

Prüfungsfach: Digitale Signalverarbeitung

Studiengang: BTI
Semester: 4
Prüfungstermin: 17.07.2001, 14:00 Uhr
Dauer der Prüfung: 60 Minuten
Anzahl der Aufgabenblätter: 8 (inkl. Deckblatt)
Hilfsmittel: unbegrenzt
Maximal erreichbare Punktzahl: 80

Note: _____
Punktzahl: _____
Erstkorrektor: _____
Zweitkorrektor: _____

Prüfer/Aufgabensteller der Prüfung: Theo Kupfer

Name: _____
Vorname: _____
Geb.datum: _____
Matrikel-Nr.: _____
Unterschrift: _____

Wichtige Hinweise:

1. Tragen Sie bitte, bevor Sie mit der Lösung der Aufgaben beginnen, die erforderlichen Angabe zu Ihrer Person im Deckblatt der Aufgabenblätter ein!
2. Die Lösungen sind auf den Aufgabenblättern einzutragen!(ggf. Rückseiten der Blätter verwenden)
3. Von mehreren Lösungen zur gleichen Aufgabe, ist die gültige Lösung eindeutig zu kennzeichnen!
4. Lösungswege müssen klar erkennbar sein.
5. Bei Formeln bitte Variablen und Parameter eindeutig erklären.

Musterlösung

Viel Erfolg

Aufgabe 1:

(Maximale Punktzahl: 10)

Erreichte Punktzahl: _____

Bild 1 zeigt verschiedene Eingangssignale x_1 , x_2 und x_3 und die zugehörigen Ausgangssignale y_1 , y_2 und y_3 eines zeitinvarianten Systems T . Bestimmen Sie ob das System linear ist.

Begründen Sie das Ergebnis.

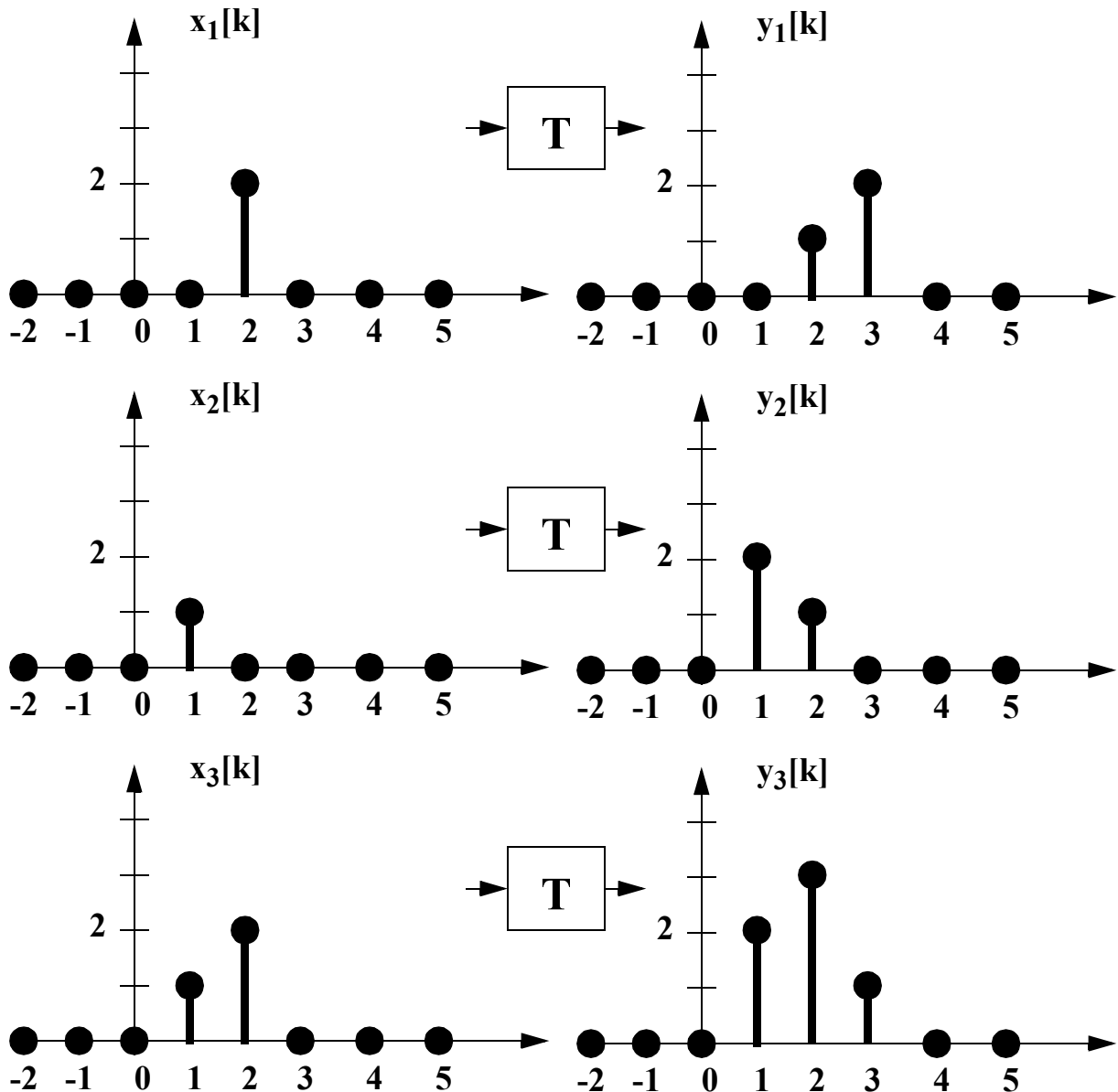


Bild 1

Lösung: linear
 nicht linear

Begründung:

$$x_3[k] = x_1[k] + x_2[k]$$

$$y_3[k] \neq y_1[k] + y_2[k]$$

Aufgabe 2:

(Maximale Punktzahl: 20)

Erreichte Punktzahl: _____

Bestimmen Sie die Impulsantwort $h[k]$ und die Systemfunktion $H(z)$ für jedes, der durch die folgenden Differenzgleichungen beschriebenen kausalen LTI Systeme. Klassifizieren Sie die Systeme auch als FIR oder IIR bzw. rekursives oder nicht rekursives System.

- a) $y[k]=x[k]-2x[k-2]+x[k-3]$
 b) $y[k]+2y[k-1]=x[k]+x[k-1]$
 c) $y[k]-0,5y[k-2]=2x[k]-x[k-2]$

- a) Lösung: FIR rekursiv
 IIR nicht rekursiv

Begründung:

Endliche Impulsantwort, keine Komponenten mit $y[k-n]$

Impulsantwort $h[k]$:

$$h[k]=\delta[k]-2\delta[k-2]+\delta[k-3]$$

Systemfunktion $H(z)$:

$$H(z)=1-2z^{-2}+z^{-3}$$

- b) Lösung: FIR rekursiv
 IIR nicht rekursiv

Begründung:

Unendliche Impulsantwort, Komponenten mit $y[k-n]$

Impulsantwort $h[k]$:

$$h[k]=(-2)^k\epsilon[k] + (-2)^{(k-1)}\epsilon[k-1]$$

Systemfunktion $H(z)$:

$$H(z)=(z+1)/(z+2)=z/(z+2) + 1/(z+2)$$

- c) Lösung: FIR rekursiv
 IIR nicht rekursiv

Begründung:

Endliche Impulsantwort, Komponenten mit $y[k-n]$

Impulsantwort $h[k]$:

$$h[k]=2\delta[k]$$

Systemfunktion $H(z)$:

$$H(z)=(2z-1)/(z-0,5)=2$$

Aufgabe 3:

(Maximale Punktzahl: 20)

Erreichte Punktzahl: _____

Ein zeitdiskretes System wird durch die Differenzgleichung

$$y[k]-1,2y[k-1]-0,35y[k-2]=x[k]+0,25x[k-1]$$

beschrieben. Die Anfangsbedingungen sind bekannt $y[-1]=0$ und $y[-2] = -2$. Das System wird mit der Eingangsfolge $x[k]=(-2)^k\varepsilon[k]$ erregt.

- a) **Bestimmen Sie die Systemfunktion $H(z)$ und die Impulsantwort $h[k]$. Ist das System stabil?**

Lösung:

$$H(z) = \frac{z^2 + 0,25z}{z^2 - 1,2z - 0,35}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z + 0,25}{(z + 0,24)(z - 1,44)}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{-0,004}{(z + 0,24)} + \frac{1}{(z - 1,44)}$$

$$H(z) = \frac{-0,004z}{(z + 0,24)} + \frac{z}{(z - 1,44)}$$

$$h[k] = -0,004(-0,24)^k \varepsilon[k] + (1,44)^k \varepsilon[k]$$

Nicht stabil da Pol ausserhalb Einheitskreis

- b) Bestimmen Sie $y_{\text{int}}[k]$ für $k > 0$ als Reaktion des Systems auf die Anfangswerte $y[-1]$ und $y[-2]$ mit $x[k]=0$. Beachten Sie dabei die Bedingung

$$y[k] \cdot \varepsilon[k] \circ \bullet Y_{\text{int}}(z)$$

$$y[k-1] \cdot \varepsilon[k] \circ \bullet z^{-1} Y_{\text{int}}(z) + y[-1]$$

$$y[k-2] \cdot \varepsilon[k] \circ \bullet z^{-2} Y_{\text{int}}(z) + z^{-1} y[-1] + y[-2]$$

Lösung:

$$Y_{\text{int}}(z) - 1.2z^{-1}Y_{\text{int}}(z) - 1.2y[-1] - 0.35z^{-2}Y_{\text{int}}(z) - 0.35z^{-1}y[-1] - 0.35y[-2] = 0$$

$$y[-1] = 0; y[-2] = -2$$

$$Y_{\text{int}}(z)(z^2 - 1.2z - 0.35) = -0.35 \cdot 2z^2$$

$$Y_{\text{int}}(z) = \frac{-0.7z^2}{(z^2 - 1.2z - 0.35)}$$

$$\frac{Y_{\text{int}}(z)}{z} = \frac{-0.7z}{(z+0.24)(z-1.44)}$$

$$\frac{Y_{\text{int}}(z)}{z} = \frac{-0.1}{(z+0.24)} + \frac{-0.6}{(z-1.44)}$$

$$Y_{\text{int}}(z) = \frac{-0.1z}{(z+0.24)} + \frac{-0.6z}{(z-1.44)}$$

$$y_{\text{int}}[k] = -0.1(-0.24)^k \varepsilon[k] - 0.6(1.44)^k \varepsilon[k]$$

- c) Bestimmen Sie $y_{\text{ext}}[k]$ als Reaktion des Systems auf das Eingangssignal $x[k] = (-2)^k \varepsilon[k]$ falls sich das System anfangs in Ruhe befindet.

Lösung:

$$Y_{\text{ext}}(z) = X(z)H(z) = \frac{z^2 + 0.25z}{z^2 - 1.2z - 0.35} \frac{z}{z+2}$$

$$\frac{Y_{\text{ext}}(z)}{z} = \frac{z^2 + 0.25z}{(z+0.24)(z-1.44)(z+2)}$$

$$\frac{Y_{\text{ext}}(z)}{z} = \frac{0.0006}{(z+0.24)} + \frac{0.4}{(z-1.44)} + \frac{0.6}{(z+2)}$$

$$Y_{\text{ext}}(z) = \frac{0.0006z}{(z+0.24)} + \frac{0.4z}{(z-1.44)} + \frac{0.6z}{(z+2)}$$

$$y_{\text{ext}}[k] = 0.0006(-0.24)^k \varepsilon[k] + 0.4(1.44)^k \varepsilon[k] + 0.6(-2)^k \varepsilon[k]$$

Aufgabe 4:

(Maximale Punktzahl: 10)

Erreichte Punktzahl: _____

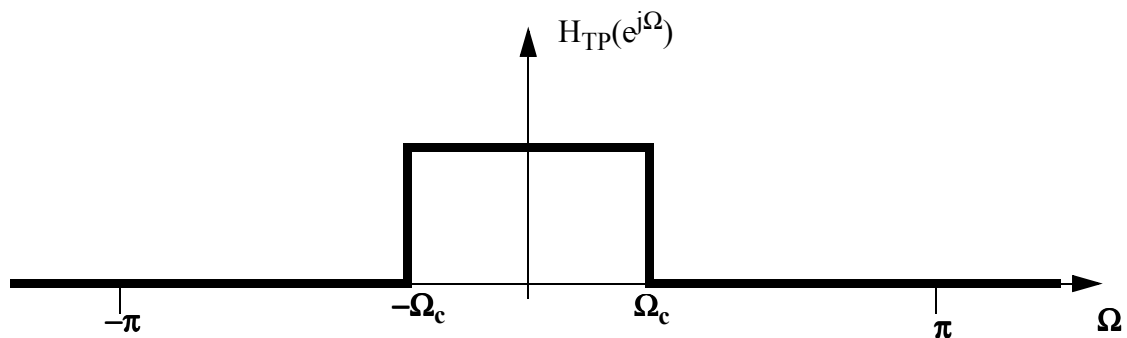
$h_{TP}[k]$ sei die Impulsantwort eines zeitdiskreten Tiefpassfilters mit dem Frequenzgang $H_{TP}(e^{j\Omega})$. Zeigen Sie, dass ein zeitdiskretes Filter mit der Impulsantwort

$$h[k] = (-1)^k h_{TP}[k]$$

ein Hochpassfilter mit dem Frequenzgang

$$H(e^{j\Omega}) = H_{TP}(e^{j(\Omega-\pi)})$$

ist. Skizzieren Sie $H(e^{j\Omega})$.

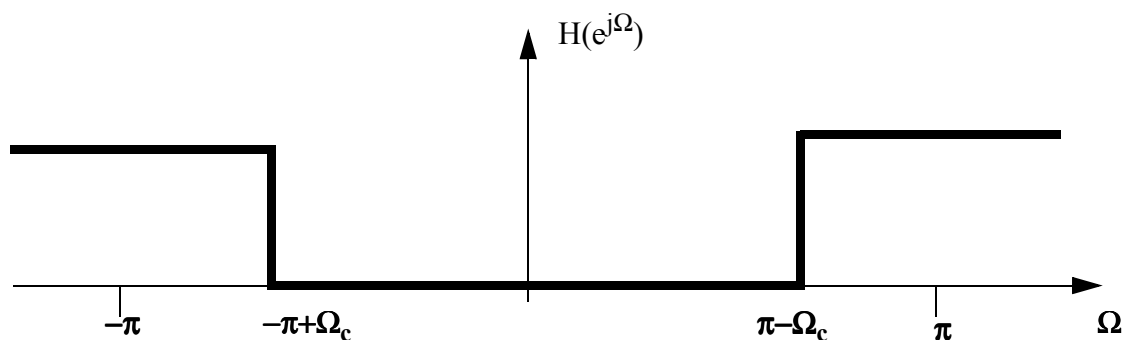


Lösung:

$$h[k] = (e^{j\pi})^k h_{TP}[k]$$

Modulationssatz:

$$H(e^{j\Omega}) = H_{TP}(e^{j(\Omega-\pi)})$$



Aufgabe 5:

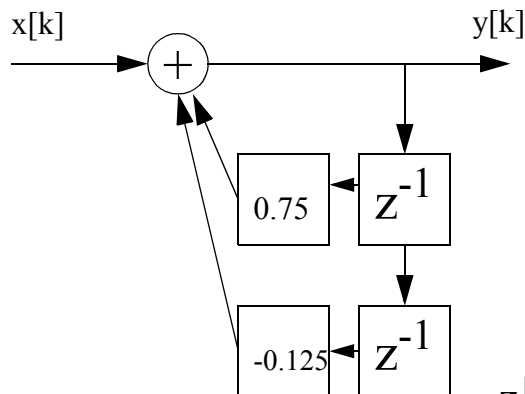
(Maximale Punktzahl: 10)

Erreichte Punktzahl: _____

Finden Sie eine Zustandsraumbeschreibung eines zeitdiskreten Systems, das durch die Differenzgleichung

$$y[k] - 0.75y[k-1] + 0.125y[k-2] = x[k]$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie die Systemfunktion und die Sprungantwort des Systems.

Ihre Lösung:

$$\mathbf{z}[k+1] = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.125 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x[k]$$

$$y[k] = [0.75 \quad -0.125] \mathbf{z}[k] + 1 \cdot x[k]$$

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.75z + 0.125}$$

$$E(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.25)} \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{E(z)}{z} = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.25)(z-1)}$$

$$\frac{E(z)}{z} = \frac{-2}{z-0.5} + \frac{0.33}{z-0.25} + \frac{2.66}{z-1}$$

$$E(z) = \frac{-2z}{z-0.5} + \frac{0.33z}{z-0.25} + \frac{2.66z}{z-1}$$

$$h[k] = -2(0.5)^k \varepsilon[k] + 0.33(0.25)^k \varepsilon[k] + 2.66\varepsilon[k]$$

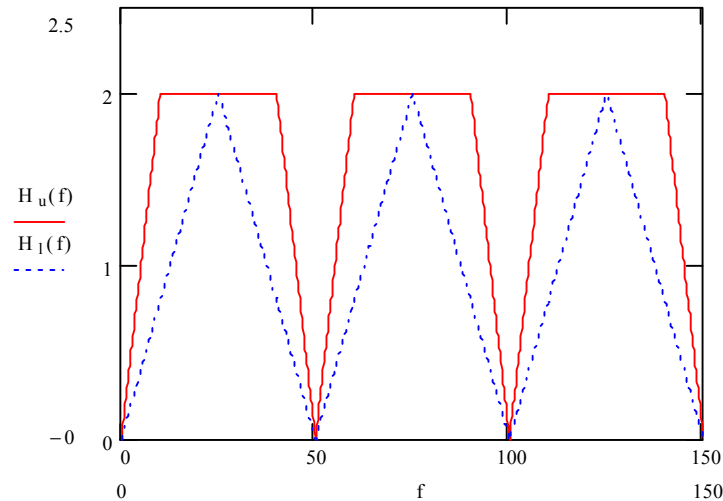
Aufgabe 6:

(Maximale Punktzahl: 10)

Erreichte Punktzahl: _____

In einem System, das mit einer Abtastrate von 300 Hz arbeitet, sollen Störungen durch die Netzspannung ($f_0=50$ Hz) durch ein Filter unterdrückt werden. Gleichzeitig sollen auch Störsignale bei Vielfachen der Netzfrequenz unterdrückt werden. Bild 2 zeigt die Toleranzspezifikation für ein solches Filter. Signale mit den Frequenzen 50, 100 und 150 Hz sollen total unterdrückt werden. Signale mit den Frequenzen 25, 75 und 125 Hz sollen mit dem Faktor 2 verstärkt werden.

- Zeigen Sie ob ein Filter mit der Differenzgleichung $y[k]=x[k]-x[k-6]$ geeignet ist.
- Zeichnen Sie das Pol-Nullstellen Diagramm des obigen Filters.

**Ihre Lösung:****a) Tauglichkeit des Filters**

$$f_1 = 0 \text{ Hz} \hat{=} \Omega_1 = \frac{2\pi f}{f_0} = 0$$

$$f_2 = 50 \text{ Hz} \hat{=} \Omega_2 = \frac{2\pi f}{f_0} = \frac{\pi}{3}$$

$$f_3 = 100 \text{ Hz} \hat{=} \Omega_3 = \frac{2\pi f}{f_0} = \frac{2\pi}{3}$$

$$f_4 = 150 \text{ Hz} \hat{=} \Omega_4 = \frac{2\pi f}{f_0} = \pi$$

$$H(z) = \frac{z^6 - 1}{z^6} \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega 6} - 1}{e^{j\Omega 6}}$$

$$H(e^{j\Omega_1}) = \frac{1-1}{1} = 0 = H(e^{j\Omega_2}) = H(e^{j\Omega_3}) = H(e^{j\Omega_4})$$

$$f_1 = 25\text{Hz} \hat{=} \Omega_1 = \frac{2\pi f}{f_0} = \frac{\pi}{6}$$

$$f_2 = 75\text{Hz} \hat{=} \Omega_2 = \frac{2\pi f}{f_0} = \frac{3\pi}{6}$$

$$f_3 = 125\text{Hz} \hat{=} \Omega_3 = \frac{2\pi f}{f_0} = \frac{5\pi}{6}$$

$$H(e^{j\Omega_1}) = \frac{-1-1}{1} = -2 = H(e^{j\Omega_2}) = H(e^{j\Omega_3})$$

b) Pol-Nullstellendiagramm

$$H(z) = \frac{z^6 - 1}{z^6}$$

