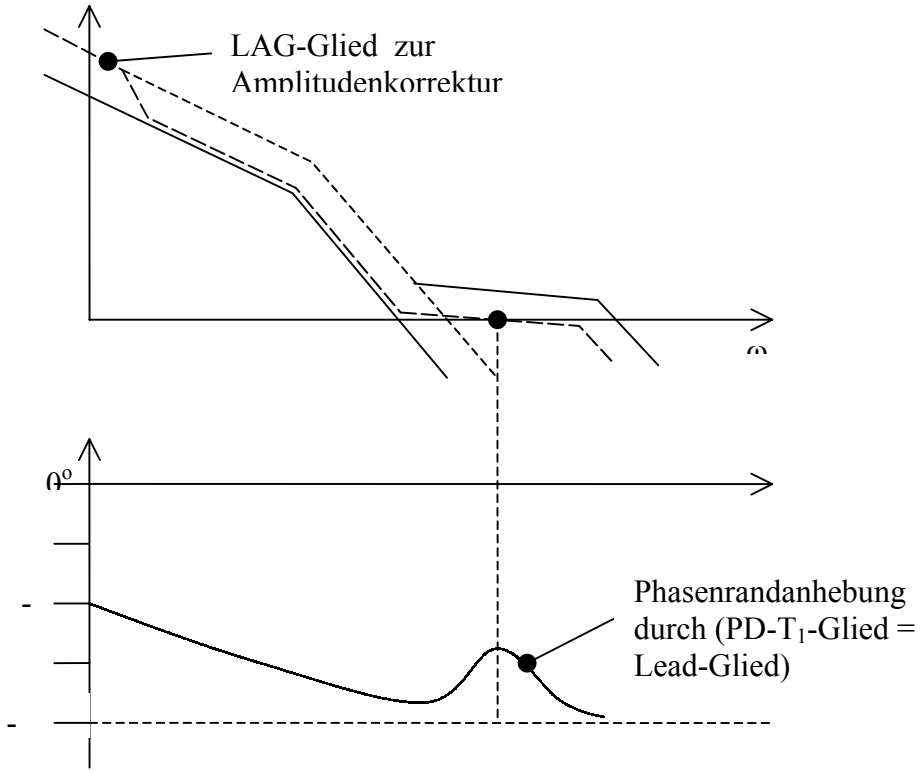
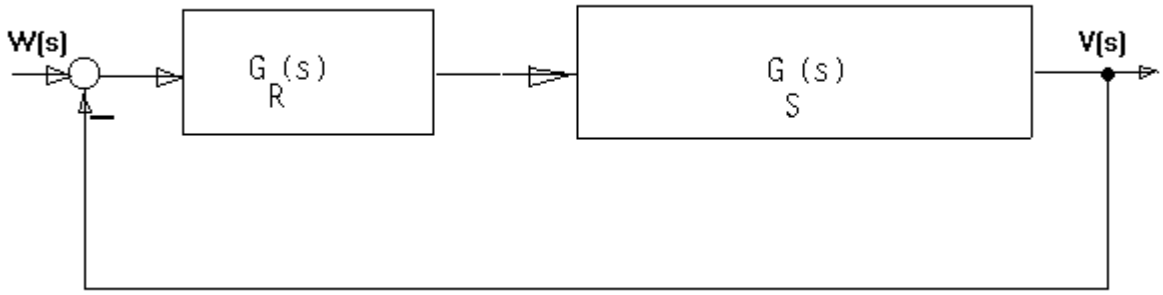


Bild 7.2: ***Prinzipskizze wie Lead- und Lagglieder eingesetzt werden können.***

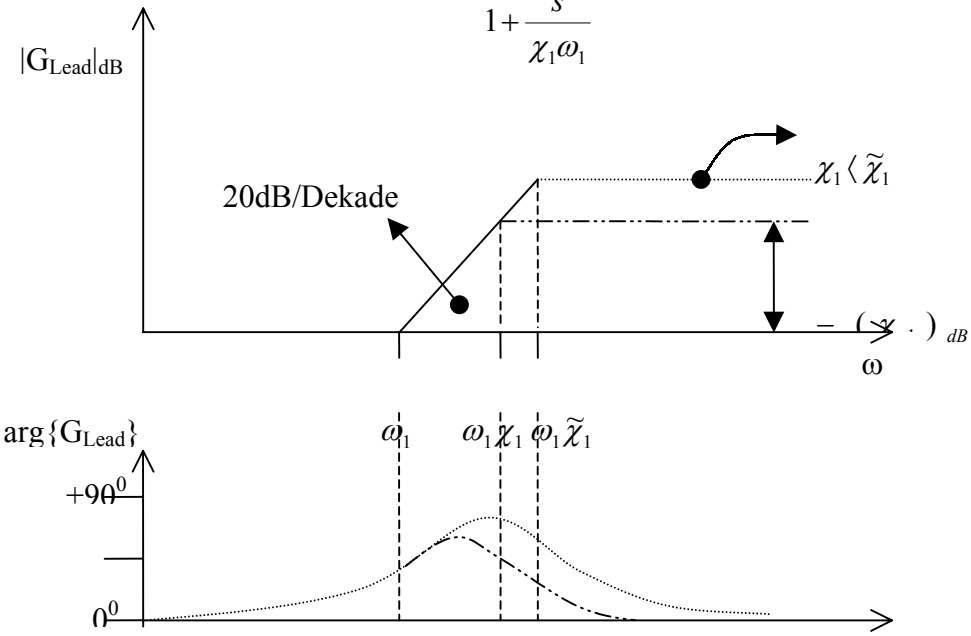
7.2 Der Einsatz von Lead- und Lag-Kompensatoren.

Ausgangspunkt ist wieder die nachstehende Rückkopplungsstruktur:



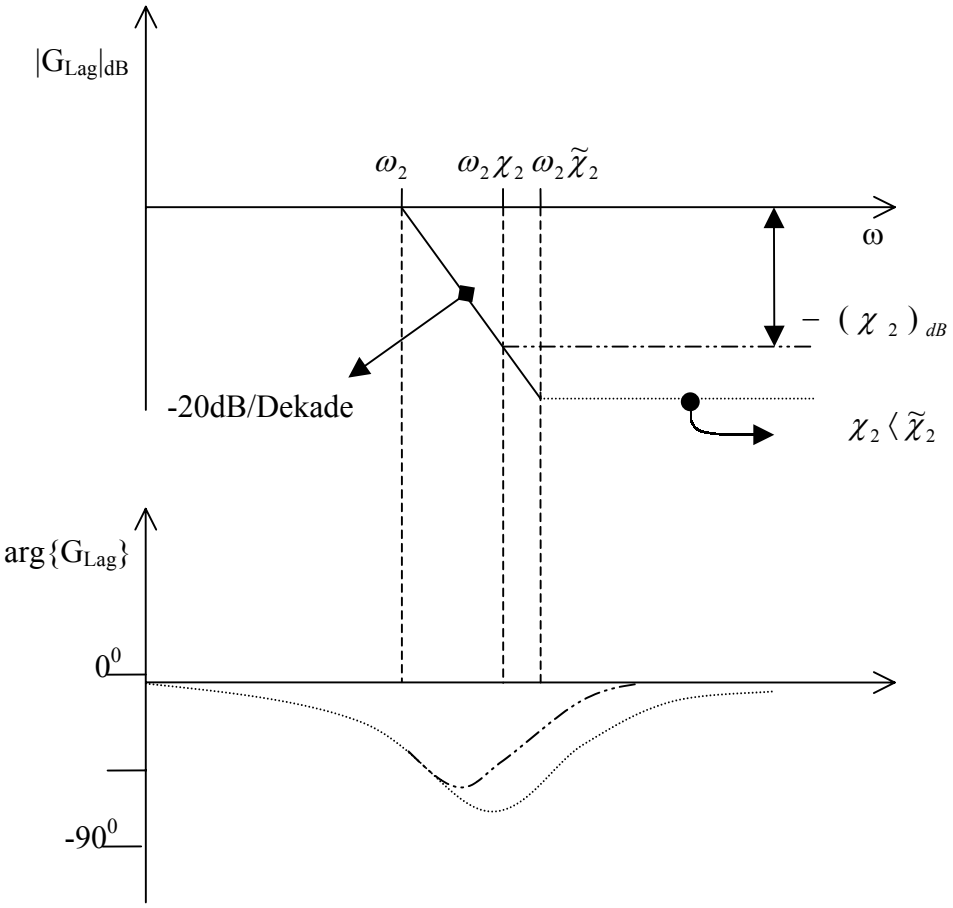
7.2.1 Lokale Phasenanhebung mit dem LEAD-Glied: (= PD-T_1 -Glied)

$$G_{LEAD}(s) = \frac{1+\frac{s}{\omega_1}}{1+\frac{s}{\chi_1\omega_1}}; \quad mit\ \omega_1 > 0;\ \chi_1 > 1$$



7.2.2 Bertagskorrektur durch LAG-Glied

$$G_{LAG}(s) = \frac{1+\frac{s}{\chi_2\omega_2}}{1+\frac{s}{\omega_2}}; \quad mit\ \omega_2 > 0;\ \chi_2 > 1$$



Wir hatten unter 7.1 bereits eine qualitative Darstellung der Zusammenhänge zwischen den einzelnen charakteristischen Kenngrößen kennengelernt. Hier noch einmal im Zusammenhang:

$h(t)$	$t_r \downarrow$	$\ddot{u} \downarrow$	$e_\infty \downarrow$
$G_\omega(j\omega)$	$\omega_B, B \uparrow$	$M_m \downarrow$	
$G_\omega(j\omega)$	$\omega_c \uparrow$	$\varphi_r \uparrow$	$V \uparrow$

Die Zusammenhänge sind folgendermaßen zu interpretieren: $t_r \downarrow \Rightarrow B \uparrow \Rightarrow \omega_c$

Wenn sich das Regelsystem wie ein schwingungsfähiges PT_2-Glied verhalten soll (G_0 wie $I+PT_1$ bei ω_c), dann lassen sich die Zusammenhänge quantifizieren:

$h(t)$	t_r	$\ddot{u}$	e_∞
	$\omega_B \cdot t_r \approx 2{,}2$	$M_m \approx 1 + 5{,}76\ddot{u}^2$	
$G_\omega(j\omega)$	ω_B	M_m	
	$\frac{\omega_B}{\omega_C} \approx 1{,}6$	$M_m \cdot \varphi_r \approx 60^0$	
$G_0(j\omega)$	ω_C	φ_r	V

$$e_{1\infty} = \frac{1}{1+V}$$

$$e_{2\infty} = \frac{1}{V} \quad usw.$$

Damit wird der Einsatz von Lead- und Lagkompensatoren möglich.